УДК 517.9 doi 10.26089/NumMet.v18r211

ПРИНЦИП МАКСИМУМА ДЛЯ МОДЕЛЕЙ МНОГОФАЗНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

К. А. Новиков[1]

Сформулированы и доказаны принципы максимума для нескольких моделей многофазной фильтрации. Первый принцип справедлив для фазовых насыщенностей в несжимаемом случае модели двухфазной фильтрации с постоянными вязкостями, а второй — для глобального давления в моделях двух- и трехфазной фильтрации с постоянными вязкостями. Второй принцип максимума справедлив и для фазовых давлений при нулевом капиллярном давлении.

Ключевые слова: принцип максимума, многофазная фильтрация, модель нелетучей нефти.

1. Введение. Принцип максимума является одним из важнейших свойств уравнений в частных производных и их систем. В частности, в моделях, описывающих концентрации, плотности или абсолютные температуры, он обеспечивает неотрицательность решения.

Принцип максимума выполняется для широкого класса систем связанных параболических [1] и эллиптических [2] линейных уравнений. Его справедливость для нелинейных уравнений зависит от постановки задачи: конкретных уравнений, предположений о коэффициентах (примеры соблюдения см. в [3, 4], пример нарушения см. в [5]).

В настоящей статье рассматривается принцип максимума для классического решения систем уравнений многофазной фильтрации, представляющих собой системы связанных дифференциальных уравнений в частных производных с нелинейными коэффициентами. Результаты сформулированы для уравнений моделей многофазной фильтрации, упрощенных на основании физических допущений.

Первый принцип максимума сформулирован в предположениях несжимаемости фаз, постоянной пористости и в пренебрежении гравитационными членами. В этом случае упрощенные уравнения модели двухфазной фильтрации можно записать следующим образом:

$$\begin{cases} \phi\,\dfrac{\partial s_1}{\partial t} - \dfrac{1}{\mu_1}\,\operatorname{div}\left(k_{r1}\mathbb{K}\nabla p_1\right) = q_1, \\ \phi\,\dfrac{\partial s_2}{\partial t} - \dfrac{1}{\mu_2}\,\operatorname{div}\left(k_{r2}\mathbb{K}\nabla p_2\right) = q_2, \\ s_2(s_1) = 1 - s_1, \\ p_2 - p_1 = p_c(s_1), \quad (x,t) \in \Omega \times (0,T). \end{cases} \tag{1}$$

Здесь $x = (x_1, x_2, x_3)$ — пространственные переменные; нижние индексы 1 и 2 обозначает водную и нефтяную фазы соответственно; s_α, p_α, u_α — неизвестные фазовые насыщенность, давление и скорость Дарси; q_α, $k_{r\alpha}$, μ_α обозначают внешние источники, относительную проницаемость и вязкость соответственно, где $\alpha = 1, 2$. Пористость среды, тензор абсолютной проницаемости и капиллярное давление обозначены символами ϕ, $\mathbb{K}$ и p_c.

Ниже предполагается, что $k_{r\alpha}$ — неотрицательные функции насыщенности соответствующей фазы, p_c — функция от насыщенности воды s_1, а q_α — функция от x, t. Матрица $\mathbb{K}$, коэффициенты которой зависят от x, является матрицей третьего порядка. Положительную функцию пористости ϕ и неотрицательные вязкости μ_α везде далее будем считать постоянными.

Второй принцип максимума аналогично формулируется для моделей двух- и трехфазной фильтрации. Здесь приведем только вариант для модели трехфазной фильтрации. В нашей работе используется формулировка модели в виде нелинейного параболического уравнения (вывод, выражения для коэффициентов и физические предположения, необходимые для данной, формулировки см. в [7]):

$$\begin{cases} c\,\dfrac{\partial p}{\partial t} = -\nabla\cdot u - (d_0 u + d_1\nabla s_1 + d_2\nabla s_2)\cdot\nabla p + q(p), \\ u = -\mathbb{K}\lambda(\nabla p), \\ s_1 + s_2 + s_3 = 1, \quad (x,t) \in \Omega \times (0,T). \end{cases} \tag{2}$$

[1] Институт вычислительной математики РАН (ИВМ РАН), ул. Губкина, д. 8, 119333, Москва; мл. науч. сотр., e-mail: konst.novikov@gmail.com

Здесь $\lambda = \lambda(s_1, s_2)$, $c = c(s_1, s_2, p)$, $d_0 = d_0(s_1, s_2, p)$, $d_\alpha = d_\alpha(s_1, s_2, p)$, $q = q(p)$. Функция p называется глобальным давлением и является новой неизвестной (вместе с s_α, $\alpha = 1, 2, 3$). В случае нулевого капиллярного давления эта функция совпадает с давлением всех фаз.

Уравнения дополняются начальными и граничными условиями.

