УДК 519.6 doi 10.26089/NumMet.v18r209

ГЛОБАЛЬНО СХОДЯЩИЙСЯ МЕТОД ДЛЯ ОТЫСКАНИЯ НУЛЕЙ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ КОНЕЧНОГО ПОРЯДКА

А. Н. Громов[1]

Предложен метод отыскания нулей целых функций конечного порядка, который сходится к корню от произвольной начальной точки, т.е. является глобально сходящимся. Метод основан на представлении производных высшего порядка от логарифмической производной в виде суммы простейших дробей и сводит отыскание корня к выбору минимального числа из конечного множества. Даны оценки скорости сходимости.

Ключевые слова: глобальная сходимость, логарифмическая производная, производная высшего порядка, простейшие дроби, формула Коши–Адамара.

Наиболее распространены методы последовательных приближений для решения алгебраических и трансцендентных уравнений одного переменного $f(x) = 0$, требующие задания начального приближения. Однако возможны и другие подходы [3]. Для решения алгебраических уравнений известны метод Лобачевского и методы выделения множителей [4–6], которые не предполагают задания начальных приближений корней. Предлагаемый метод так же отличается этим свойством, но в отличие от известных методов может быть распространен на целые функции конечного порядка.

В работах [1, 2] исследованы возможности использования итерационных функций вида

$$\Phi(x) = x + \Delta_s(x), \tag{1}$$

$$\Delta_s(x) = \big[Lf(x)\big]^{-1/(s+1)}, \tag{2}$$

$$Lf(x) = \frac{1}{(s)!}\left(-\frac{f'(x)}{f(x)}\right)^{(s)}, \quad s = 0, 1, \dots, \tag{3}$$

для вычисления действительных корней алгебраических и трансцендентных уравнений, когда порядок производной s принимает нечетные значения. В работе [1] показано, что порядок метода для соответствующего (1) итерационного процесса равен $s + 2$. Предлагаемый здесь метод основан на свойствах функции (2), но не использует (1). Итерации строятся по порядку производных s оператора L, которые вычисляются в фиксированной точке.

Предложенный метод описан для многочленов, а затем обобщен на целые функции конечного порядка.

Рассмотрим многочлен

$$f(z) = \sum_{j=0}^{n} a_j z^{n-j} = a_0 \prod_{j=1}^{n} (z - \zeta_j). \tag{4}$$

Для многочленов, согласно формуле (10) работы [1], функция $Lf(z)$ представляется в виде суммы простейших дробей

$$Lf(z) = (-1)^{s+1} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(z - \zeta_j)^{s+1}}\,, \quad s = 0, 1, \dots . \tag{5}$$

Значение $Lf(z)$ рассматривается в фиксированной точке z^0 комплексной плоскости, которую выбираем произвольно и будем называть опорной.

Пусть корни $\{\zeta_j\}$ перенумерованы в порядке неубывающих модулей разности $\left|z^0 - \zeta_j\right|$, а именно $\left|z^0 - \zeta_j\right| \leqslant \left|z^0 - \zeta_{j+1}\right|$, $j = 1, 2, \dots, n-1$. Таким образом принято, что корень ζ_1 (кратности k) является

[1] Московский государственный институт международных отношений Министерства иностранных дел РФ, Одинцовский филиал, факультет экономики, Ново-Спортивная, д. 3, 143007, Московская обл., г. Одинцово; ст. преподаватель, e-mail: an_gromov@rambler.ru

ближайшим к опорной точке z^0. Обозначим через J множество индексов корней не равных ζ_1, т. е. $J = \{k+1, k+2, \ldots, n\}$. Из формулы (5) получаем

$$Lf(z^0) = \frac{(-1)^{s+1}}{\left(z^0-\zeta_1\right)^{s+1}}\, t_s\left(z^0,\zeta_1\right). \tag{6}$$

Здесь

$$t_s\left(z^0,\zeta_1\right) = k + \sum_{j\in J}(q_j)^{s+1}, \quad q_j = \frac{z^0-\zeta_1}{z^0-\zeta_j}, \quad |q_j| \leqslant 1, \tag{7}$$

или

$$t_s\left(z^0,\zeta_1\right) = k + t_s\left(z^0,\zeta_{k+1}\right)q^{s+1}, \tag{8}$$

$$t_s\left(z^0,\zeta_{k+1}\right) = \sum_{j\in J}\left(\frac{q_j}{q}\right)^{s+1} = \sum_{j\in J}\left(\frac{z^0-\zeta_{k+1}}{z^0-\zeta_j}\right)^{s+1}, \quad |q| = |q_{k+1}| = \max_{j\in J}\left\{|q_j|\right\} \leqslant 1. \tag{9}$$

Равенство $\left|z^0-\zeta_1\right| = \left|z^0-\zeta_j\right|$ может выполняться для любого количества корней $\zeta_j \neq \zeta_1$. Как частный случай, все корни многочлена могут быть различны и равноудалены от точки z^0. Представим множество индексов J в виде суммы двух непересекающихся подмножеств

$$J = J_1 \cup J_2. \tag{10}$$

Здесь $J_1 = \left\{ j_1 \in J \,\middle|\, \left|\dfrac{z^0-\zeta_1}{z^0-\zeta_{j_1}}\right| = |q_{j_1}| = 1 \right\}$, $J_2 = \left\{ j_2 \in J \,\middle|\, \left|\dfrac{z^0-\zeta_1}{z^0-\zeta_{j_2}}\right| = |q_{j_2}| < 1 \right\}$.

Положим, что k_1 — суммарная кратность корней $\zeta_j \neq \zeta_1$, удаленных от точки z^0 на расстояние $\left|z^0-\zeta_{k+1}\right|$.

В соответствии с (10) выражения для элементов последовательностей $\left\{t_s\left(z^0,\zeta_1\right)\right\}$ и $\left\{t_s\left(z^0,\zeta_{k+1}\right)\right\}$ запишем следующим образом:

$$t_s\left(z^0,\zeta_1\right) = k + \sum_{j_1\in J_1}(q_{j_1})^{s+1} + \sum_{j_2\in J_2}(q_{j_2})^{s+1}, \quad t_s(z^0,\zeta_{k+1}) = \sum_{j_1\in J_1}\left(\frac{q_{j_1}}{q}\right)^{s+1} + \sum_{j_2\in J_2}\left(\frac{q_{j_2}}{q}\right)^{s+1}. \tag{11}$$

Случай $J_1 = \varnothing$ представляет наибольший интерес. Он равносилен условию $|q| < 1$ и означает, что $\left|z^0-\zeta_1\right| < \left|z^0-\zeta_{k+1}\right|$, другими словами все корни $\zeta_j \neq \zeta_1$ расположены вне круга $\left|z-z^0\right| \leqslant \left|z^0-\zeta_1\right|$. Из (11) получаем оценки

$$\left|t_s\left(z^0,\zeta_1\right)\right| \leqslant k + k_1 + \alpha_s, \quad \left|t_s\left(z^0,\zeta_{k+1}\right)\right| \leqslant k_1 + \chi_s, \tag{12}$$

где $\alpha_s = \left|\sum\limits_{j_2\in J_2, |q_{j_2}/q|<1}(q_{j_2})^{s+1}\right|$ и $\chi_s = \left|\sum\limits_{j_2\in J_2, |q_{j_2}/q|<1}\left(\dfrac{q_{j_2}}{q}\right)^{s+1}\right|$ — бесконечно малые при $s \to +\infty$.

Если $J_1 \neq \varnothing$, то $|q| = 1$. Неравенство $|q_{j_2}/q| < 1$ выполняется для каждого $j_2 \in J_2$, и оценки (12) сохраняют силу.

Из (12) следует, что последовательности $\left\{t_s\left(z^0,\zeta_1\right)\right\}$, $\left\{t_s\left(z^0,\zeta_{k+1}\right)\right\}$ являются ограниченными.

