

УДК 517.97; 539.376

doi 10.26089/NumMet.v17r324

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ МНОГОТОЧЕЧНОГО ФОРМООБРАЗОВАНИЯ В РЕЖИМЕ ПОЛЗУЧЕСТИ С ПОМОЩЬЮ РЕКОНФИГУРИРУЕМОГО УСТРОЙСТВА

К. С. Бормотин<sup>1</sup>, С. В. Бельх<sup>2</sup>, Вин Аунг<sup>3</sup>

Математическая формулировка обратных задач формообразования в режиме ползучести на реконфигурируемой штыревой машине основана на построении функционалов прямых и обратных экстремальных квазистатических задач формообразования деталей с учетом контактных условий с оснасткой. Построен итерационный метод расчета перемещений стержней матриц формблока, обеспечивающих заданную остаточную кривизну панели. Численные решения задач достигаются методом конечных элементов в системе MSC.Marc. Показана сходимость метода на примере формообразования панели.

**Ключевые слова:** обратные задачи формообразования, контактные условия, вариационные уравнения, сходимость, метод конечных элементов, итерационный метод, многоточечная формовка.

**1. Введение.** Как известно [1–6], формообразование деталей в режиме ползучести под воздействием напряжений, не превосходящих предела упругости материала, обеспечивает детали более высокий остаточный прочностной ресурс и меньшую поврежденность по сравнению с обычной холодной штамповкой. Поэтому решения технологических задач формообразования изделий в режиме ползучести имеют перспективность использования в процессах изготовления ответственных конструкций в отечественном и зарубежном авиастроении [7, 8].

При моделировании процессов изготовления деталей в области пластического деформирования при медленных высокотемпературных режимах определяются прямые и обратные задачи формообразования, разрабатываются математические формулировки задач, строятся методы решения [9–12].

Существующие решения формообразования крупногабаритных плит из высокопрочных сплавов, основанные на многоэтапных процессах формовки и/или штамповке в нескольких штампах, имеют ограничения по прессовому оборудованию, по габаритам и нагрузкам, а также по высокой стоимости штампов. В последнее время в качестве перспективного решения этой задачи рассматривается формование изделий из листов и панелей с помощью реконфигурируемого стержневого пуансона (матрицы), позволяющего изменять форму заготовки [13–16]. Данное устройство формования включает штыревую оснастку, которая состоит из рабочих органов и их приводов, расположенных снаружи камеры формования. Штыревая оснастка задает формующую поверхность верхней и нижней матриц. Матрицы образованы двумя системами соосно расположенных стержней, каждый из которых выставляется в индивидуальную позицию посредством числового программного управления и позволяет адаптировать оснастку для изготовления деталей различной конфигурации. В идеальной конструкции стержни не должны изгибаться и смещаться относительно друг друга, так как это приводит к разрушению самого устройства. В этой связи анализируются и предлагаются различные варианты реконфигурируемых устройств в зависимости от силового воздействия на заготовку, формы и способов закрепления стержневых элементов [15, 16].

В первую очередь, для формовки данной технологией с помощью штыревой оснастки необходимо знать закон перемещения каждого стержня, задающий упреждающую форму панели. Упреждающая форма панели должна обеспечивать заданную остаточную кривизну панели после ее освобождения. В [17] проведен конечно-элементный анализ пружинения в сравнении с экспериментальными данными для пластин из алюминиевых сплавов. Для реконфигурируемых устройств анализируется влияние взаимного

<sup>1</sup> Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет (ФГБОУ ВПО «КнАГТУ»), Институт компьютерного проектирования машиностроительных технологий и оборудования, просп. Ленина, 27, 681013, Хабаровский край, г. Комсомольск-на-Амуре; доцент, e-mail: cvmi@knastu.ru

<sup>2</sup> Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет (ФГБОУ ВПО «КнАГТУ»), просп. Ленина, 27, 681013, Хабаровский край, г. Комсомольск-на-Амуре; проректор по науке и инновационной работе, доцент, e-mail: prnir@knastu.ru

<sup>3</sup> Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет (ФГБОУ ВПО «КнАГТУ»), факультет компьютерных технологий, просп. Ленина, 27, 681013, Хабаровский край, г. Комсомольск-на-Амуре; аспирант, e-mail: cvmi@knastu.ru

расположения стержней на величину упругого отклика [18]. Таким образом, величина отклонения панели при разгрузке зависит от температурного режима формовки, свойства материала и способа деформирования. Варьируя эти параметры, можно уменьшить такие отклонения, но не исключить их. В связи с этим возникает обратная задача: определить перемещения стержней, создающих такую упреждающую кривизну панели, которая обеспечивает заданную остаточную форму панели после разгрузки. Ранее в работах [11, 12] была сформулирована обратная задача формообразования и построен итерационный метод решения относительно неизвестных перемещений точек поверхности панели, задающей упреждающую кривизну. Однако в сравнении с заданием формы панели контактными жесткими штампами остаточные отклонения будут различными [19]. Таким образом, в модели обратной задачи формообразования необходимо добавить контактные условия, исключающие проникновение жесткого тела в деформируемое. Наиболее часто для учета контактных ограничений используются метод множителей Лагранжа или метод штрафа [20], поэтому в настоящей статье рассматриваются потенциалы, полученные данными способами.

**2. Формулировка обратной задачи с учетом контактных ограничений.** Для упрощения выводов в формулировках обратных задач формообразования в режиме ползучести рассматриваются бесконечно малые деформации и упругая разгрузка. Полученные результаты могут быть легко обобщены на случаи геометрической и физической нелинейности [11, 12, 19]. Пусть  $V \subset R^3$  — ограниченная область с достаточно регулярной границей  $S$ . Контактная поверхность жестких тел (штампов) с деформируемым телом обозначается через  $S_c$  ( $S_c \subset S$ ). Ниже в статье используются пространства Соболева со стандартными обозначениями норм. Обозначим через  $u = (u_1, u_2, u_3)$ ,  $\tilde{u} = (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3)$  и  $\bar{u} = (\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3)$  векторы текущих, остаточных перемещений деформируемого тела и перемещений контактных тел, при этом  $u, \tilde{u} \in [W_2^1(Q)]^3$ ,  $\bar{u} \in [W_2^1(Q_c)]^3$ ,  $Q = V \times [0 \leq t \leq T]$ ,  $Q_c = S_c \times [0 \leq t \leq T]$ . Точкой сверху обозначаются скорости перемещений  $\dot{u}, \dot{\tilde{u}}, \dot{\bar{u}}$ . Скалярное произведение в  $L_2(S)$  имеет вид  $(\cdot, \cdot)_S: (u, v)_S = \int_S \sum_{i=1}^3 u_i v_i dS$ .