Результаты данной работы сформулированы для дважды непрерывно дифференцируемых по пространственным переменным и непрерывно дифференцируемым по времени функциям. Подобная гладкость решений может быть допустима в предположении гладкости границы и правых частей, что может быть достигнуто за счет "вырезания" скважин из рассматриваемой области гладкими поверхностями.

В то время как существование, единственность и численные методы при различных допущениях изучены для данных моделей [6, 7], принцип максимума для них рассмотрен только для несжимаемого случая с нулевыми капиллярными давлениями в бесконечной одномерной области и для частного случая начальных условий [8].

В настоящей работе рассматриваются принципы максимума для более общих случаев. Приведем общие для всех результатов работы предположения:

(a1) область Ω ограничена,

(a2) элементы $\mathbb{K}$ постоянны: $\mathbb{K}_{ij} = \text{const}$,

(a3) матрица $\mathbb{K}$ симметрична и положительно определена: $\displaystyle\sum_{i,j=1}^{3} (\mathbb{K})_{ij}\xi_i\xi_j > 0$ для всех $\xi \neq 0 \in \mathbb{R}^3$.

2. Принцип максимума для фазовых насыщенностей. Определим следующие выражения:

$$L_1[s,p] = \phi\,\frac{\partial s}{\partial t} - \frac{1}{\mu_1(p)}\,\operatorname{div}\left(k_{r1}(s)\mathbb{K}\nabla p\right), \quad L_2[s,p] = \phi\,\frac{\partial s}{\partial t} - \frac{1}{\mu_2(p)}\,\operatorname{div}\left(k_{r2}(s)\mathbb{K}\nabla p\right).$$

Тогда модель двухфазной фильтрации (1) примет вид $\begin{cases} L_1[s_1,p_1] = q_1, \\ L_2[s_2,p_2] = q_2, \\ s_2(s_1) = 1 - s_1, \\ p_2 - p_1 = p_c(s_1), \quad (x,t) \in \Omega \times (0,T). \end{cases}$

Поскольку сведение задачи к уравнениям, для которых принцип максимума уже сформулирован (например, к параболическим), относительно переменных s_α представляется неочевидным, приведем свое доказательство принципа максимума для этих переменных.

Относительно коэффициентов модели примем следующие предположения (предположения о монотонности функций обоснованы физикой задачи, см. [9]):

(b1) k_{r1} дифференцируемая монотонно возрастающая функция от s_1, k_{r2} дифференцируемая монотонно убывающая функция от s_1;

(b2) p_c дифференцируемая монотонно убывающая функция от s_1;

(b3) функции $\dfrac{dp_c(s_1)}{ds_1}$ и $\dfrac{d^2p_c(s_1)}{ds_1^2}$ ограничены константой $M > 0$ и удовлетворяют условию Липшица с той же константой;

(b4) функции $k_{r\alpha}(s_1)$ и $\dfrac{dk_{r\alpha}(s_1)}{ds_1}$ ограничены константой $M > 0$ и удовлетворяют условию Липшица с той же константой;

(b5) $\mu_\alpha = \text{const}, \ \alpha = 1, 2$;

(b6) $\phi = \text{const}$.

Теорема 1. Принцип максимума для фазовых насыщенностей. *Пусть для функций* $s_1(x,t)$, $s_2(x,t)$, $p_1(x,t)$, $p_2(x,t) \in C^{2,1}\left(\overline{\Omega_T}\right)$, *где* $\Omega_T = \Omega \times (0,T]$, *в* Ω_T *выполняется система*

$$L_1[s_1,p_1] \leqslant 0, \quad L_2[s_2,p_2] \geqslant 0, \quad s_2(s_1) = 1 - s_1, \quad p_2 - p_1 = p_c(s_1). \tag{3}$$

Тогда, если верны предположения (a1–a3, b1–b6), *то* $\sup\limits_{\Omega\times(0,T]} s_1 \leqslant \sup\limits_{\Gamma} s_1$, *где* $\Gamma = \big(\partial\Omega\times[0,T)\big)\cup(\Omega\times 0)$.

Доказательство. Заметим, что в силу дважды непрерывно дифференцируемости s_1, p_1 в $\overline{\Omega}$, ограниченности Ω (см. (a1)) и постоянства элементов $\mathbb{K}$ (см. (a2)) можно выбрать такую ограничивающую константу M, что выполняются следующие неравенства:

(c1) s_1 ограничена в Ω константой $M > 0$,

(c2) первые и вторые пространственные производные s_1 существуют и ограничены в Ω константой $M > 0$,

(c3) первые и вторые пространственные производные p_1 существуют и ограничены в Ω константой $M > 0$,

(c4) элементы $\mathbb{K}$ ограничены константой M.

Дальнейшее доказательство состоит из двух частей.