Имея в виду (3), введем функцию

$$y(z) = -\frac{f'(z)}{f(z)}. \tag{13}$$

Из (13), опуская для краткости аргумент, имеем $(y \cdot f)^{(m)} = -f^{(m+1)}$. Применив формулу Лейбница, получаем рекуррентное соотношение

$$y^{(m)}f^{(0)} = -f^{(m+1)} - \sum_{j=1}^{m} C_m^j y^{(m-j)} f^{(j)}. \tag{14}$$

Вычислив $y^{(0)} = y(z^0) = -f'\left(z^0\right)/f\left(z^0\right)$, по формуле (14) последовательно находим производные $y^{(m)}\left(z^0\right)$, $m = 1, 2, \ldots, s$. Согласно (3) и (13) имеем

$$Lf(z^0) = \frac{1}{(s)!}\, y^{(s)}\left(z^0\right). \tag{15}$$

С другой стороны, из (2), (6) получим

$$\Delta_s\big(z^0\big) = \sqrt[s+1]{\frac{\Big[-\big(z^0-\zeta_1\big)\Big]^{s+1}}{t_s\big(z^0,\zeta_1\big)}}. \tag{16}$$

Среди $s+1$ значений корня (16) имеется число

$$\Delta_s^*\big(z^0\big) = \frac{-\big(z^0-\zeta_1\big)}{\sqrt[s+1]{t_s\big(z^0,\zeta_1\big)}}. \tag{17}$$

Здесь величина $t_s\big(z^0,\zeta_1\big)$ определена формулами (7)–(12) и $\sqrt[s+1]{t_s\big(z^0,\zeta_1\big)}$ — главное значение корня. Далее используется следующее утверждение.

Лемма 1. *Последовательность* $\Big\{t_s\big(z^0,\zeta_1\big)\Big\}$, *определенная формулами* (7)–(12), *обладает следующими свойствами:*

1) *если корень* ζ_1 *имеет кратность* $k=1$ *и* $|q|<1$, *то существует предел последовательности* $\Big\{\sqrt[s+1]{t_s\big(z^0,\zeta_1\big)}\Big\}$ *и справедлива асимптотическая оценка*

$$\sqrt[s+1]{t_s\big(z^0,\zeta_1\big)} = 1 + O\left(\frac{q^{s+1}}{s+1}\right) \quad \text{при} \quad s\to+\infty; \tag{18}$$

2) *если относительно элементов последовательности* $\Big\{t_s\big(z^0,\zeta_1\big)\Big\}$ *известно, что их модули ограничены снизу постоянной величиной* $\varepsilon>0$, *т.е.*

$$\Big|t_s\big(z^0,\zeta_1\big)\Big| \geqslant \varepsilon > 0, \tag{19}$$

то предел последовательности $\Big\{\sqrt[s+1]{t_s\big(z^0,\zeta_1\big)}\Big\}$ *существует и*

$$\sqrt[s+1]{t_s\big(z^0,\zeta_1\big)} = 1 + O\left(\frac{1}{s+1}\right) \quad \textit{при} \quad s\to+\infty. \tag{20}$$

Доказательство. Рассмотрим доказательство первого утверждения. При $k=1$ элементы последовательности $\Big\{t_s\big(z^0,\zeta_1\big)\Big\}$, согласно (8), принимают вид бинома

$$t_s\big(z^0,\zeta_1\big) = 1 + t_s\big(z^0,\zeta_{k+1}\big)q^{s+1}.$$

В силу условия $|q|<1$ и ограниченности $t_s\big(z^0,\zeta_{k+1}\big)$, начиная с некоторого s, выполняется неравенство $\Big|t_s\big(z^0,\zeta_{k+1}\big)q^{s+1}\Big|<1$ и главное значение степени бинома представляется биномиальным рядом

$$\sqrt[s+1]{t_s\big(z^0,\zeta_1\big)} = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{s+1}\left(\frac{1}{s+1}-1\right)\ldots\left(\frac{1}{s+1}-m+1\right)}{m!}\Big[t_s\big(z^0,\zeta_{k+1}\big)q^{s+1}\Big]^m.$$

Из этого представления следует оценка (18).

Обратимся к доказательству второго утверждения леммы. Согласно (12), (19), значения $\Big|t_s\big(z^0,\zeta_1\big)\Big|$ заключены между двумя постоянными величинами, бо́льшими нуля: $\varepsilon \leqslant \Big|t_s\big(z^0,\zeta_1\big)\Big| \leqslant N$. Здесь можно принять $N=k+k_1+1$ (начиная с некоторого s), так как в оценках (12) α_s — бесконечно малая при $s\to+\infty$. Для многочлена (4) можно положить $N=n$ (при любом s), где n — степень многочлена. Следовательно,

$$\varepsilon^{1/(s+1)} \leqslant \Big|t_s\big(z^0,\zeta_1\big)\Big|^{1/(s+1)} \leqslant N^{1/(s+1)}. \tag{21}$$

Поскольку
$$e^z = 1 + O(z) \quad \text{при} \quad z \to 0, \tag{22}$$
то, используя равенства $N^{1/(s+1)} = \exp\left(\dfrac{\ln N}{s+1}\right)$ и $\varepsilon^{1/(s+1)} = \exp\left(\dfrac{\ln \varepsilon}{s+1}\right)$, получаем
$$N^{1/(s+1)} = 1 + O\left(\frac{1}{s+1}\right), \quad \varepsilon^{1/(s+1)} = 1 + O\left(\frac{1}{s+1}\right) \quad \text{при} \quad s \to +\infty. \tag{23}$$
Из (21), (23) следует
$$\sqrt[s+1]{\left|t_s\left(z^0, \zeta_1\right)\right|} = 1 + O\left(\frac{1}{s+1}\right) \quad \text{при} \quad s \to +\infty. \tag{24}$$
Для главного значения $\sqrt[s+1]{t_s\left(z^0, \zeta_1\right)}$ имеем
$$\sqrt[s+1]{t_s\left(z^0, \zeta_1\right)} = \sqrt[s+1]{\left|t_s\left(z^0, \zeta_1\right)\right|} \cdot e^{i\varphi_s}. \tag{25}$$
Здесь $\varphi_s = \arg t_s\left(z^0, \zeta_1\right)/(s+1)$, $-\pi < \arg t_s\left(z^0, \zeta_1\right) \leqslant \pi$. Из оценки (22), учитывая $|\varphi_s| \leqslant \pi/(s+1)$, находим
$$e^{i\varphi_s} = 1 + O\left(\frac{1}{s+1}\right) \quad \text{при} \quad s \to +\infty. \tag{26}$$
Из (24)–(26) следует утверждение леммы (20).

Далее используется следующее свойство асимптотических оценок. Пусть $\varphi(z) = o(1)$ при $z \to z^0$. Тогда
$$\frac{1}{1 + O\left(\varphi(z)\right)} = 1 + O\left(\varphi(z)\right), \quad z \to z^0. \tag{27}$$

В приведенном ниже утверждении под $f(z)$ может пониматься многочлен (4) или, как будет показано далее, целая функция конечного порядка.