Обратная задача кинематического формообразования контактными жесткими штампами формулируется в виде квазистатического вариационного принципа с функционалом [11, 12]

$$J(\dot{u}, \dot{\tilde{u}}, \dot{\bar{u}}) = \frac{1}{2\varepsilon_1} \|\dot{\bar{u}} - \dot{\tilde{u}}^*\|_{S_c}^2 + W_c + a(\dot{u}, \dot{u}) + a(\dot{\tilde{u}}, \dot{\tilde{u}}) + \frac{1}{2\varepsilon_2} \|\dot{\tilde{u}} - \dot{\tilde{u}}^*\|_S^2, \quad \varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0, \varepsilon_1 \rightarrow 0, \varepsilon_2 \rightarrow 0, \quad (1)$$

где

$$W_c = - \int_{S_c} [\dot{p} \cdot (\bar{u} - u) + p \cdot (\dot{\bar{u}} - \dot{u})] dS \quad (2)$$

либо

$$W_c = \int_{S_c} \left[ \frac{1}{\varepsilon_n} g_n \dot{g}_n + \frac{1}{\varepsilon_t} g_t \dot{g}_t \right] dS, \quad \varepsilon_n > 0, \varepsilon_t > 0, \varepsilon_n \rightarrow 0, \varepsilon_t \rightarrow 0. \quad (3)$$

Здесь  $p$  — вектор поверхностных контактных сил, действующих на  $S_c$ ;  $g_n = n \cdot (\bar{u} - u)$ ;  $\dot{g}_n = n \cdot (\dot{\bar{u}} - \dot{u})$  — нормальный перехлест (взаимное проникновение по нормали к границе  $S_c$ ) контактирующих частиц и его скорость;  $g_t = \tau \cdot (\bar{u} - u)$ ;  $\dot{g}_t = \tau \cdot (\dot{\bar{u}} - \dot{u})$  — касательный перехлест и его скорость;  $n$  — единичный вектор нормали к контактной поверхности;  $\tau$  — единичный касательный вектор к контактной поверхности;  $\dot{\tilde{u}}^*$ ,  $\dot{\tilde{u}}^*$  — заданные остаточные скорости перемещений тела и текущие контактные скорости перемещений в момент времени  $t$ ;  $t \in [0, T]$  — время деформирования тела под нагрузкой. Для случая бесконечно малых деформаций потенциальные формы определяются в виде [21]

$$a(\dot{u}, \dot{v}) = \int_V \frac{\partial W(\dot{\varepsilon}_{ij}(\dot{u}))}{\partial \dot{\varepsilon}_{ij}(\dot{u})} \dot{\varepsilon}_{ij}(\dot{v}) dV, \quad a(\dot{\tilde{u}}, \dot{\tilde{v}}) = \int_V \frac{\partial W(\dot{\tilde{\varepsilon}}_{ij}(\dot{\tilde{u}}))}{\partial \dot{\tilde{\varepsilon}}_{ij}(\dot{\tilde{u}})} \dot{\tilde{\varepsilon}}_{ij}(\dot{\tilde{v}}) dV, \\ W(\dot{\varepsilon}_{ij}) = \frac{1}{2} c_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{ij} \dot{\varepsilon}_{kl} - c_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{ij} \dot{\varepsilon}_{kl}^c, \quad W(\dot{\tilde{\varepsilon}}_{ij}) = \frac{1}{2} c_{ijkl} \dot{\tilde{\varepsilon}}_{ij} \dot{\tilde{\varepsilon}}_{kl} - c_{ijkl} \dot{\tilde{\varepsilon}}_{ij} \dot{\tilde{\varepsilon}}_{kl}^c,$$

где  $c_{ijkl}$  — компоненты симметричного тензора упругих констант;  $\dot{\varepsilon}_{ij}, \dot{\tilde{\varepsilon}}_{ij}$  — компоненты скоростей текущих и остаточных деформаций Грина–Лагранжа;  $\dot{\varepsilon}_{ij}^c$  — компоненты скоростей деформаций ползучести;  $i, j, k, l = 1, 2, 3$ ,

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} (\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i}), \quad \dot{\tilde{\varepsilon}}_{ij} = \frac{1}{2} (\dot{\tilde{u}}_{i,j} + \dot{\tilde{u}}_{j,i}), \quad u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}. \quad (4)$$

Потенциалы (2), (3) в (1) для учета в квазистатических задачах представляют собой производные по  $t$  контактных потенциалов  $W_c = - \int_{S_c} [p \cdot (\bar{u} - u)] dS$ ,  $W_c = \int_{S_c} \left[ \frac{1}{2\varepsilon_n} g_n^2 + \frac{1}{2\varepsilon_t} g_t^2 \right] dS$ , полученных наложением контактных условий на формулировку уравнений движения тел методом множителей Лагранжа и методом штрафных функций соответственно [20, 21] ( $n, \tau$  приняты постоянными). При контакте тел возможно скольжение относительно друг друга и слипание. В первом случае должно выполняться ограничение  $(\bar{u}^k - u^k) \cdot n = 0$  на  $S_c$ , т.е. потенциалы примут вид  $W_c = - \int_{S_c} [p_n \cdot n \cdot (\bar{u} - u)] dS$  или  $W_c = \int_{S_c} \left[ \frac{1}{2\varepsilon_n} g_n^2 \right] dS$ , а контактные касательные силы определяются по контактными нормальным силам по закону трения Кулона. Во втором случае  $\bar{u}^k = u^k$  на  $S_c$ . Относительное движение тел начинается по закону трения Кулона, если нарушается условие  $|p_t| < \mu_s |p_n|$ , где  $p_t$  — контактные касательные силы,  $p_n$  — контактные нормальные силы,  $\mu_s$  — статический коэффициент трения. При рассмотрении обратной задачи с функционалом в виде (1) предполагается, что в рассматриваемый момент времени  $t$  имеется контакт жесткого штампа с деформируемым телом, иначе данные потенциалы не должны входить в функционал.