1. Допустим, что знаки неравенств в системе (3) строгие:

$$L[s_1,p_1] < 0, \quad L[s_2,p_2] > 0, \quad s_2(s_1) = 1 - s_1, \quad p_2 - p_1 = p_c(s_1). \tag{4}$$

Пусть s_1 достигает максимума в некоторой точке $\boldsymbol{m} = \big(x_1^m, x_2^m, x_3^m, t^m\big) \in \Omega\times(0,T]$. Тогда, используя необходимое условие экстремума, получим:

— если $t^m < T$, то производная первого порядка по времени от s_1 равна нулю. Если $t^m = T$, то производная первого порядка по времени от s_1 не меньше нуля (в противном случае для некоторого малого ε $s_1\big(x_1^m, x_2^m, x_3^m, t^m - \varepsilon\big) > s_1\big(x_1^m, x_2^m, x_3^m, t^m\big)$). Отсюда

$$\frac{\partial s_1}{\partial t}\bigg|_{\boldsymbol{m}} \geqslant 0, \tag{5}$$

— поскольку $s_2 = 1 - s_1$, s_2 достигает минимума в $\boldsymbol{m}$, поэтому имеет неположительную производную по времени в данной точке:

$$\frac{\partial s_2}{\partial t}\bigg|_{\boldsymbol{m}} \leqslant 0, \tag{6}$$

— в силу монотонности (см. (b1)) $k_{r\alpha}$, $\alpha = 1,2$, достигает экстремума в $\boldsymbol{m}$, поэтому имеет нулевые производные первого порядка по пространству в данной точке:

$$\nabla k_{r\alpha}\big|_{\boldsymbol{m}} = 0, \quad \alpha = 1,2. \tag{7}$$

Используя (5)–(7) и раскрывая дивергенцию в системе (4), получаем

$$0 > \big[L[s_1,p_1]\big]\Big|_{\boldsymbol{m}} \geqslant \left[0 - \frac{1}{\mu 1}\,\nabla(k_{r1})\cdot(\mathbb{K}\nabla p_1) - \left(\frac{k_{r1}}{\mu_1}\right)\operatorname{div}(\mathbb{K}\nabla p_1)\right]\Bigg|_{\boldsymbol{m}} = -\left(\frac{k_{r1}}{\mu_1}\right)\operatorname{div}(\mathbb{K}\nabla p_1)\big|_{\boldsymbol{m}}.$$

Допуская, что $k_{r1}(\boldsymbol{m}) \neq 0$ (для нулевого k_{r1} утверждение теоремы следует из монотонности k_{r1}: k_{r1} достигает максимума в $\boldsymbol{m}$, следовательно, $k_{r1} \equiv 0$, и из вырожденного первого уравнения системы (3) очевидным образом следует невозрастание s_1 по t), получаем

$$\operatorname{div}(\mathbb{K}\nabla p_1)\big|_{\boldsymbol{m}} > 0. \tag{8}$$

Аналогично

$$\operatorname{div}(\mathbb{K}\nabla p_2)\big|_{\boldsymbol{m}} < 0. \tag{9}$$

Вычитая (8) из (9), получим

$$\operatorname{div}(\mathbb{K}\nabla p_c)\big|_{\boldsymbol{m}} < 0. \tag{10}$$

Поскольку $p_c(s_1)$ убывающая функция s_1 (см. (b2)), она достигает минимума в $\boldsymbol{m}$. В силу необходимого условия минимума гессиан положительно полуопределен:

$$\sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial^2 p_c(\boldsymbol{m})}{\partial x_i \partial x_j}\,\xi_i\xi_j\Bigg|_{x_o} \geqslant 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^3. \tag{11}$$

Поскольку $\mathbb{K}$ симметричная положительно определенная матрица (см. (a3)), для нее существует разложение Холецкого: $(\mathbb{K})_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{3} g_{ki} g_{kj}$.

Поставляя g_k вместо ξ в (11), получим

$$\operatorname{div}\big(\mathbb{K}\nabla p_c(\boldsymbol{m})\big) = \sum_{i,j=1}^{3} (\mathbb{K})_{ij} \frac{\partial^2 p_c(\boldsymbol{m})}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{i,j,k=1}^{3} g_{ki} g_{kj} \frac{\partial^2 p_c(\boldsymbol{m})}{\partial x_i \partial x_j} \geqslant 0.$$

Последнее неравенство противоречит (10). Отсюда s_1 внутри $\Omega \times (0, T]$ не может достигать максимума, если исходные неравенства в системе (3) строгие. В силу непрерывности s_1 в замкнутой ограниченной области $\overline{\Omega} \times [0, T]$ точная верхняя грань достигается, откуда следует утверждение теоремы для данного случая.