Лемма 2. *Пусть* $f(\zeta_1) = 0$. *Тогда*

1) *если корень* ζ_1 *является единственным ближайшим к точке* z^0, *то при* $s \to +\infty$ *существует предел последовательности* $\left\{\Delta_s^*\left(z^0\right)\right\}$, *определенной формулой* (17), *и выполняется равенство*
$$\lim_{s \to +\infty} \Delta_s^*\left(z^0\right) = -\left(z^0 - \zeta_1\right). \tag{28}$$
Иными словами,
$$\Delta_s^*\left(z^0\right) = -\left(z^0 - \zeta_1\right) + \beta_s, \tag{29}$$
где β_s *— бесконечно малая при* $s \to +\infty$ *и*
$$\beta_s = O\left(\frac{1}{s+1}\right), \quad \text{если} \quad k > 1, \tag{30}$$
$$\beta_s = O\left(\frac{q^{s+1}}{s+1}\right), \quad |q| < 1, \quad \text{если} \quad k = 1; \tag{31}$$

2) *если единственность ближайшего к точке* z^0 *корня нарушена и среди корней, равноудаленных от точки* z^0 *на минимальное расстояние, имеется корень с кратностью, большей суммарной кратности остальных (здесь принято, что это* ζ_1*), то формулы* (28)–(30) *сохраняют силу;*

3) *если последовательность* $\left\{\Delta_s^*\left(z^0\right)\right\}$ *не имеет предела, то можно выделить частичную последовательность* $\left\{\Delta_{s_m}^*\left(z^0\right)\right\}$, *для которой равенства* (28), (29) *сохраняют силу.*

Доказательство. Пусть корень ζ_1 является единственным ближайшим к точке z^0. Тогда (см. (10)) $J_1 = \varnothing$ и $J = J_2$ (в формулах (11) отсутствуют суммы по j_1). Для каждого слагаемого q_j, $j \in J$, входящего в формулу (7), $|q_j| < 1$ и, в силу определения (9), $|q| < 1$. Таким образом, при $k = 1$ выполнены условия первого утверждения леммы 1 и имеет место оценка (18). Объединяя (17), (18) и имея в виду (27), получаем (28), (29) и оценку (31).

Если $k > 1$ ($k \geqslant 2$, $|q| < 1$), то $\left|t_s\left(z^0, \zeta_1\right)\right| \geqslant k - \left|t_s\left(z^0, \zeta_{k+1}\right)q^{s+1}\right| \geqslant \varepsilon = 1$, поскольку $\left|t_s\left(z^0, \zeta_{k+1}\right)q^{s+1}\right| < 1/2$ начиная с некоторого s. Следовательно, выполнены условия второго утверждения леммы 1 и имеет место оценка (20). Объединяя (17), (20) и (27), получаем (28), (29) и оценку (30).

Рассмотрим доказательство второго утверждения. Нарушение единственности ближайшего к точке z^0 корня означает, что $J_1 \neq \varnothing$. Из (11), (12) получаем

$$\left|t_s\left(z^0, \zeta_1\right)\right| \geqslant |k - k_1 - \alpha_s|.$$

Согласно предположению леммы, $k - k_1 \geqslant 1$. Имея в виду $\lim\limits_{s\to+\infty} \alpha_s = 0$ и положив $\varepsilon = 1/2$, находим

$$\left|t_s\left(z^0, \zeta_1\right)\right| \geqslant k - k_1 - \alpha_s \geqslant \varepsilon > 0$$

(начиная с некоторого s).

Таким образом выполнены условия второго утверждения леммы 1, что доказывает (28)–(30).

Обратимся к доказательству третьего утверждения. Примеры показывают, что последовательность $\left\{\Delta_s^*\left(z^0\right)\right\}$ может не иметь предела.

Отметим, что предельное соотношение (28) можно рассматривать как уточнение формулы Коши–Адамара [7] о радиусе сходимости степенного ряда функции (13).

Действительно, функция (13) в окрестности точки z^0 имеет разложение

$$y(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + \ldots + a_s(z - z_0)^s + \ldots. \tag{32}$$

Здесь

$$a_s = \frac{1}{(s)!}\, y^{(s)}\left(z^0\right) = \frac{1}{(s)!}\left(-\frac{f'\left(z^0\right)}{f\left(z^0\right)}\right)^{(s)} \tag{33}$$

(см. (15)). По формуле Коши–Адамара [7], радиус сходимости R степенного ряда (32) выражается формулой

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{s\to+\infty}} \sqrt[s]{|a_s|}}. \tag{34}$$

С другой стороны [7], радиус сходимости степенного ряда (32) определяется расположением особых точек функции (13), ближайших к z^0. Поскольку простой полюс $y(z)$ находится в точке ζ_1, которая является ближайшей к точке z^0, то

$$R = \left|z^0 - \zeta_1\right|. \tag{35}$$

В силу (34), (35) заключаем, что для элементов последовательности (33) существует верхний предел

$$\Lambda = \overline{\lim_{s\to+\infty}} \sqrt[s]{|a_s|}, \quad 0 < \Lambda < \infty. \tag{36}$$

Объединяя (2), (3), (17) и (33), имеем

$$\left|\Delta_s\left(z^0\right)\right| = \left|\Delta_s^*\left(z^0\right)\right| = \left[\frac{1}{(s)!}\left|\left(-\frac{f'\left(z^0\right)}{f\left(z^0\right)}\right)^{(s)}\right|\right]^{-1/(s+1)} = \left(\sqrt[s]{|a_s|}\right)^{-s/(s+1)},$$

или

$$\sqrt[s]{|a_s|} = \left(\left|\Delta_s^*\left(z^0\right)\right|\right)^{-(s+1)/s}. \tag{37}$$

Из (17) и (35)–(37) находим

$$\overline{\lim_{s\to+\infty}} \sqrt[s+1]{\left|t_s\left(z^0, \zeta_1\right)\right|} = 1. \tag{38}$$

Равенство (38) означает существование частичной последовательности, для которой

$$\lim_{s_m\to+\infty} \sqrt[s_m+1]{\left|t_{s_m}\left(z^0, \zeta_1\right)\right|} = 1.$$

Учитывая (25), (26), для этой частичной последовательности имеем $\lim\limits_{s_m\to+\infty} \sqrt[s_m+1]{t_{s_m}\big(z^0,\zeta_1\big)} = 1$, что в силу (17) доказывает утверждение леммы (28), (29).

Замечание 1. Для многочленов, все корни которых действительны ($\operatorname{Im} z^0 = \operatorname{Im} a_j = \operatorname{Im} \zeta_j = 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$, значение $\Delta_s\big(z^0\big) \in \mathbb{R}$), второе и третье утверждения леммы 2 уточняются следующим образом.

Расположение корней относительно точки x^0, нарушающее единственность ближайшего к опорной точке корня ($J_1 \neq \varnothing$), реализуется только тогда, когда опорная точка делит пополам промежуток между соседними корнями, т.е. когда выполняется равенство $\left|x^0-\zeta_1\right| = \left|x^0-\zeta_{k+1}\right|$ (между ζ_1 и ζ_{k+1} нет других корней). Имея в виду, что в рассматриваемом случае для $j_1 \in J_1$ выполнено $q_{j_1} = -1$, из представления (11) получаем

$$t_s\big(x^0,\zeta_1\big) = k^{'} + \sum_{j_2\in J_2} (q_{j_2})^{s+1}, \quad |q_{j_2}| < 1. \tag{39}$$

Здесь

$$k^{'} = \begin{cases} k - k_1, & \text{если} \quad s = 2m, \qquad m = 0, 1, \ldots, \\ k + k_1, & \text{если} \quad s = 2m+1, \quad m = 0, 1, \ldots, \end{cases} \tag{40}$$

k_1 — кратность корня ζ_{k+1}.

Формулы (39), (40) сводят случай $J_1 \neq \varnothing$ к случаю $J_1 = \varnothing$ с "эффективной" кратностью $k^{'}$. Поведение последовательности $\left\{\Delta_s^*\big(x^0\big)\right\}$ определяется соотношением между кратностями корней ζ_{k+1} и ζ_1 (если $k < k_1$, то меняем ζ_{k+1} и ζ_1 местами).