Текущие и остаточные скорости напряжений при бесконечно малых деформациях имеют вид

$$\dot{\sigma}_{ij} = \frac{\partial W(\dot{\varepsilon}_{ij})}{\partial \dot{\varepsilon}_{ij}} = c_{ijkl}(\dot{\varepsilon}_{kl} - \dot{\varepsilon}_{kl}^c), \quad \dot{\rho}_{ij} = \frac{\partial W(\dot{\tilde{\varepsilon}}_{ij})}{\partial \dot{\tilde{\varepsilon}}_{ij}} = c_{ijkl}(\dot{\tilde{\varepsilon}}_{kl} - \dot{\varepsilon}_{kl}^c).$$

Стационарное значение функционала (1) при учете независимости  $\dot{u}, \dot{\tilde{u}}, \dot{\tilde{v}}$  будет давать решение квазистатической контактной задачи деформирования и квазистатической задачи разгрузки. Здесь предполагается, что в начальной стадии процесса квазистатического деформирования внутреннее распределение напряжений, форма тела, текущие значения параметров материала и т.д. уже определены [22]. Обозначим разности остаточных и текущих скоростей напряжений через функции  $\dot{\sigma}_{ij}^d$ , которые представляют собой компоненты скоростей напряжений упругого деформирования:

$$\dot{\rho}_{ij} - \dot{\sigma}_{ij} = c_{ijkl}(\dot{\tilde{\varepsilon}}_{kl} - \dot{\varepsilon}_{kl}) = c_{ijkl}(\dot{\varepsilon}_{kl}^d) = \dot{\sigma}_{ij}^d.$$

Так как  $\dot{\varepsilon}_{kl}, \dot{\tilde{\varepsilon}}_{kl}$  удовлетворяют условиям совместности деформаций и одинаковым граничным условиям, то их разность  $\dot{\varepsilon}_{kl}^d$  тоже будет удовлетворять условиям совместности. Данным скоростям деформаций по закону Гука будут соответствовать скорости напряжений  $\dot{\sigma}_{ij}^d$ .

Таким образом, если определить формулы  $\dot{\rho}_{ij} = \dot{\sigma}_{ij} + \dot{\sigma}_{ij}^d$ ,  $\dot{\sigma}_{ij}^d = \frac{\partial W^d(\dot{\tilde{\varepsilon}}_{ij})}{\partial \dot{\tilde{\varepsilon}}_{ij}} = c_{ijkl}(\dot{\tilde{\varepsilon}}_{kl} - \dot{\varepsilon}_{kl})$ , где  $W^d(\dot{\tilde{\varepsilon}}_{ij}) = \frac{1}{2} c_{ijkl} \dot{\tilde{\varepsilon}}_{ij} \dot{\tilde{\varepsilon}}_{kl} - c_{ijkl} \dot{\tilde{\varepsilon}}_{ij} \dot{\varepsilon}_{kl}$ , то в случае бесконечно малых деформаций достаточные условия единственности [21, 22] решения задач деформирования с введенными потенциалами принимают вид

$$\int_V \Delta \left( \frac{\partial W(\dot{\varepsilon}_{ij})}{\partial \dot{\varepsilon}_{ij}} \right) \Delta \dot{\varepsilon}_{ij} dV > 0, \quad \int_V \Delta \left( \frac{\partial W(\dot{\tilde{\varepsilon}}_{ij})}{\partial \dot{\tilde{\varepsilon}}_{ij}} \right) \Delta \dot{\tilde{\varepsilon}}_{ij} dV > 0, \quad \int_V \Delta \left( \frac{\partial W^d(\dot{\tilde{\varepsilon}}_{ij})}{\partial \dot{\tilde{\varepsilon}}_{ij}} \right) \Delta \dot{\tilde{\varepsilon}}_{ij} dV > 0 \quad (5)$$

для всех пар непрерывно дифференцируемых полей скоростей перемещений (учитываются соотношения (4)), принимающих заданные значения на границе. Здесь  $\Delta$  означает разность соответствующих решениям величин в любых двух различных формах деформации.

Так как в (1) дополнительные условия на скорости перемещения учитываются методом множителей Лагранжа и методом штрафных функций, то в вариационном принципе кинематически допустимым полем скоростей перемещений будет поле скоростей перемещений, учитывающее только условия закрепления. Данные условия, исключая жесткое перемещение тела, в задаче деформирования и разгрузки должны быть одинаковыми. Таким образом, далее будем понимать под произвольным полем скоростей перемещений скорости перемещений с учетом последних ограничений.

Аналогично работам [11, 12] для всех  $\dot{v}, \dot{\tilde{v}}$  и  $\dot{\tilde{v}}$  строится следующий итерационный метод решения обратных задач:

$$A_1^k \left( \dot{\tilde{u}}^{k+1} - \dot{\tilde{u}}^k, \dot{\tilde{v}} - \dot{\tilde{u}}^{k+1} \right)_{S_c} + \left( \frac{\partial W_c}{\partial \dot{\tilde{u}}^k}, \dot{\tilde{v}} - \dot{\tilde{u}}^{k+1} \right)_{S_c} + \left( \frac{\partial W_c}{\partial \dot{\tilde{u}}^k}, \dot{v} - \dot{u}^{k+1} \right)_{S_c} + \\ + a(\dot{u}^k, \dot{v} - \dot{u}^{k+1}) + a(\dot{\tilde{u}}^k, \dot{\tilde{v}} - \dot{\tilde{u}}^*) + A_2^k \left( \dot{\tilde{u}}^* - \dot{\tilde{u}}^k, \dot{\tilde{v}} - \dot{\tilde{u}}^* \right)_S = 0, \quad (6)$$

Здесь  $A_1^k > 0$ ,  $A_2^k > 0$ ,  $k = 1, 2, \dots$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} A_1^k = \infty$  и  $\lim_{k \rightarrow \infty} A_2^k = \infty$ . Для потенциала (2) должно рассматриваться еще дополнительное уравнение  $(\bar{u}^k - u^k, \dot{\lambda} - \dot{p}^{k+1})_{S_c} = 0$  для всех  $\dot{\lambda}$ .