2. Пусть теперь неравенства в системе (3) нестрогие. Рассмотрим $l_1 = s_1 - \varepsilon e^{\alpha t}$, $l_2 = s_2 + \varepsilon e^{\alpha t}$, $r_1 = p_1$, $r_2 = p_1 + p_c(l_1)$. Докажем, что при некоторых ε и α при подстановке l_1, l_2, r_1, r_2 вместо s_1, s_2, p_1, p_2 в (3) система останется верной, при этом знаки неравенств станут строгими. Выполнение равенств системы очевидно следует из определения.

Рассмотрим неравенства. Левая часть первого неравенства принимает следующий вид:

$$L[l_1, r_1] = \phi \frac{\partial s_1}{\partial t} - \phi \alpha \varepsilon e^{\alpha t} - \frac{1}{\mu_1} \operatorname{div}\big(k_{r1}(l_1)\mathbb{K}\nabla p_1\big) \pm \frac{1}{\mu_1} \operatorname{div}\big(k_{r1}(s_1)\mathbb{K}\nabla p_1\big).$$

Здесь знаком $\pm$ обозначено добавление и вычитание выражения.

В силу первого неравенства в (3) для s_1, p_1, для последнего выражения справедлива оценка сверху следующим выражением:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\mu_1} \operatorname{div}\big(k_{r1}(s_1)\mathbb{K}\nabla p_1\big) - \frac{1}{\mu_1} \operatorname{div}\big(k_{r1}(l_1)\mathbb{K}\nabla p_1\big) - \phi\alpha\varepsilon e^{\alpha t} = \\
&= \frac{1}{\mu_1} \nabla\big(k_{r1}(s_1)\big) \cdot (\mathbb{K}\nabla p_1) + \left(\frac{k_{r1}(s_1)}{\mu_1}\right) \operatorname{div}(\mathbb{K}\nabla p_1) - \\
&\quad - \frac{1}{\mu_1} \nabla\big(k_{r1}(l_1)\big) \cdot (\mathbb{K}\nabla p_1) - \left(\frac{k_{r1}(l_1)}{\mu_1}\right) \operatorname{div}(\mathbb{K}\nabla p_1) - \phi\alpha\varepsilon e^{\alpha t} = \\
&= -\left(\frac{dk_{r1}}{ds_1}\bigg|_{l_1} - \frac{dk_{r1}}{ds_1}\bigg|_{s_1}\right) \sum_{i=1}^{3} \left[\frac{1}{\mu_1} \frac{\partial s_1}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^{3} \mathbb{K}_{i,j} \frac{\partial p_1}{\partial x_j}\right)\right] - \\
&\quad - \left(\frac{k_{r1}(l_1)}{\mu_1} - \frac{k_{r1}(s_1)}{\mu_1}\right) \sum_{i,j=1}^{3} \left[\mathbb{K}_{i,j} \frac{\partial^2 p_1}{\partial x_i \partial x_j}\right] - \phi\alpha\varepsilon e^{\alpha t} \leqslant \text{в силу (b4,c2–c4)} \leqslant \\
&\leqslant 9 \frac{M^4}{\mu_1} \varepsilon e^{\alpha t} + 9 \frac{M^3}{\mu_1} \varepsilon e^{\alpha t} - \phi\alpha\varepsilon e^{\alpha t} = \varepsilon e^{\alpha t}\left(9 \frac{M^4}{\mu_1} + 9 \frac{M^3}{\mu_1} - \phi\alpha\right).
\end{aligned}$$

Последнее выражение для достаточно больших α строго отрицательно.

Рассмотрим теперь второе неравенство системы (3):

$$L[l_2, r_2] = \phi \frac{\partial s_2}{\partial t} + \phi\alpha\varepsilon e^{\alpha t} - \frac{1}{\mu_2} \operatorname{div}\Big(k_{r2}(l_1)\mathbb{K}\nabla\big(p_1 + p_c(l_1)\big)\Big) \pm \frac{1}{\mu_2} \operatorname{div}\big(k_{r2}(s_1)\mathbb{K}\nabla p_2(p_1, s_1)\big).$$