Если $k^{'} \geqslant 1$, то последовательность $\left\{\Delta_s^*\big(x^0\big)\right\}$ сходится и справедливы формулы (28), (29). Когда неравенство строгое, для скорости сходимости имеем оценку (30). Случай $k^{'} = 1$ возможен только тогда, когда $k - k_1 = 1$, и выделяется тем, что частичная последовательность $\left\{\Delta_{2m}^*\big(x^0\big)\right\}$ сходится с оценкой (31), а $\left\{\Delta_{2m+1}^*\big(x^0\big)\right\}$ с оценкой (30).

Если $k^{'} = 0$ (реализуется только тогда, когда $k = k_1$), то последовательность $\left\{\Delta_s^*\big(x^0\big)\right\}$ не является сходящейся. Например, в случае расположения корней симметрично относительно точки x^0 все элементы $t_{2m}\big(x^0,\zeta_1\big) = 0$. Однако если ограничиться частичной последовательностью $\left\{\Delta_{2m+1}^*\big(x^0\big)\right\}$, то соотношения (28)–(30) сохраняют силу.

Далее показано, что леммы 1 и 2 верны для произвольной целой функции конечного порядка.

Известно [7], что для целой функции $f(z)$, имеющей конечный порядок ρ и простые нули в точках последовательности $\{\zeta_j\}$, справедливо представление, обобщающее формулу (10) для многочленов из работы [1]:

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = g(z) + \sum_{j=1}^{\infty}\left[\frac{1}{z-\zeta_j} + P_j^{'}(z)\right] \tag{41}$$

(считаем $f(0) \neq 0$). Здесь $g(z)$, согласно теореме Адамара, многочлен степени не выше, чем $[\rho]$; многочлены $P_j^{'}(z)$, обеспечивающие сходимость ряда, можно брать в виде $P_j^{'}(z) = \dfrac{1}{\zeta_j} + \dfrac{z}{\zeta_j^2} + \ldots + \dfrac{z^{\chi-1}}{\zeta_j^{\chi}}$, где $\chi \leqslant [\tau] \leqslant [\rho]$, τ — показатель сходимости последовательности нулей целой функции порядка ρ; χ — наибольшее целое, для которого ряд $\sum\limits_{j=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{|\zeta_j|^{\chi}}\right)$ расходится. Ряд $\sum\limits_{j=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{|\zeta_j|^{\chi+1}}\right)$ сходится.

Таким образом, степени многочленов $P_j^{'}(z)$ не возрастают бесконечно вместе с j, а сохраняют одно и то же значение. В частном случае, когда $\chi = 0$, эти многочлены можно полагать равными нулю.

Так как ряд (41) равномерно сходится в любом круге $|z| \leqslant R < \infty$ (если не принимать во внимание конечного числа членов ряда, имеющих полюсы внутри круга), то его можно почленно дифференцировать любое число раз. Из (41) получаем формулу, обобщающую (5) на целые функции конечного порядка ρ:

$$Lf(z) = (-1)^{s+1} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(z-\zeta_j)^{s+1}}, \quad s = [\rho]+1, [\rho]+2, \ldots. \tag{42}$$

Полагаем, что элементы последовательности $\{\zeta_j\}$ перенумерованы в порядке неубывающих модулей разности $\left|z^0-\zeta_j\right|$, т. е. $\left|z^0-\zeta_j\right| \leqslant \left|z^0-\zeta_{j+1}\right|$, и $\lim\limits_{j\to+\infty}\left|z^0-\zeta_j\right|=\infty$. Таким образом, как и выше, принято, что корень ζ_1 (кратности k) является ближайшим к опорной точке z^0.

Из (42) следует, что функция $Lf(z)$ обладает свойствами, которые позволяют утверждение лемм 1 и 2 распространить на целые функции конечного порядка. Действительно, для $Lf\left(z^0\right)$ справедливы формулы (6)–(12), где $J=\{k+1,k+2,\ldots\}$. Как и для многочленов, в формуле (10) или $J_1=\varnothing$, или J_1 конечное множество, так как в каждом круге $|z|\leqslant R<\infty$ содержится конечное число нулей $f(z)$. В оценках (12), например для $t_s\left(z^0,\zeta_{k+1}\right)$, имеем

$$\chi_s=\left|\sum_{\substack{j_2\in J_2,\\ |q_{j_2}/q|<1}}\left(\frac{q_{j_2}}{q}\right)^{s+1}\right| \leqslant \left|\sum_{j_2\in J_2'}\left(\frac{q_{j_2}}{q}\right)^{s+1}\right| + \left|r_n(s)\right|,$$

где $\left|\sum\limits_{j_2\in J_2'}\left(\frac{q_{j_2}}{q}\right)^{s+1}\right|$ — частичная сумма ряда и $r_n(s)=\sum\limits_{j_2=n+1}^{\infty}\left(\frac{q_{j_2}}{q}\right)^{s+1}$ — остаток ряда после n-го члена. Так как $\left|r_n(s)\right| \leqslant \sum\limits_{j_2=n+1}^{\infty}\left|\frac{q_{j_2}}{q}\right|^{s+1} \leqslant \sum\limits_{j_2=n+1}^{\infty}\left|\frac{q_{j_2}}{q}\right|^{[\rho]+2}$, то остаток ряда выбором n может быть сделан сколь угодно малым одновременно для всех s (сходимость равномерна по s). Следовательно, по-прежнему χ_s — бесконечно малая величина при $s\to+\infty$ (аналогично α_s), а последовательности $\left\{t_s\left(z^0,\zeta_1\right)\right\}$, $\left\{t_s\left(z^0,\zeta_{k+1}\right)\right\}$ остаются ограниченными.

В силу изложенного, утверждения лемм 1 и 2 распространяются на целые функции конечного порядка.

Далее под $\Delta_s^*\left(z^0\right)$ понимаются элементы последовательности или (не вводя новых обозначений) подпоследовательности, для которых выполняются равенства (28), (29).

Принципиальным для вычисления корня является то, что число $\Delta_s^*\left(z^0\right)$, определенное формулой (17), находится среди $s+1$ чисел (16), которые можно записать в виде

$$\Delta_s^m\left(z^0\right)=\sqrt[s+1]{\frac{1}{Lf\left(z^0\right)}}=\Delta_s^0\left(z^0\right)\cdot e^{i2\pi m/(s+1)},\quad m=0,1,\ldots,s, \tag{43}$$

где $\Delta_s^0\left(z^0\right)$ — главное значение корня.

Иными словами, существует номер $m=m^*\in\{0,1,\ldots,s\}$, нам не известный, для которого $\Delta_s^*\left(z^0\right)=\Delta_s^{m^*}\left(z^0\right)$. Последнее, согласно утверждению (29) леммы 2, равносильно

$$-\left(z^0-\zeta_1\right)+\beta_s=\Delta_s^{m^*}\left(z^0\right),$$

откуда с точностью β_s находим значение корня:

$$\zeta_1+\beta_s=\Delta_s^{m^*}\left(z^0\right)+z^0. \tag{44}$$

Заметим, что справедливы равенства

$$\left|\Delta_s^m\left(z^0\right)\right|=\left|\Delta_s^0\left(z^0\right)\right|=\left|\Delta_s^{m^*}\left(z^0\right)\right|=\left|\Delta_s^*\left(z^0\right)\right|. \tag{45}$$

Пусть

$$z_{ms}=\Delta_s^m\left(z^0\right)+z^0,\quad m=0,1,\ldots,s. \tag{46}$$

Число (44) находится среди чисел (46). Из множества (46) выделим последовательность $\{z_{m_s s}\}$, включив в нее те точки, для которых выполняется равенство

$$\left|f(z_{m_s s})\right|=\min_{m=0,1,\ldots,s}\left|f(z_{ms})\right|. \tag{47}$$

Последовательность $\{z_{m_s s}\}$, определенная формулой (47), обладает следующим свойством.