**Лемма.** Пусть  $\dot{u}^k$ ,  $\dot{\tilde{u}}^k$ ,  $\dot{\bar{u}}^k$  являются решениями контактной задачи деформирования и задачи разгрузки и  $S = S_c$ . Тогда итерационный процесс (6) решения обратной задачи формообразования на  $S_c$  представляется в виде

$$\dot{\bar{u}}^{k+1} = \dot{\bar{u}}^k + \alpha^k (\dot{\tilde{u}}^* - \dot{\tilde{u}}^k), \quad \alpha^k = \frac{A_2^k}{A_1^k}, \quad i = 1, 2, 3. \tag{7}$$

**Доказательство.** Если принять, что в данный момент времени имеется контакт жесткого тела с деформируемым и  $\dot{u}^k$ ,  $\dot{\tilde{u}}^k$ ,  $\dot{\bar{u}}^k$  — решения контактной задачи деформирования и задачи разгрузки, то должны быть выполнены контактные условия. Пусть в (6)  $\dot{\bar{v}}_i = \dot{\bar{u}}_i^{k+1} - \dot{u}_i^k + \dot{\tilde{u}}_i^k$ ,  $\dot{v}_i = \dot{u}_i^{k+1} - \dot{u}_i^k + \dot{\tilde{u}}_i^k$ ,  $\dot{\bar{v}}_i = \dot{\tilde{u}}_i^* + \dot{u}_i^k - \dot{\tilde{u}}_i^k$ , тогда

$$A_1^k (\dot{\bar{u}}^{k+1} - \dot{\bar{u}}^k, \dot{u}^d)_{S_c} + a(\dot{u}^k, \dot{u}^d) - a(\dot{\tilde{u}}^k, \dot{u}^d) - A_2^k (\dot{\tilde{u}}^* - \dot{\tilde{u}}^k, \dot{u}^d)_S = 0, \tag{8}$$

где  $\dot{u}_i^d = \dot{\tilde{u}}_i^k - \dot{u}_i^k$ . Но  $a(\dot{\tilde{u}}^k, \dot{u}^d) - a(\dot{u}^k, \dot{u}^d) = \int_V \dot{\sigma}_{ij}^d \dot{\varepsilon}_{ij}^d dV = \int_V (\dot{\sigma}_{ij}^d \dot{\tilde{\varepsilon}}_{ij} + \dot{\sigma}_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} - \dot{\rho}_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}) dV \geq 0$ , так как выполняется (5) и равенство  $\int_V \dot{\rho}_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} dV = \int_V \dot{\rho}_{ij,j} \dot{u}_i dV - \int_S \dot{\rho}_{ij} n_j \dot{u}_i dS = 0$  в силу учета уравнений равновесия и граничных условий при разгрузке  $\dot{\rho}_{ij} n_j = 0$  на поверхности  $S$ .

Тогда (8) примет вид  $(\dot{\bar{u}}^{k+1} - \dot{\bar{u}}^k, \dot{u}^d)_{S_c} - \frac{A_2^k}{A_1^k} (\dot{\tilde{u}}^* - \dot{\tilde{u}}^k, \dot{u}^d)_S \geq 0$ .

По условиям леммы  $S = S_c$ . Это говорит о том, что условия на остаточные скорости перемещений учитываются только в точках контактной поверхности и определяют приближенную оценку для остаточной конфигурации. Тогда неравенство определяет операцию проектирования [23], поэтому приходим к итерационному процессу (7) в области  $S_c$ . Лемма доказана.

На основе теорем сходимости [11, 12] можно показать сходимость для данного итерационного метода при  $0 < \alpha^k < 2$ . Как видно из [12], рассмотренные задачи могут быть обобщены на случай геометрической нелинейности, а именно представлены в общей лагранжевой формулировке.

**3. Численная реализация метода решения.** Применяя основные процедуры метода конечных элементов (МКЭ) [20, 21] к вариационным принципам задач деформирования под нагрузкой без контактных ограничений и разгрузкой, полученным из функционала (1) при учете независимости  $\dot{u}$  и  $\dot{\tilde{u}}$ , найдем систему линейных алгебраических уравнений двух задач

$$K\dot{U} = \dot{\mathbf{R}}, \quad \tilde{K}\dot{\tilde{U}} = \hat{\mathbf{R}}(\dot{U}), \tag{9}$$

где  $K, \tilde{K}$  — симметричные матрицы касательной жесткости;  $\dot{\mathbf{R}}$  — вектор скоростей внутренних и внешних сил;  $\hat{\mathbf{R}}$  — вектор скорости сил, обусловленных начальными деформациями и начальными напряжениями. Эти уравнения, выраженные через скорости, можно использовать только при решении квазистатических задач в приращениях. В результате решения первой задачи по заданным перемещениям получаем деформированную модель с распределением напряжений и деформаций. Вторая задача на основе данных о начальных напряжениях и деформациях определяет перемещения разгрузки. После этого можно найти остаточные узловые перемещения  $\tilde{U} = U + \tilde{U}$ .

Дискретные по времени уравнения пошаговой процедуры явной схемы Эйлера интегрирования систем (9) в общем виде могут быть представлены в форме [20, 21, 24]

$${}^t K \Delta U = {}^{t+\Delta t} \mathbf{R} - {}^t \mathbf{F}, \tag{10}$$

где верхние индексы указывают на момент времени, для которого вычисляется соответствующая величина;  ${}^{t+\Delta t} \mathbf{R}$  — вектор внешних сил;  ${}^t \mathbf{F}$  — вектор внутренних сил.

Затем решение следующего шага  ${}^{t+\Delta t} U = {}^t U + \Delta U$  уточняется методом Ньютона–Рафсона для уравнения  $f(U^*) = {}^{t+\Delta t} \mathbf{R} - {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}(U^*) = 0$ , где вектор внешних сил  ${}^{t+\Delta t} \mathbf{R}$  не зависит от деформированного

состояния и  $U^*$  — точное решение. Разлагая в ряд Тейлора функцию  $f(U^*)$  в окрестности  ${}^{t+\Delta t}U^{(i-1)}$  и пренебрегая членами высокого порядка малости, находим [21, 24, 25]

$$\left. \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial U} \right|_{{}^{t+\Delta t}U^{(i-1)}} \Delta U^{(i)} = {}^{t+\Delta t}K^{(i-1)} \Delta U^{(i)} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{R} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{(i-1)}. \quad (11)$$

Здесь  $\Delta U^{(i)} = {}^{t+\Delta t}U^{(i)} - {}^{t+\Delta t}U^{(i-1)}$ .