В силу второго неравенства системы (3) для s_2, p_2, для последнего выражения справедлива оценка снизу следующим выражением:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\mu_2}\,\mathrm{div}\left(k_{r2}(s_1)\mathbb{K}\nabla\big(p_1+p_c(s_1)\big)\right)-\frac{1}{\mu_2}\,\mathrm{div}\left(k_{r2}(l_1)\mathbb{K}\nabla\big(p_1+p_c(l_1)\big)\right)+\phi\alpha\varepsilon e^{\alpha t}=\\
=\frac{1}{\mu_2}\,\nabla\big(k_{r2}(s_1)\big)\cdot(\mathbb{K}\nabla p_1)+\left(\frac{k_{r2}(s_1)}{\mu_2}\right)\mathrm{div}\,(\mathbb{K}\nabla p_1)+\\
+\frac{1}{\mu_2}\,\nabla(k_{r2}(s_1))\cdot\big(\mathbb{K}\nabla p_c(s_1)\big)+\left(\frac{k_{r2}(s_1)}{\mu_2}\right)\mathrm{div}\,\big(\mathbb{K}\nabla p_c(s_1)\big)-\\
-\frac{1}{\mu_2}\,\nabla\big(k_{r2}(l_1)\big)\cdot(\mathbb{K}\nabla p_1)-\left(\frac{k_{r2}(l_1)}{\mu_2}\right)\mathrm{div}\,(\mathbb{K}\nabla p_1)-\\
-\frac{1}{\mu_2}\,\nabla\big(k_{r2}(l_1)\big)\cdot\big(\mathbb{K}\nabla p_c(l_1)\big)-\left(\frac{k_{r2}(l_1)}{\mu_2}\right)\mathrm{div}\,\big(\mathbb{K}\nabla p_c(l_1)\big)\pm\\
\pm\frac{1}{\mu_2}\,\nabla\big(k_{r2}(s_1)\big)\cdot\big(\mathbb{K}\nabla p_c(l_1)\big)\pm\left(\frac{k_{r2}(s_1)}{\mu_2}\right)\mathrm{div}\,\big(\mathbb{K}\nabla p_c(l_1)\big)-\phi\alpha\varepsilon e^{\alpha t}.
\end{aligned}$$

Далее используется равенство $\dfrac{\partial l_2}{\partial x_i}=\dfrac{\partial s_2}{\partial x_i}$, $i=1,2,3$. Раскрывая дивергенцию и перегруппируя слагаемые, перепишем последнее выражение в следующем виде

$$\begin{aligned}
&-\left(\frac{dk_{r2}}{ds_1}\bigg|_{l_1}-\frac{dk_{r2}}{ds_1}\bigg|_{s_1}\right)\sum_{i=1}^{3}\left[\frac{1}{\mu_2}\frac{\partial s_1}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^{3}\mathbb{K}_{i,j}\frac{\partial p_1}{\partial x_j}\right)\right]-\left(\frac{k_{r2}(l_1)}{\mu_2}-\frac{k_{r2}(s_1)}{\mu_2}\right)\sum_{i,j=1}^{3}\left[\mathbb{K}_{i,j}\frac{\partial^2 p_1}{\partial x_i\partial x_j}\right]-\\
&-\left(\frac{dp_c}{ds_1}\bigg|_{l_1}-\frac{dp_c}{ds_1}\bigg|_{s_1}\right)\sum_{i=1}^{3}\left[\frac{1}{\mu_2}\frac{dk_{r2}}{ds_1}\bigg|_{s_1}\frac{\partial s_1}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^{3}\mathbb{K}_{i,j}\left(\frac{\partial s_1}{\partial x_j}\right)\right)\right]-\\
&-\left(\frac{dk_{r2}}{ds_1}\bigg|_{l_1}-\frac{dk_{r2}}{ds_1}\bigg|_{s_1}\right)\sum_{i=1}^{3}\left[\frac{1}{\mu_2}\frac{\partial s_1}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^{3}\mathbb{K}_{i,j}\left(\frac{dp_c}{ds_1}\bigg|_{l_1}\frac{\partial s_1}{\partial x_j}\right)\right)\right]-\\
&-\left(\frac{d^2p_c}{ds_1^2}\bigg|_{l_1}-\frac{d^2p_c}{ds_1^2}\bigg|_{s_1}\right)\frac{k_{r2}(s_1)}{\mu_2}\sum_{i,j=1}^{3}\left[\mathbb{K}_{i,j}\left(\frac{\partial s_1}{x_i}\frac{\partial s_1}{x_j}\right)\right]-\left(\frac{dp_c}{ds_1}\bigg|_{l_1}-\frac{dp_c}{ds_1}\bigg|_{s_1}\right)\frac{k_{r2}(s_1)}{\mu_2}\sum_{i,j=1}^{3}\left[\mathbb{K}_{i,j}\left(\frac{\partial^2 s_1}{\partial x_i\partial x_j}\right)\right]-\\
&-\left(\frac{k_{r2}(l_1)}{\mu_2}-\frac{k_{r2}(s_1)}{\mu_2}\right)\sum_{i,j=1}^{3}\left[\mathbb{K}_{i,j}\left(\frac{d^2p_c}{ds_1}\bigg|_{l_1}\frac{\partial s_1}{x_i}\frac{\partial s_1}{x_j}+\frac{dp_c}{ds_1}\bigg|_{l_1}\frac{\partial^2 s_1}{\partial x_i\partial x_j}\right)\right]+\phi\alpha\varepsilon e^{\alpha t}\geqslant\\
&\geqslant\text{в силу (b3–b4, c1– c4)}\geqslant\varepsilon e^{\alpha t}\left(-36\,\frac{M^5}{\mu_2}-27\,\frac{M^4}{\mu_2}-9\,\frac{M^3}{\mu_2}+\phi\alpha\right).
\end{aligned}$$