Теорема. *Если $f(\zeta_1) = 0$ и ζ_1 — единственный ближайший к точке z^0 корень, то последовательность $\{z_{m_s s}\}$ имеет одну предельную точку, которая совпадает с корнем ζ_1, т.е.*

$$\lim_{s\to+\infty} z_{m_s s} = \zeta_1. \tag{48}$$

Доказательство. Из (44), (46), (47) имеем

$$0 \leqslant \bigl|f(z_{m_s s})\bigr| \leqslant \bigl|f(\zeta_1 + \beta_s)\bigr|. \tag{49}$$

Согласно лемме 2, $\lim\limits_{s\to+\infty} \beta_s = 0$. Так как $f(\zeta_1) = 0$, то из (49) следует

$$\lim_{s\to+\infty} \bigl|f(z_{m_s s})\bigr| = 0. \tag{50}$$

Известно [7], что сходимость последовательности модулей $\bigl\{|w_m|\bigr\}$ к нулю является необходимым и достаточным условием сходимости к нулю последовательности комплексных чисел $\{w_m\}$. Таким образом, из (50) получаем $\lim\limits_{s\to+\infty} f(z_{m_s s}) = 0$.

Множество точек (46) ограничено. Действительно, используя (45), приходим к неравенству

$$|z_{ms}| \leqslant \Bigl|\Delta_s^m\bigl(z^0\bigr)\Bigr| + \bigl|z^0\bigr| = \Bigl|\Delta_s^*\bigl(z^0\bigr)\Bigr| + \bigl|z^0\bigr| \underset{s\to\infty}{\longrightarrow} R + \bigl|z^0\bigr|.$$

Так как в силу построения выполнено $\{z_{m_s s}\} \subset \{z_{ms}\}$, то последовательность $\{z_{m_s s}\}$ так же ограничена и по теореме Больцано–Вейерштрасса имеет по крайней мере одну предельную точку z^*. Пусть $\{z_{m_{s_k} s_k}\}$ — это та подпоследовательность, для элементов которой $\lim\limits_{s_k\to+\infty} z_{m_{s_k} s_k} = z^*$. В силу непрерывности рассматриваемой функции имеем $f(z^*) = 0$. Покажем теперь, что предельная точка единственна и совпадает с корнем ζ_1.

Согласно (43), (45), (46) имеем $\bigl|z_{m_{s_k} s_k} - z^0\bigr| = \Bigl|\Delta_{s_k}^*\bigl(z^0\bigr)\Bigr| = \bigl|\zeta_1 + \beta_{s_k} - z^0\bigr|$.

При $s_k \to +\infty$ получаем, что корень z^* удален от точки z^0 на такое же расстояние, как и корень ζ_1. Это противоречит предположению теоремы. Таким образом, предельная точка единственна и совпадает с корнем ζ_1. Теорема доказана.

Замечание 2. Утверждение теоремы справедливо для почти всех точек z^0 комплексной плоскости. Пусть U — множество точек z^0, для которых нарушается требование теоремы о единственности ближайшего к опорной точке z^0 корня. Необходимое (но не достаточное) условие $z^0 \in U$ — это принадлежность z^0 прямой, перпендикулярной к отрезку, соединяющему два корня, и проходящей через его середину. Так как для многочлена количество таких прямых конечно, а для целой функции конечного порядка не более чем счетно, то мера множества U равна нулю.

Если $J_1 \neq \varnothing$, т.е. единственность ближайшего к точке z_0 корня нарушена, то нельзя утверждать единственности предельной точки последовательности $\{z_{m_s s}\}$. Однако сохраняет силу утверждение, что предельная точка этой последовательности дает корень уравнения (соответствующий пример дан ниже). Таким образом, изложенный метод действительно является глобально сходящимся.

В реализации предложенного метода может быть полезно следующее свойство оператора L (см. (3)):

$$L\biggl(\frac{f}{\varphi}\biggr) = Lf - L\varphi. \tag{51}$$

Выбрав в качестве φ многочлен с корнями уравнения $f = 0$, можно сократить объем вычислений за счет уменьшения количества опорных точек. Это показано ниже на примере отыскания корней функции $f(z) = e^z - z$. Формулы (5), (51) упрощают вычисление значений $L(f/\varphi)$.

Алгоритм, реализующий рассмотренный метод, включает в себя три шага.

1. Выбор опорной точки z^0 (термин обусловлен тем, что эта точка может не изменяться в процессе вычисления корня). Предложенный метод не требует привлечения других методов для определения границ расположения корней. По ходу вычислений находится оценка радиуса сходимости разложения (32). Таким образом очерчивается круг с центром в z^0, внутри которого нет других корней. Выбираем опорную точку z^0, соблюдая условие $z^0 \notin U$ (см. замечание 2).

Если уравнение имеет корни, которые являются комплексно-сопряженными числами, то действительная ось (или ее часть) принадлежит множеству U. Для таких уравнений следует использовать опорные точки с $\operatorname{Im} z^0 \neq 0$.

Если требуется уточнить значение корня ζ_k, найденного по опорной точке z^0, путем изменения z^0, то выполняем пересчет по формуле

$$z^0 := z^0 + \lambda\big(\zeta_k - z^0\big). \tag{52}$$

Действительное число λ выбираем так, что новое значение z^0 попадает в окрестность приближенного корня ζ_k, но не выходит из круга сходимости разложения (32), т. е. полагаем $0 < \lambda < 1$. Далее возможно применение известных локальных методов или переход к шагу 2, который в таком случае выполняем с привлечением производных меньшего порядка (с меньшим значением s).

2. Определение возможных направлений и расстояния до ближайшего к опорной точке корня. Вычисляем производные $f^{(j)}\big(z^0\big)$, $j = 0, 1, \ldots, s+1$. Использование производных высшего порядка — плата за глобальную сходимость метода. По рекуррентной формуле (14) находим $y^{(s)}\big(z^0\big)$ и по формуле (15) находим $Lf\big(z^0\big)$. Извлекая корень (43), получаем вершины $\Delta_s^m\big(z^0\big)$, $m = 0, 1, \ldots, s$, правильного $s+1$-угольника, вписанного в окружность радиуса $\Big|\Delta_s^0\big(z^0\big)\Big|$. Вершины многоугольника z_{ms}, $m = 0, 1, \ldots, s$, с центром, сдвинутым согласно (46), указывают направления на искомый корень, а величина $\Big|\Delta_s^0\big(z^0\big)\Big|$ (см. (45), (46)) является оценкой расстояния от опорной точки до корня. Круг радиуса $\Big|\Delta_s^0\big(z^0\big)\Big|$ не содержит других корней.

3. Отыскание ближайшего к опорной точке корня. Следуя формуле (47), перебираем найденные вершины правильного многоугольника (46) и получаем приближенное значение корня ζ_k. Если $\big|f(\zeta_k)\big|$ отличается от нуля менее чем на заданную величину, то вычисление корня ζ_k закончено. Если требуется уточнить значение корня ζ_k, то возможны два варианта действий. Первый — переход к шагу 2 и использование производных более высокого порядка (итерации по s) для получения необходимой точности. Второй вариант подразумевает переход к шагу 1 и пересчет опорной точки по формуле (52).

Численные эксперименты подтверждают теоретические результаты. Первый пример иллюстрирует особенности метода, когда опорная точка $z^0 \in U$.