Система уравнений (10) выполняется на начальной итерации в (11), т.е.

$${}^{t+\Delta t}K^{(0)} = {}^tK, \quad {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{(0)} = {}^t\mathbf{F}, \quad {}^{t+\Delta t}U^{(0)} = {}^tU.$$

На каждом шаге по времени и на каждой итерации процедуры Ньютона–Рафсона проводится проверка вектора перекреста, определяющего проникновение узла одного тела в другое. Когда определяется контактная поверхность, то для вычисления контактных сил, предотвращающих взаимные проникновения контактирующих тел, в (9) добавляется вариация потенциала  $W_c$ .

Вариация потенциала с множителем Лагранжа на  $S_c$  (2) имеет вид

$$\delta W_c = - \int_{S_c} [(\bar{u} - u) \cdot \delta \dot{p} + p \cdot (\delta \ddot{u} - \delta \dot{u})] dS.$$

Линеаризуя соотношение относительно приращений перемещений и множителя Лагранжа, получим

$$\delta W_c = - \int_{S_c} \left[ (\Delta \bar{u}^{(i)} - \Delta u^{(i)} + \Delta_k^{(i-1)}) \cdot \delta \dot{p} + \Delta p^{(i)} \cdot (\delta \ddot{u} - \delta \dot{u}) + {}^{t+\Delta t}p^{(i-1)} \cdot (\delta \ddot{u} - \delta \dot{u}) \right] dS,$$

где  $\Delta_k^{(i-1)}$  — вектор перекреста; верхние индексы указаны в соответствии с итерационной процедурой (11).

Вариация потенциала (3) при пренебрежении изменениями векторов  $n$  и  $\tau$  на  $S_c$  имеет вид

$$\delta W_c = \int_{S_c} \left[ \frac{1}{\varepsilon_n} g_n \cdot n \cdot (\delta \ddot{u} - \delta \dot{u}) + \frac{1}{\varepsilon_t} g_t \cdot \tau \cdot (\delta \ddot{u} - \delta \dot{u}) \right] dS.$$

Для того чтобы учесть этот потенциал в (10) или (11), необходимо его линеаризовать относительно приращений перемещений. Например, коэффициент при вариации скоростей перемещений для первого слагаемого в интеграле может быть преобразован следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon_n} {}^{t+\Delta t}g_n \cdot {}^{t+\Delta t}n &= \frac{1}{\varepsilon_n} {}^{t+\Delta t}n \cdot ({}^{t+\Delta t}\bar{u} - {}^{t+\Delta t}u) \cdot {}^{t+\Delta t}n = \\ &= \frac{1}{\varepsilon_n} {}^{t+\Delta t}n \cdot (\Delta \bar{u} - \Delta u) \cdot {}^{t+\Delta t}n + \frac{1}{\varepsilon_n} {}^{t+\Delta t}n \cdot ({}^t\bar{u} - {}^tu) \cdot {}^{t+\Delta t}n = \\ &= \frac{1}{\varepsilon_n} {}^{t+\Delta t}n \cdot (\Delta \bar{u} - \Delta u) \cdot {}^{t+\Delta t}n + \frac{1}{\varepsilon_n} {}^tg_n \cdot {}^{t+\Delta t}n. \end{aligned}$$

Для итерационной процедуры (11) последнее выражение можно записать в форме

$$\frac{1}{\varepsilon_n} {}^{t+\Delta t}g_n^{(i)} \cdot {}^{t+\Delta t}n^{(i-1)} = \frac{1}{\varepsilon_n} {}^{t+\Delta t}n^{(i-1)} \cdot (\Delta \bar{u}^{(i)} - \Delta u^{(i)}) \cdot {}^{t+\Delta t}n^{(i-1)} + \frac{1}{\varepsilon_n} {}^{t+\Delta t}g_n^{(i-1)} \cdot {}^{t+\Delta t}n^{(i-1)}.$$

Аналогичные преобразования проводятся для выражения  $\frac{1}{\varepsilon_t} g_t \cdot \tau$ .

С учетом дискретизации вариации данных потенциалов вносятся в правую и левую части (11) и образуются стандартные конечно-элементные уравнения для решения контактной задачи [20, 21]:

$${}^{t+\Delta t}\bar{K}^{(i-1)} \Delta \bar{U}^{(i)} = {}^{t+\Delta t}\bar{R}^{(i-1)},$$

где в матрицы уже включены дополнительные элементы, образующиеся от контактных ограничений.

Решение контактных задач методом множителей Лагранжа и методом штрафа вносит вычислительные трудности [20, 21]. В MSC.Marc имеется способ решения с непосредственным учетом контактных ограничений [26]. В этом случае матрица жесткости уже не будет включать нулевые элементы, как в методе

множителей Лагранжа, и задача решается обычным образом. В случае возникновения контакта, например с жестким телом при скольжении, узлы деформируемого тела принимают перемещения узлов жесткого контактного тела [20, 26], т.е. контактные условия преобразуются в кинематические:  $\Delta u_{\text{normal}} = \Delta \bar{u} \cdot n$  на  $S_c$ . Контактные силы определяются из контактной задачи, сформулированной методом множителей Лагранжа для ограничений, но с известными уже перемещениями [20].

Таким образом, учет ограничений для проскальзывания  $n \cdot (\dot{\bar{u}} - \dot{i}) = 0$  должен выполняться при любом способе решения задачи.

Для применения итерационного метода (7) в решениях конечно-элементных задач необходимо получить его в конечных перемещениях. Это вызывает трудность в связи с тем, что контактная поверхность может меняться в размерах, а в некоторый момент контакт может вообще отсутствовать. В связи с этим предположим, что контактная поверхность существует и изменяется незначительно на всем промежутке времени деформирования панели. Тогда, интегрируя от 0 до  $T$  уравнение (7), можно получить итерационный метод