Последнее выражение строго положительно для достаточно большого α. Используя первую часть доказательства, получаем, что l_1 не может достигать максимума в $\Omega\times(0,T]$. Отсюда

$$\sup_{\Omega\times(0,T]} s_1\leqslant\sup_{\Omega\times(0,T]}(s_1-\varepsilon e^{\alpha t}+\varepsilon e^{\alpha T})=\sup_{\Omega\times(0,T]} l_1+\varepsilon e^{\alpha T}\leqslant\sup_{\partial\Omega\times[0,T)} l_1+\varepsilon e^{\alpha T}\leqslant\sup_{\partial\Omega\times[0,T)} s_1+\varepsilon e^{\alpha T}.$$

Устремляя ε к нулю, получим утверждение теоремы.

Аналогично можно доказать принцип минимума для s_1 и принципы максимума и минимума для s_2.

3. Принцип максимума для глобального давления. Определим выражение

$$L[p]=c\,\frac{\partial p}{\partial t}-\nabla\cdot(\mathbb{K}\lambda\nabla p)-d_0\mathbb{K}\lambda\nabla p\cdot\nabla p+(d_1\nabla s_1+d_2\nabla s_2)\cdot\nabla p.$$

Тогда первое уравнение (2) можно записать в виде $L[p]=q(p)$. Это уравнение является нелинейным параболическим уравнением, для классического решения которого справедлив принцип максимума (см., например, [10]). Для единообразия ниже приведем свое доказательство.

Используем следующие предположения относительно коэффициентов:

(d1) функция λ и частные производные λ по s_1, s_2 ограничены константой $M>0$, (d2) функции d_0, d_1, d_2 ограничены константой $M > 0$,

(d3) d_0, d_1, d_2 липшицевы как функции от p с константой Липшица $M > 0$,

(d4) c липшицево как функция от p с константой Липшица $M > 0$,

(d5) c строго положительно (см. [7]).

Теорема 2. Принцип максимума для глобального давления. *Пусть для двух функций* s_1, $s_2 \in C^{2,1}\left(\overline{\Omega_T}\right)$*, где* $\Omega_T = \Omega \times (0, T]$*, в* Ω_T *выполняется неравенство* $L[p] \leqslant 0$*. Тогда если верны предположения* (a1–a3, d1–d5), *то* $\sup\limits_{\Omega\times(0,T]} p \leqslant \sup\limits_{\Gamma} p$*, где* $\Gamma = \big(\partial\Omega \times [0, T)\big) \cup (\Omega \times 0)$.

Доказательство. Доказательство состоит из двух частей.

1. Допустим, что $L[p] < 0$ в $\Omega \times (0, T]$ и p достигает максимума в $\boldsymbol{m} = \big(x_1^m, x_2^m, x_3^m, t^m\big) \in \Omega \times (0, T]$. По необходимому условию максимума $\nabla p\big|_{\boldsymbol{m}} = 0$, $\dfrac{\partial p(\boldsymbol{m})}{\partial t} \geqslant 0$, $L\big[p(\boldsymbol{m})\big] = c\,\dfrac{\partial p(\boldsymbol{m})}{\partial t} - \lambda \operatorname{div}\big(\mathbb{K}\nabla p(\boldsymbol{m})\big) < 0$.

Аналогично доказательству теоремы 1, используя отрицательную полуопределенность гессиана p и разложение Холецкого $\mathbb{K}$, получаем противоречие.

2. Пусть теперь $L[p] \leqslant 0$. Поскольку p, s_1, s_2 непрерывно дифференцируемы в $\overline{\Omega}$, их первые частные производные ограничены в Ω: $\left|\dfrac{\partial p}{\partial x_i}\right| \leqslant M$, $\left|\dfrac{\partial p}{\partial t}\right| \leqslant M$, $\left|\dfrac{\partial s_\alpha}{\partial x_i}\right| \leqslant M$, $i = 1, 2, 3$, $\alpha = 1, 2$.

Элементы $\mathbb{K}_{ij}$ ограничены в силу (a2): $|\mathbb{K}_{ij}| \leqslant M$.