Многочлен z^3+1 имеет корни $\zeta_1 = -1$, $\zeta_{2,3} = 1/2 \pm i\sqrt{3}/2$. Множество U составляют точки трех лучей $z = \lambda_i\zeta_i$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $\lambda_i \leqslant 0$, $i = 1, 2, 3$. При $\lambda_i = 0$, $i = 1, 2, 3$, получаем опорную точку $z^0 = 0$, которая равноудалена от всех корней. Формула (6) дает $Lf(0) = (-1)^{s+1}t_s(0, -1)$, где

$$t_s(0,-1) = 1 + (-1)^{s+1} 2\cos\left[(s+1)\,\frac{\pi}{3}\right]. \tag{53}$$

Последовательность $\big\{\Delta_s^*(0)\big\}$, построенная по формуле (17), не имеет предела, так как из (53) следует, что $t_{6k}(0,-1) = 0$. Однако можно выделить сходящиеся подпоследовательности. Например, $t_{6k-1}(0,-1) = 3$ и для подпоследовательности $\big\{\Delta_{6k-1}^*(0)\big\}$ справедливы формулы (28), (29). Условие (47) для каждого значения k дает три точки

$$z_{k,6k-1} = \sqrt[6k]{\frac{1}{3}}\cdot e^{i\pi/3}, \quad z_{3k,6k-1} = \sqrt[6k]{\frac{1}{3}}\cdot e^{i\pi}, \quad z_{5k,6k-1} = \sqrt[6k]{\frac{1}{3}}\cdot e^{i5\pi/3},$$

в которых модуль функции имеет минимальное значение, равное $1 - \sqrt[2k]{1/3}$. Таким образом, последовательность $\{z_{m_s s}\}$ имеет в рассматриваемом случае три предельные точки, причем

$$z_{k,6k-1} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} e^{i\pi/3} = \zeta_2, \quad z_{3k,6k-1} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} e^{i\pi} = \zeta_1, \quad z_{5k,6k-1} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} e^{i5\pi/3} = \zeta_3.$$

Все три корня вычисляются с одинаковой точностью, которая определяется поведением модуля $\sqrt[6k]{1/3}$. Например, при $s = 6k-1 = 6\times 5 - 1 = 29$ имеем $\big|f(z_{5,29})\big| = 1.04\times 10^{-1}$.

Изменив опорную точку, приняв $z^0 = 0.1 + i\cdot 0.1$, мы делаем корень ζ_2 единственным ближайшим к этой точке и попадаем в условия теоремы. При том же значении $s = 29$ находим приближенное значение корня $z_{5,29} = 0.499888 + i0.866031$, для которого $\big|f(z_{5,29})\big| = 3.36\times 10^{-4}$, что согласуется с оценкой (31).

Второй пример демонстрирует использование алгоритма для отыскания первых 10 корней (наименьших по модулю) целой функции $f(z) = e^z - z$. Результаты расчетов сведены в табл. 1 и 2. Во второй таблице представлены приближенные значения корней, которые найдены по более рациональной схеме, использующей исключение вычисленного корня и формулу (51).

Остановимся на структуре первой таблицы. В столбцах 2–4 соседние по вертикали ячейки (назовем их верхняя и нижняя) объединены одним номером опорной точки, который находится в первом столбце.

Так как выбор опорной точки наиболее тесно связан со спецификой уравнения, то опишем более подробно реализацию первого шага алгоритма (заполнение второго столбца). В верхние ячейки выведены

Таблица 1

Первые десять корней функции $f(z) = e^z - z$

№ n	Опорная точка $z_{n+1} = z_n + iR_n$, $z^0 := z_{n+1}$ / для уточнения корня $z^0 = z^0 + \lambda(\zeta_k - z^0)$	Корень ζ_k приближенный / уточненный	Значение $\lvert f(\zeta_k)\rvert$ на приближ. / на уточнен.	Оценка радиуса сходимости R_n
1	$i0.01$	$0.211\,001 + i1.356\,885$	1.59×10^{-1}	$R_1 = \lvert z_1 - \zeta_1\rvert$
	$0.15 + i0.95$	$0.318\,132 + i1.337\,238$	3.96×10^{-6}	1.36
2	$i2.66$	На границе круга 2 корень ζ_1	1.28×10^{-6}	$R_2 = \lvert z_2 - \zeta_1\rvert$ 1.36
3	$i4.03$	На границе круга 3 корень ζ_1	3.58×10^{-3}	$R_3 = \lvert z_3 - \zeta_1\rvert$ 2.71
4	$i6.74$	$2.062\,287 + i7.588\,624$	9.17×10^{-5}	$R_4 = \lvert z_4 - \zeta_2\rvert$
	без уточнения	$2.062\,287 + i7.588\,624$	9.17×10^{-5}	2.23
5	$i8.97$	На границе круга 5 корень ζ_2	2.00×10^{-4}	$R_5 = \lvert z_5 - \zeta_2\rvert$ 2.48
6	$i11.45$	$2.672\,130 + i13.910\,745$	6.07×10^{-1}	$R_6 = \lvert z_6 - \zeta_3\rvert$
	$2.14 + i13.42$	$2.653\,193 + i13.949\,208$	9.50×10^{-6}	3.64
7	$i15.10$	На границе круга 7 корень ζ_3	1.26×10^{-3}	$R_7 = \lvert z_7 - \zeta_3\rvert$ 2.89
8	$i17.99$	$2.997\,382 + i20.276\,226$	4.67×10^{-1}	$R_8 = \lvert z_8 - \zeta_4\rvert$
	$2.40 + i19.82$	$3.020\,240 + i20.272\,458$	1.41×10^{-6}	2.79
9	$i21.77$	На границе круга 9 корень ζ_4	1.56×10^{-2}	$R_9 = \lvert z_9 - \zeta_4\rvert$ 3.37
10	$i25.15$	$3.289\,488 + i26.581\,230$	5.02×10^{-2}	$R_{10} = \lvert z_{10} - \zeta_5\rvert$
	$2.63 + i26.29$	$3.287\,769 + i26.580\,471$	9.29×10^{-7}	3.59
11	$i28.73$	На границе круга 11 корень ζ_5	2.79×10^{-6}	$R_{11} = \lvert z_{11} - \zeta_5\rvert$ 3.93
12	$i32.66$	$3.498\,343 + i32.880\,644$	6.23×10^{-3}	$R_{12} = \lvert z_{12} - \zeta_6\rvert$
	$2.80 + i32.84$	$3.498\,515 + i32.880\,721$	9.25×10^{-7}	3.51
13	$i37.17$	$3.690\,374 + i39.177\,077$	7.11×10^{-1}	$R_{13} = \lvert z_{13} - \zeta_7\rvert$
	$2.95 + i38.78$	$3.672\,450 + i39.176\,440$	5.03×10^{-6}	4.19
14	$i41.35$	На границе круга 14 корень ζ_7	7.67×10^{-1}	$R_{14} = \lvert z_{14} - \zeta_7\rvert$ 4.27
15	$i45.62$	$3.820\,399 + i45.469\,248$	7.10×10^{-3}	$R_{15} = \lvert z_{15} - \zeta_8\rvert$
	$3.06 + i45.50$	$3.820\,554 + i45.469\,265$	2.76×10^{-6}	3.82
16	$i49.45$	$3.996\,408 + i51.731\,064$	2.93×10^{0}	$R_{16} = \lvert z_{16} - \zeta_9\rvert$
	$3.20 + i51.27$	$3.949\,523 + i51.760\,122$	1.43×10^{-5}	4.58
17	$i54.02$	На границе круга 17 корень ζ_9	1.77×10^{0}	$R_{17} = \lvert z_{17} - \zeta_9\rvert$ 4.55
18	$i58.58$	$4.063\,281 + i58.049\,207$	3.42×10^{-2}	$R_{18} = \lvert z_{18} - \zeta_{10}\rvert$
	$3.25 + i58.15$	$4.063\,742 + i58.049\,573$	6.51×10^{-6}	4.10

значения опорных точек, выбор которых описан ниже. Если нет необходимости в уточнении корня (или алгоритм указывает на уже найденный корень), то нижние ячейки в столбцах 2–4 объединяются с верхними. Если найден новый корень и требуется его уточнение, то выполняется пересчет опорной точки по формуле (52) и полученное число помещается в нижнюю ячейку.