$$\bar{u}^{k+1} = \bar{u}^k + \alpha^k (\tilde{u}^* - \tilde{u}^k). \tag{12}$$

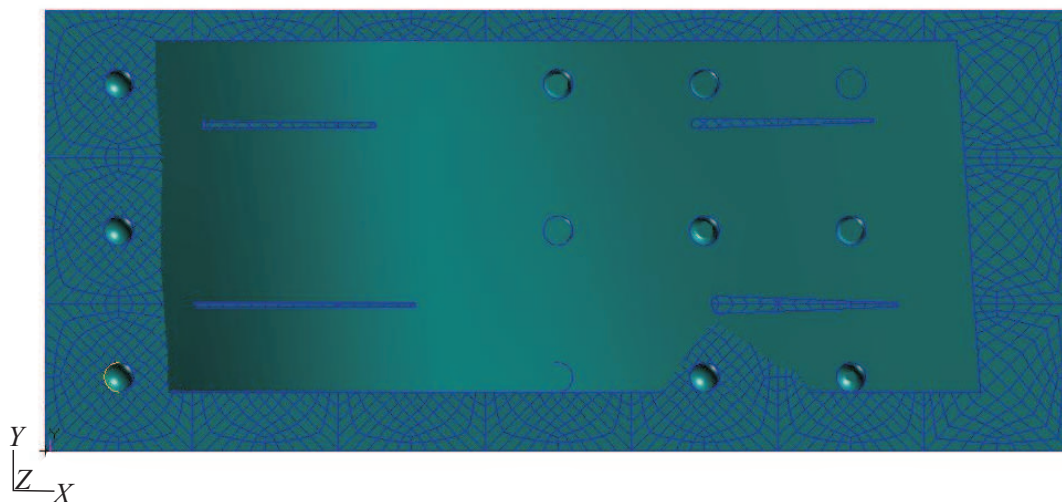


Рис. 1. Конечно-элементная модель заготовки и поверхность с заданной кривизной (вид сверху)

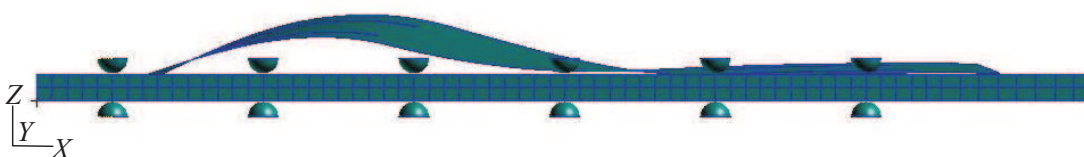


Рис. 2. Конечно-элементная модель заготовки и поверхность с заданной кривизной (вид сбоку)

**4. Пример численного решения задачи.** Рассматривается задача определения перемещений стержней реконфигурируемой установки, создающих такую упреждающую кривизну панели, которая обеспечивает заданную остаточную форму панели после разгрузки. В качестве заданной формы панели взята панель двойной кривизны центроплановой части самолета. Заготовка имеет свойства материала АК4-1Т (алюминиевого сплава). Материал изотропен, и его характеристики упругости одинаковы при растяжении и сжатии и равны следующим значениям: модуль Юнга  $E = 7000 \text{ кг/мм}^2$ , коэффициент Пуассона  $\nu = 0.4$ . Стадия установившейся ползучести в экспериментах как при сжатии, так и при растяжении описывается законом Нортона с разными значениями коэффициента  $B$  для каждого из этих видов деформирования:

- сжатие:  $B_1 = 0.25 \times 10^{-14} (\text{кг/мм}^2)^{-n_1} (\text{час})^{-1}$ ,  $n_1 = 8$ ;
- растяжение:  $B_2 = 0.525 \times 10^{-14} (\text{кг/мм}^2)^{-n_2} (\text{час})^{-1}$ ,  $n_2 = 8$ .

Конечно-элементная модель заготовки, поверхность с заданной кривизной конечной детали и контактные тела, моделирующие наконечники стержней в установке, представлены на рис. 1 (вид сверху) и

рис. 2 (вид сбоку). Контактные условия моделируют проскальзывание без трения. Диаметр наконечника стержня 50 мм. Расстояния между центром одного наконечника стержня с другим составляет 250 мм. Размеры заготовки 1750 × 750 × 45 мм. Согласно технологическому процессу необходимая деталь с заданной кривизной получается после вырубki и фрезерования предварительно сформованной заготовки.

В качестве начальных перемещений контактных тел  $\tilde{w}_i^0$  (см. (12)) принимаются расстояния от жестких тел до поверхности с требуемой кривизной с учетом толщины заготовки. Остаточные перемещения в итерационном методе определяются в узлах деформируемого тела, ближайших к проекциям центральных точек контактных тел на поверхности заготовки.

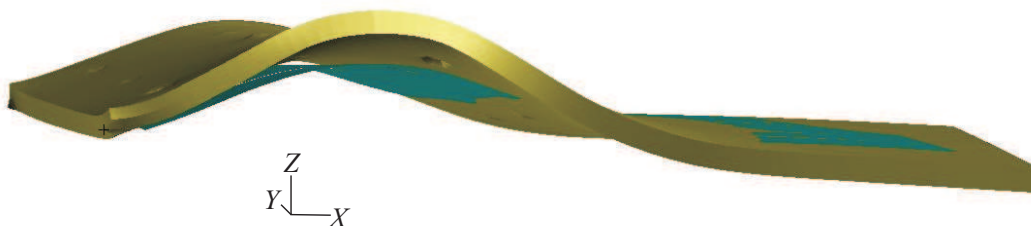


Рис. 3. Упреждающая конфигурация заготовки в сравнении с заданной поверхностью

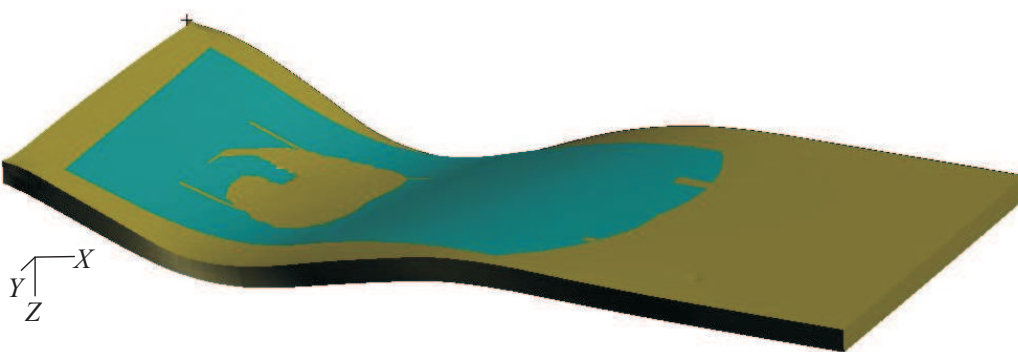


Рис. 4. Остаточная конфигурация заготовки в сравнении с заданной поверхностью

Итерационный метод реализован в системе MSC.Marc с помощью ряда пользовательских процедур. Для подготовки расчетной модели с заданными граничными условиями и определения проекций контактных тел применялись пользовательские программы, разработанные в MSC.Patran.