Рассмотрим $L[r]$, где $r = p + \varepsilon e^{\alpha x_1}, \varepsilon > 0$. Тогда

$$L[r] = c\big(p + \varepsilon e^{\alpha x_1}\big)\,\frac{\partial p + \varepsilon e^{\alpha x_1}}{\partial t} - \operatorname{div}\big(\lambda\mathbb{K}\nabla(p + \varepsilon e^{\alpha x_1})\big) - \Big(d_0(r)\mathbb{K}\lambda\nabla\big(p + \varepsilon e^{\alpha x_1}\big)\Big) \cdot \nabla\big(p + \varepsilon e^{\alpha x_1}\big) +$$
$$+ \big(d_1(r)\nabla s_1 + d_2(r)\nabla s_2\big) \cdot \nabla\big(p + \varepsilon e^{\alpha x_1}\big) \pm c(p)\,\frac{\partial p}{\partial t} \pm \big(d_0(p)\mathbb{K}\lambda\nabla p\big) \cdot \nabla p \pm \big(d_1(p)\nabla s_1 + d_2(p)\nabla s_2\big) \cdot \nabla p.$$

Перегруппируя слагаемые, получаем

$$\begin{aligned} L[r] = {} & L[p] - \lambda\mathbb{K}_{11}\varepsilon\alpha^2 e^{\alpha x_1} - \nabla\lambda \cdot \varepsilon\alpha e^{\alpha x_1}[\mathbb{K}_{11}, \mathbb{K}_{21}, \mathbb{K}_{31}] - \\ & - \Big(c(p) - c\big(p + \varepsilon e^{\alpha x_1}\big)\Big)\,\frac{\partial p}{\partial t} - \Big(d_0\big(p + \varepsilon e^{\alpha x_1}\big) - d_0(p)\Big)\mathbb{K}\lambda\nabla p \cdot \nabla p - \\ & - \big(d_0(r)\lambda\varepsilon\alpha e^{\alpha x_1}[\mathbb{K}_{11}, \mathbb{K}_{21}, \mathbb{K}_{31}]\big) \cdot \nabla p - d_0(r)\mathbb{K}\lambda\nabla p \cdot \Big(\varepsilon\alpha\big[e^{\alpha x_1}, 0, 0\big]^T\Big) - \\ & - \big(d_0(r)\lambda\varepsilon\alpha e^{\alpha x_1}[\mathbb{K}_{11}, \mathbb{K}_{21}, \mathbb{K}_{31}]\big) \cdot \Big(\varepsilon\alpha\big[e^{\alpha x_1}, 0, 0\big]^T\Big) - \\ & - \bigg(\Big(d_1(p) - d_1\big(p + \varepsilon e^{\alpha x_1}\big)\Big)\nabla s_1 + \Big(d_2(p) - d_2\big(p + \varepsilon e^{\alpha x_1}\big)\Big)\nabla s_2\bigg) \cdot \nabla p \leqslant \\ \leqslant {} & \varepsilon e^{\alpha x_1}\Big(-\alpha^2\lambda\mathbb{K}_{11}\big(1 + \varepsilon d_0(r)e^{\alpha x_1}\big) + \alpha\big(6M^4 + 3M^3\big) + 9M^2 + 6M^3 + 9M^5\Big) \leqslant \\ \leqslant {} & \left\{\forall\varepsilon < \frac{1}{2Me^{\alpha M}}\right\} \leqslant \varepsilon e^{\alpha x_1}\bigg(-\alpha^2\lambda\mathbb{K}_{11}\,\frac{1}{2} + \alpha\big(6M^3 + 2M^2\big) + 9M^4 + 6M^3\bigg). \end{aligned}$$

Здесь использованы предположения (a1–a3, d1–d4). Для достаточно большого α последнее выражение строго отрицательно. На основании первой части доказательства r не может достигать максимума в $\Omega \times (0, T)$. Отсюда

$$\sup_{\Omega\times(0,T]} p \leqslant \sup_{\Omega\times(0,T]} \big(p + \varepsilon e^{\alpha x_1}\big) \leqslant \sup_{\partial\Omega\times[0,T)} \big(p + \varepsilon e^{\alpha x_1}\big) \leqslant \sup_{\partial\Omega\times[0,T)} p + \varepsilon e^{\alpha M}.$$

Устремляя ε к нулю, получаем утверждение теоремы.

Принцип минимума, а также принципы максимума и минимума для модели двухфазной фильтрации могут быть доказаны аналогично.

4. Обсуждение. В настоящей статье доказаны два принципа максимума. Первый из них справедлив для насыщенностей в несжимаемом случае модели двухфазной фильтрации с постоянными фазовыми вязкостями. Второй принцип максимума справедлив для глобального давления в моделях двух- и трехфазной фильтрации с постоянными фазовыми вязкостями. Если капиллярное давление равно нулю, то он тоже применим к давлению любой из фаз. В обоих случаях доказательство проводится для нулевых гравитационных членов, что может быть применимо для больших тонких резервуаров, где перенос осуществляется по большей части в горизонтальной плоскости.