Анализ показывает, что корни функции $f(z)$ расположены в правой полуплоскости. Так как число $\bar{\zeta}_k$, сопряженное к корню ζ_k, само является корнем, то точки действительной оси принадлежат множеству U. Поэтому последовательность опорных точек z_n, $n = 1, 2, \ldots$, выбрана на мнимой оси. Каждая следующая опорная точка находится как точка пересечения окружности, являющейся границей круга сходимости, и мнимой оси

$$z_{n+1} = z_n + iR_n. \tag{54}$$

Здесь $R_n = |z_n - \zeta_k|$, где ζ_k — корень, найденный на предыдущем шаге (шагах); номер круга совпадает с номером опорной точки. Сдвиг опорной точки на границу круга сходимости обеспечивает пересечение каждого следующего круга сходимости с предыдущим, что исключает пропуск корней.

Поскольку можно ограничиться поиском корней в первой координатной четверти, то принято $z_0 = 0$, $R_0 = 10^{-2}$. Тогда первая опорная точка $z^0 = z_1 = iR_0$. Далее используются формулы (52), (54), (55). Для отыскания 10 корней потребовалось 18 опорных точек.

Исключения сделаны для точек z_2, z_{13}. Из формулы (54) и данных табл. 1 следует $R_2 = |z_2 - \zeta_1| = 0.32$, т. е. $R_2 \ll R_1$. Поэтому точка z_2 сдвинута вверх по мнимой оси:

$$z_2 = z_1 + i2\bigl(\operatorname{Im}(\zeta_1) - |z_1|\bigr), \tag{55}$$

что обеспечивает равенство $R_2 = |z_2 - \zeta_1| = R_1$ и пересечение кругов 1, 2. Если в круге два нет новых корней, то алгоритм снова укажет на корень ζ_1, что и наблюдается в расчете.

Следует отметить, что для всех опорных точек, кроме $z^0 = z_1$ и $z^0 = z_{13}$, $\bigl|f(\zeta_k)\bigr|$ на порядок и более меньше значений модуля функции в других вершинах многоугольника (46). Особенность, наблюдаемая для z_1, обусловлена близостью z_1 к точке $z^0 = 0$, которая равноудалена от двух корней ζ_1 и $\bar{\zeta}_1$ (см. первый пример). Особенность, связанная с z_{13}, имеет аналогичную причину. Формула (54) дает значение $z^0 = z_{13}$, для которого $q = \dfrac{\bigl|z^0 - \zeta_7\bigr|}{\bigl|z^0 - \zeta_6\bigr|} = 9.88 \times 10^{-1}$ (см. (9)). В силу этого точка z_{13} сдвинута на единицу вверх по мнимой оси (уменьшаем q). Это не является принципиальным (z_1 сдвинута на 0.01), но позволяет более четко выделить минимум (47). Так как пересечение кругов 12, 13 — непустое множество, то потери корней не происходит. В силу оценки (31) заключаем, что если значение q близко к единице, то вычисление корня с малой погрешностью требует привлечения производных высокого порядка (больших s). В табл. 1 даны приближенные значения корней, вычисленные для $s = 10$.

Шаг 2 алгоритма выполнен для каждой опорной точки один раз с фиксированным значением порядка высшей производной s. Вычисления этого шага являются промежуточными и не отражены в таблице. Они используются как исходные данные третьего шага, результаты которого представлены в 3 и 4 столбцах.

Верхние ячейки столбцов 3 и 4 содержат приближенные значения корней ζ_k и $\bigl|f(\zeta_k)\bigr|$, вычисленные при $s = 10$. В нижние ячейки столбцов 3, 4 выведены уточненные по второму варианту (см. описание третьего шага алгоритма) значения ζ_k и $\bigl|f(\zeta_k)\bigr|$. В формуле (52) использовано $\lambda = 0.8$ (для первого корня $\lambda = 0.7$). Шаги 2, 3 алгоритма выполнены для пересчитанных опорных точек с $s = 5$.

Ячейки пятого столбца содержат оценки радиуса круга сходимости. Эти ячейки привязаны к номеру опорной точки и не разделяются на верхнюю и нижнюю.

Вычисления, проделанные для заполнения табл. 1, демонстрируют самодостаточность предложенного метода. Наряду с результатами, представленными в табл. 1, проведены вычисления по методу Ньютона, когда каждая опорная точка принималась за начальное приближение корня. Для точек z_1, z_8, z_{13}, z_{14}, z_{16}, z_{17} итерации прерваны на 2-6 шаге из-за обращения в нуль первой производной. Точка z_{10} привела к переполнению разрядной сетки, а точки z_6, z_{12}, z_{18} не показали сходимости за 25 итераций. И только 8 точек из 18 дали сходимость к корням ζ_1 и ζ_2.

От начальных приближений z_2, z_3, z_5, z_9, z_{11}, z_{15} метод Ньютона сошелся к корню ζ_1: для первых пяти точек в среднем за 8 итераций, а для последней за 26 итераций. За 5 и 21 итерацию найден корень ζ_2 соответственно для начальных приближений z_4, z_7.

Однако метод Ньютона эффективен, если его использовать для уточнения приближенных корней из верхних ячеек третьего столбца. Тогда в качестве начальных приближений принимаются опорные точки из нижних ячеек второго столбца. Вычисления показывают, что каждый из 10 корней в среднем за пять итераций уточняется до значений $\bigl|f(\zeta_k)\bigr|$, приведенных в нижних ячейках четвертого столбца.

На пяти итерациях метод Ньютона использует значения функции и ее первой производной, которые вычисляются в пяти различных точках, т.е. 10 величин.

Уточненные значения корней в первой таблице получены при $s = 5$. Это требует вычисления производных до 6 порядка включительно в одной, фиксированной точке z^0. Так как для рассматриваемой функции $f^{(j)}(z^0) = f^{(1)}(z^0) + 1$, $j \geqslant 2$, то фактически вычисляются две величины. Еще 6 величин $y^{(0)}(z^0), \dots, y^{(5)}(z^0)$ находим по рекуррентной формуле (14). Итого 8 величин.

Иными словами, даже тогда, когда метод Ньютона используется для уточнения уже локализованных корней, простота его итерационной функции не гарантирует безусловного преимущества по вычислительным затратам. Однако если затраты на вычисление высших производных велики, то метод Ньютона как метод повышения точности будет предпочтительней.

Таблица 2

Приближенные корни модифицированной функции

№ n	Опорная точка $z_{n+1} = z_n + i(R_n + \delta_n)$, $z^0 := z_{n+1}$	Корень ζ_n приближенный	Значение $\lvert\Phi(\zeta_n)\rvert$ на приближ.	Оценка радиуса сходимости $R_n = \lvert z_n - \zeta_n\rvert$
1	$i0.01$	$0.211\,001 + i1.356\,885$	1.59×10^{-1}	1.36
2	$i2.66$	$0.211\,001 + i1.356\,885$	4.42×10^{-3}	5.34
3	$i10.00$	$2.674\,168 + i13.963\,373$	5.61×10^{-2}	4.76
4	$i15.76$	$3.054\,329 + i20.231\,249$	1.76×10^{-1}	5.43
5	$i22.19$	$3.278\,649 + i26.533\,215$	2.04×10^{-1}	5.49
6	$i28.67$	$3.468\,154 + i32.853\,806$	2.10×10^{-1}	5.47
7	$i35.15$	$3.637\,149 + i39.169\,483$	2.21×10^{-3}	5.45
8	$i41.60$	$3.788\,204 + i45.477\,476$	2.37×10^{-1}	5.44
9	$i48.04$	$3.923\,645 + i51.778\,806$	2.59×10^{-1}	5.43
10	$i54.46$	$4.045\,655 + i58.074\,904$	2.84×10^{-1}	5.42