В результате расчета за 7 итераций найдена упреждающая конфигурация заготовки, представленная на рис. 3 в сравнении с заданной геометрией поверхности. На рис. 4 показана конфигурация заготовки после разгрузки в сравнении с заданной геометрией поверхности.

На рис. 5. представлены графики сходимости итерационного метода по среднеквадратичной норме:  $e = e_i/e_1$ ;  $e_i = \left( \sum_{S_c} (\tilde{w}^0 - \tilde{w}^i)^2 \right)^{1/2}$ ;  $S_c$  — нижняя контактная поверхность панели;  $i$  — номер итерации;  $\tilde{w}^i$ ,  $\tilde{w}^0$  — векторы узловых параметров, описывающих функции прогиба  $i$ -го приближения и заданного.

По расчетам задачи определения упреждающей формы пластинки для обеспечения заданной кривизны после разгрузки с помощью итерационного ме-

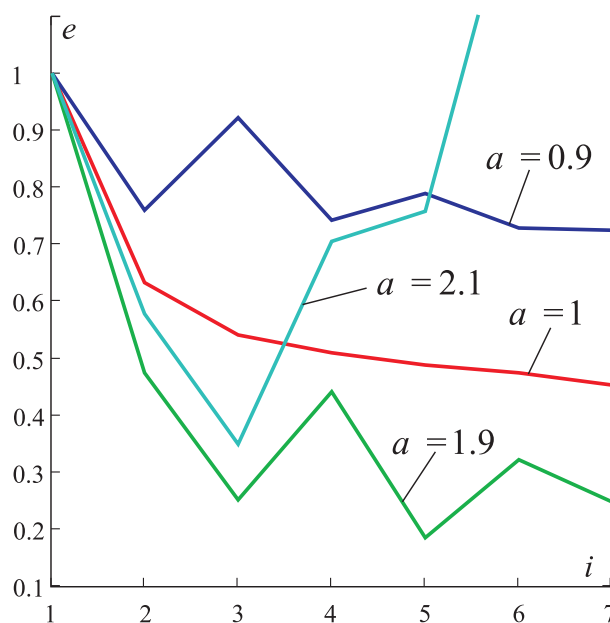


Рис. 5. Графики сходимости итерационного метода

тогда с разными постоянными коэффициентами можно обнаружить согласование условий сходимости ( $0 < \alpha^k < 2$ ), но имеются значительные колебания на итерациях. Такая неустойчивость может быть объяснена как введенными допущениями в реализации итерационного метода, так и характером деформирования в данном режиме ползучести, вызывающего смятия в местах контакта пластинки с жесткими телами.

**5. Заключение.** Предложенная формулировка обратных задач с помощью функционала (1) позволяет перейти к конечно-элементным уравнениям квазистатического деформирования тел с учетом контактных ограничений. Учет контактов в задачах формообразования панелей штампами повышает точность в определении технологических параметров при изготовлении деталей. Построенный итерационный алгоритм дает возможность рассчитать закон движения стержней в реконфигурируемом устройстве при многоточечном формообразовании панелей. По расчетам итерационным методом обратных задач формообразования контактными жесткими телами показано совпадение условий сходимости с задачей кинематического формообразования [11, 12]. Однако в данном случае отклонение коэффициента  $\alpha^k$  от единицы приводит к значительной неустойчивости, что можно охарактеризовать введенными допущениями в реализации итерационного метода.

Работа выполнена при финансовой поддержке совета по грантам Президента РФ (МК-6127.2015.1), РФФИ (16-31-60038 мол\_а\_дк) и Минобрнауки РФ по государственному заданию № 909.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Соснин О.В., Горев Б.В., Любашевская И.В.* Высокотемпературная ползучесть и сверхпластичность материалов // Прикладная механика и техническая физика. 1997. **38**, № 2. 140–145.
2. *Горев Б.В., Панамарев В.А., Перетягъко В.Н.* Энергетический вариант теории ползучести в обработке металлов давлением // Известия высших учебных заведений. Черная металлургия. 2011. № 6. 16–18.
3. *Панамарев В.А., Перетягъко В.Н., Горев Б.В.* О кинетических уравнениях ползучести горячих металлов при непрерывном и прерывистом нагружении // Известия высших учебных заведений. Черная металлургия. 2011. № 12. 53–54.
4. *Соснин О.В., Никитенко А.Ф., Горев Б.В.* К обоснованию энергетического варианта теории ползучести и длительной прочности металлов // Прикладная механика и техническая физика. 2010. **51**, № 4. 188–197.
5. *Банщикова И.А., Горев Б.В., Цвелодуб И.Ю.* О ползучести пластин из алюминиевых сплавов при изгибе // Прикладная механика и техническая физика. 2007. **48**, № 5. 156–159.
6. *Горев Б.В.* Технология формообразования крупногабаритных деталей из листа и плит в режиме ползучести // Технология машиностроения. 2008. № 2. 11–17.
7. *Аннин Б.Д., Олейников А.И., Бормотин К.С.* Моделирование процессов формообразования панелей крыла самолета SSJ-100 // Прикладная механика и техническая физика. 2010. **51**, № 4. 155–165.
8. *Ribeiro F.C., Marinho E.P., Inforzato D.J., Costa P.R., Batalha G.F.* Creep age forming: a short review of fundamentals and applications // Journal of Achievements in Materials and Manufacturing Engineering. 2010. **43**, N 1. 353–361.
9. *Банщикова И.А., Горев Б.В., Сухоруков И.В.* Двумерные задачи формообразования стержней в условиях ползучести // Прикладная механика и техническая физика, 2002. **43**, № 3. 129–139.
10. *Цвелодуб И.Ю.* Постулат устойчивости и его приложения в теории ползучести металлических материалов. Новосибирск: Институт гидродинамики СО АН СССР, 1991.
11. *Бормотин К.С.* Итеративный метод решения обратных задач формообразования элементов конструкций в режиме ползучести // Вычислительные методы и программирование. 2013. **14**. 141–148.
12. *Бормотин К.С.* Итеративный метод решения геометрически нелинейных обратных задач формообразования элементов конструкций в режиме ползучести // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2013. **53**, № 12. 2091–2099.
13. Патент РФ 2251464, В 21 D 11/20. Устройство формования / И.Д. Клопотов, И.В. Любашевская, Г.А. Раевская, Л.Л. Рублевский, О.В. Соснин. Бюл. Изобр. 2005. № 13.
14. Патент РФ № 2076010, В 21 D 11/20. Устройство для формообразования / Л.Л. Рублевский, О.В. Соснин, Б.В. Горев, М.И. Бондаренко. Бюл. Изобр. 1997. № 9.
15. *Wang W.W., Jia B.B., Yu J.B.* A new flexible sheet metal forming method and its stamping process // Proc. of the 14th IFToMM World Congress. 2015. doi: 10.6567/IFTToMM.14TH.WC.PS20.006.
16. *Simon D., Kern L., Wagner J., Reinhart G.* A reconfigurable tooling system for producing plastic shields // Procedia CIRP. 2014. **17**. 853–858.
17. *Lin H., Min W., Cailou C., Xiusheng J.* FEM analysis of spring-backs in age forming of aluminum alloy plates // Chinese Journal of Aeronautics. 2007. **20**, N 6. 564–569.
18. *Păunoiu V., Găvan E., Dimache A.* Springback analysis in reconfigurable multipoint forming of thick plates // The Annals of Dunarea de Jos University of Galati, Technologies in Machine Building, Fascicle V. 2012. ISSN 1221-4566. 47–54.