Поскольку принципы максимума выполняются для дифференциальных моделей, численные схемы, удовлетворяющие дискретному принципу максимума, приводят к более качественному численному решению. Искусственные источники и стоки численного давления приводят к неверным численным скоростям Дарси и, как следствие, нефизичному решению. Таким образом, задача построения таких численных схем представляется актуальной.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 15–35–20991) и ExxonMobil Upstream Research Company. Автор выражает благодарность К.Д. Никитину и Ю.В. Василевскому за полезные обсуждения и замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Weinberger H.* Invariant sets for weakly coupled parabolic and elliptic systems // Rendiconti di Matematica. 1975. **8**. 295–310.
2. *Liu X., Zhang X.* The weak maximum principle for a class of strongly coupled elliptic differential systems // Journal of Functional Analysis. 2012. **263**, N 7. 1862–1886.
3. *Gripenberg G.* On the strong maximum principle for degenerate parabolic equations // Journal of Differential Equations. 2007. **242**, N 1. 72–85.
4. *Payne L.E., Philippin G.A.* On maximum principles for a class of nonlinear second-order elliptic equations // Journal of Differential Equations. 1980. **37**, N 1. 39–48.
5. *Diaz J.I., Hernández J.* Global bifurcation and continua of nonnegative solutions for some nonlinear elliptic eigenvalue type problems // Contribuciones matemáticas : homenaje al profesor Enrique Outerelo Domínguez. Madrid: Complutense Univ., 2004. 161–170.
6. *Chen Z.* Degenerate two-phase incompressible flow: I. Existence, uniqueness and regularity of a weak solution // Journal of Differential Equations. 2001. **171**, N 2. 203-232.
7. *Chen Z.* Formulations and numerical methods of the black oil model in porous media // SIAM Journal on Numerical Analysis. 2000. **38**, N 2. 489–514.
8. *Holden H., Risebro N.H., Tveito A.* Maximum principles for a class of conservation laws // SIAM Journal on Applied Mathematics. 1995. **55**, N 3. 651–661.
9. *Chen Z., Huan G., Ma Y.* Computational methods for multiphase flows in porous media. Philadelphia: SIAM Press, 2006.
10. *Protter M.H., Weinberger H.F.* Maximum principles in differential equations. New York: Springer, 1999.

Поступила в редакцию
11.02.2017

A Maximum Principle for Multiphase Flow Models

K. A. Novikov[1]

[1] *Institute of Numerical Mathematics, Russian Academy of Sciences; ulitsa Gubkina 8, Moscow, 119333, Russia; Junior Scientist, e-mail: konst.novikov@gmail.com*

Received February 11, 2017

Abstract: Two maximum principles for several multi-phase flow models are formulated and proved. The first one is valid for phase saturations in an incompressible two-phase flow model with constant viscosities. The second one is valid for the global pressure in two- and three-phase flow models with constant viscosities and is also valid for phase pressures in the case of zero capillary pressure.

Keywords: maximum principle, multi-phase flow, black oil model.

References

1. H. Weinberger, “Invariant Sets for Weakly Coupled Parabolic and Elliptic Systems,” Rend. Mat. **8**, 295–310 (1975).

2. X. Liu and X. Zhang, “The Weak Maximum Principle for a Class of Strongly Coupled Elliptic Differential Systems,” J. Funct. Anal. **263** (7), 1862–1886 (2012).

3. G. Gripenberg, “On the Strong Maximum Principle for Degenerate Parabolic Equations,” J. Differ. Equ. **242** (1), 72–85 (2007).

4. L. E. Payne and G. A. Philippin, “On Maximum Principles for a Class of Nonlinear Second-Order Elliptic Equations,” J. Differ. Equ. 1980. **37** (1). 39–48.

5. J. I. Diaz and J. Hernández, “Global Bifurcation and Continua of Nonnegative Solutions for Some Nonlinear Elliptic Eigenvalue Type Problems,” in *Contribuciones Matemáticas: Homenaje al Profesor Enrique Outerelo Domínguez* (Complutense Univ., Madrid, 2004), pp. 161–170.

6. Z. Chen, “Degenerate Two-Phase Incompressible Flow: I. Existence, Uniqueness and Regularity of a Weak Solution,” J. Differ. Equ. **171** (2), 203–232 (2001).

7. Z. Chen, “Formulations and Numerical Methods of the Black Oil Model in Porous Media,” SIAM J. Numer. Anal. **38** (2), 489–514 (2000).

8. H. Holden, N. H. Risebro, and A. Tveito, “Maximum Principles for a Class of Conservation Laws,” SIAM J. Appl. Math. **55** (3), 651–661 (1995).

9. Z. Chen, G. Huan, and Y. Ma, *Computational Methods for Multiphase Flows in Porous Media* (SIAM Press, Philadelphia, 2006).

10. M. H. Protter and H. F. Weinberger, *Maximum Principles in Differential Equations* (Springer, New York, 1999).