Из табл. 1 следует, что восемь опорных точек z_2, z_3, z_5, z_7, z_9, z_{11}, z_{14}, z_{17} не ведут к новым корням, так как на границе соответствующего круга сходимости расположен уже найденный корень. Изменив применительно к формуле (51) функцию $f(z)$, можем избежать этих восьми вспомогательных шагов. Результаты расчетов с использованием модифицированных функций представлены в табл. 2. Отыскав первый корень ζ_1 выше описанным способом, исключаем его из вычислений значения ζ_2, переходя к функции $\Phi(z) = \dfrac{f(z)}{(z-\zeta_1)(z-\bar{\zeta}_1)}$. По формулам (5), (51) имеем

$$L\Phi(z_2) = Lf(z_2) - (-1)^{s+1}\left[\frac{1}{(z_2-\zeta_1)^{s+1}} + \frac{1}{\left(z_2-\bar{\zeta}_1\right)^{s+1}}\right].$$

Ближайшим к точке z_2 корнем функции $\Phi(z)$ оказывается ζ_2. Если вычислен корень ζ_n, $n \geqslant 2$, то приближенное значение ζ_{n+1} находим, рассматривая измененную функцию $\Phi(z) = \dfrac{f(z)}{z-\zeta_n}$, для которой

$$L\Phi(z_{n+1}) = Lf(z_{n+1}) - (-1)^{s+1}\frac{1}{(z_{n+1}-\zeta_n)^{s+1}}. \tag{56}$$

Следует обратить внимание на возможную потерю точности при использовании формулы (56). Согласно (54) получаем $z_3 = i8.00$. Точка $z^0 = z_3$ оказывается удаленной от корней ζ_1, ζ_3 на близкие расстояния. Значение $q = \dfrac{\lvert z^0-\zeta_3\rvert}{\lvert z^0-\zeta_1\rvert} = 9.76 \times 10^{-1}$. Подобная ситуация наблюдалась при заполнении табл. 1 для точек z_1, z_{13}. По этой причине было использовано $s = 10$. Здесь такой подход не возможен, так как ведет к недопустимой потере точности. Действительно, в силу (42) основной вклад в величину $Lf(z_3)$ дают слагаемые $\dfrac{1}{(z_3-\zeta_1)^{s+1}}$ и $\dfrac{1}{(z_3-\zeta_3)^{s+1}}$. Например, при $s = 9$ действительные и мнимые части этих величин на пять порядков меньше, чем у вычитаемого в формуле (56). Эта разница в порядках растет вместе с s.

Таким образом, значение $L\Phi(z_3)$ находится как результат вычитания двух “больших” близких чисел, что ведет к потере точности.

Чтобы избежать использования больших s, изменим формулу (54). Точки z_1, z_2 совпадают с таковыми в табл. 1, а для $n \geqslant 2$ принято $z_{n+1} = z_n + i(R_n + \delta_n)$, где $\delta_2 = 2$ и $\delta_n = 1$ для $n > 2$.

Такой выбор опорных точек позволяет ограничиться величиной $s = 5$. Иными словами, для каждой опорной точки табл. 2 алгоритм один раз выполняет шаги 2 и 3 с фиксированным значением $s = 5$ и находит приближенные значения корней ζ_n, которые помещаются в таблицу. Для всех опорных точек величина $\left|\Phi(\zeta_n)\right|$ на порядок и более меньше значений модуля функции в других вершинах многоугольника (46). Уточнение корней выполнены для функции $f(z)$ способом, описанным при заполнении табл. 1. Так как вычисленные корни приведены в табл. 1, то в табл. 2 представлены только опорные точки, приближенные значения корней ζ_n, $\left|\Phi(\zeta_n)\right|$ и радиус сходимости R_n.

Подводя итог, можно отметить следующее. Глобальная сходимость рассмотренного метода обеспечена тем, что для корня ζ_1, ближайшего к опорной точке z^0, получено явное представление $s+1$ степени выражения $\left(\zeta_1 - z^0 + \beta_s\right)$ в виде рациональной дроби от значения функции и ее производных в опорной точке (β_s — бесконечно малая при $s \to +\infty$). Метод можно использовать как для отыскания корней целых функций конечного порядка с требуемой точностью, так и для их локализации с последующим уточнением известными локальными методами.

Так как вычисляется корень, который является ближайшим к опорной точке, то тем самым находится круг (с центром в опорной точке), внутри которого нет других корней. Поэтому предложенный метод может быть использован в вопросах анализа устойчивости линейных систем и стационарности временны́х рядов, где требуется решение задачи дихотомии корней характеристического полинома единичной окружностью.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Громов А.Н.* Об одном подходе к построению одноточечных итерационных методов для решения нелинейных уравнений одного переменного // Вычислительные методы и программирование. 2015. **16**. 298–306.
2. *Громов А.Н.* О расширении промежутка сходимости одного обобщения метода Ньютона для решения нелинейных уравнений // Вычислительные методы и программирование. 2016. **17**. 7–12.
3. *He W., Prabhu N.* A globally convergent method for finding zeros of smooth functions // Applied Mathematics and Computation. 2002. **133**. N 2–3. 327–335.
4. *Березин И.С., Жидков Н.П.* Методы вычислений. Т. 1. М.: Наука, 1966.
5. *Бибердорф Э.А.* Критерий дихотомии корней полинома единичной окружностью // Сибирский журнал индустриальной математики. 2000. **3**, № 1. 16–32.
6. *Малашонок Г.И., Бетин А.А.* Вычисление комплексных корней полиномов // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. 2008. **13**, № 1. 138–141.
7. *Маркушевич А.И.* Теория аналитических функций. Т. 1,2. М.: Наука, 1967.

Поступила в редакцию
3.10.2016

A Globally Convergent Method for Finding Zeros of Integer Functions of Finite Order

A. N. Gromov [1]

[1] *Moscow State Institute of International Relations at Odintsovo, Faculty of Economics; ulitsa Novo-Sportivnaya 3, Odintsovo, Moscow Region, 143007, Russia; Associate Professor, e-mail: an_gromov@rambler.ru*

Received October 3, 2016

Abstract: A method for finding zeros of integer functions of finite order is proposed. This method converges to a root starting from an arbitrary initial point and, hence, is globally convergent. The method is based on a representation of higher-order derivatives of the logarithmic derivative as a sum of partial fractions and reduces the finding of a root to the choice of the minimum number from a finite set. The rate of convergence is estimated.

Keywords: global convergence, logarithmic derivative, higher-order derivative, partial fractions, Cauchy–Hadamard formula.

References

1. A. N. Gromov, "An Approach for Constructing One-Point Iterative Methods for Solving Nonlinear Equations of One Variable," Vychisl. Metody Programm. **16**, 298–306 (2015).

2. A. N. Gromov, "Increasing the Interval of Convergence for a Generalized Newton's Method of Solving Nonlinear Equations," Vychisl. Metody Programm. **17**, 7–12 (2016).

3. W. He and N. Prabhu, "A Globally Convergent Method for Finding Zeros of Smooth Functions," Appl. Math. Comput. **133** (2–3), 327–335 (2002).

4. I. S. Berezin and N. P. Zhidkov, *Computing Methods* (Nauka, Moscow, 1966; Oxford, Pergamon, 1965).

5. E. A. Biberdorf, "A Criterion for the Dichotomy of Roots of a Polynomial on the Unit Circle," Sib. Zh. Ind. Mat. **3** (1), 16–32 (2000).

6. G. I. Malashonok and A. A. Betin, "Computing of Complex Roots of Polynomials," Vestn. Tambov Univ., Ser.: Estestv. Tekh. Nauki **13** (1), 138–141 (2008).

7. A. I. Markushevich, *The Theory of Analytic Functions* (Nauka, Moscow, 1967; Chelsea, New York, 1977).