19. Бормотин К.С. Численное моделирование задачи формообразования с контактными условиями в режиме пластичности и ползучести // Интернет-журнал "Науковедение". Выпуск 1. 2014.
20. Wriggers P. Computational contact mechanics. Heidelberg: Springer, 2006.
21. Коробейников С.Н. Нелинейное деформирование твердых тел. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000.
22. Hill R. On uniqueness and stability in the theory of finite elastic strain // J. Mech. Phys. Solids. 1957. 5, N 4. 229–241.
23. Васильев Ф.П. Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2002.
24. Bathe K.-J. Finite element procedures. Upper Saddle River: Prentice Hall, 1982.
25. Kim N.-H. Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis. New York: Springer, 2015.
26. Marc: Advanced Nonlinear Simulation Solution. MSC.Software Corporation.

Поступила в редакцию  
21.06.2016

---

### Mathematical Modeling of Inverse Multipoint Forming Problems in the Creep Mode Using a Reconfigurable Tool

K. S. Bormotin<sup>1</sup>, S. V. Belykh<sup>2</sup>, and Win Aung<sup>3</sup>

<sup>1</sup> *Komsomol'sk-na-Amure State Technical University, Institute for Computer Design of Mechanical Engineering Equipment and Machines; prospekt Lenina 27, Komsomol'sk-na-Amure, 681013, Russia; Dr. Sci., Associate Professor, e-mail: cvmi@knastu.ru*

<sup>2</sup> *Komsomol'sk-na-Amure State Technical University; prospekt Lenina 27, Komsomol'sk-na-Amure, 681013, Russia; Ph.D., Associate Professor, Vice-Rector for Science and Innovations, e-mail: prnir@knastu.ru*

<sup>3</sup> *Komsomol'sk-na-Amure State Technical University, Faculty of Computer Technologies; prospekt Lenina 27, Komsomol'sk-na-Amure, 681013, Russia; Graduate Student, e-mail: cvmi@knastu.ru*

Received June 21, 2016

**Abstract:** A mathematical formulation of inverse forming problems in the creep mode using a reconfigurable tool is based on the creation of functionals for the direct and inverse extreme quasistatic problems of forming details with consideration of contact conditions with equipment. An iterative method of determining the displacements of pins of the tool's matrices providing a given residual curvature of the panel is proposed. The problems are numerically solved by a finite element method in the framework of the MSC.Marc system. The convergence of the proposed iterative method is shown by an example of panel shaping.

**Keywords:** inverse forming problems, contact conditions, variational equations, convergence, finite element method, iterative method, multipoint forming.

#### References

1. O. V. Sosnin, B. V. Gorev, and I. V. Lyubashevskaya, "High-Temperature Creep and Superplasticity of Materials," *Zh. Prikl. Mekh. Tekh. Fiz.* **38** (2), 140–145 (1997) [*J. Appl. Mech. Tech. Phys.* **38** (2), 293–297 (1997)].
2. B. V. Gorev, V. A. Panamarev, and V. N. Peretyat'ko, "Energy-Based Theory of Creep in the Pressure Treatment of Metals," *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved., Chern. Metall.*, No. 6, 16–18 (2011) [*Steel Transl.* **41** (6), 461–463 (2011)].
3. V. A. Panamarev, V. N. Peretyat'ko, and B. V. Gorev, "Kinetic Equations of Creep in Hot Metal under Continuous and Incremental Loading," *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved., Chern. Metall.*, No. 12, 53–54 (2011).
4. O. V. Sosnin, A. F. Nikitenko, and B. V. Gorev, "Justification of the Energy Variant of the Theory of Creep and Long-Term Strength of Metals," *Zh. Prikl. Mekh. Tekh. Fiz.* **51** (4), 188–197 (2010) [*J. Appl. Mech. Tech. Phys.* **51** (4), 608–614 (2010)].
5. I. A. Banshchikova, B. V. Gorev, and I. Yu. Tselodub, "Creep of Plates Made of Aluminum Alloys under Bending," *Zh. Prikl. Mekh. Tekh. Fiz.* **48** (5), 156–159 (2007) [*J. Appl. Mech. Tech. Phys.* **48** (5), 751–754 (2007)].
6. B. V. Gorev, "Bulky Parts Forming Technology from Sheet and Plates under Creep Conditions," *Tekhnol. Mashinostroeniya*, No. 2, 11–17 (2008).

7. B. D. Annin, A. I. Oleinikov, and K. S. Bormotin, "Modeling of Forming of Wing Panels of the SSJ-100 Aircraft," *Zh. Prikl. Mekh. Tekh. Fiz.* **51** (4), 155–165 (2010) [*J. Appl. Mech. Tech. Phys.* **51** (4), 579–589 (2010)].
8. F. C. Ribeiro, E. P. Marinho, D. J. Inforzato, et al., "Creep Age Forming: A Short Review of Fundamentals and Applications," *J. Achiev. Mater. Manufact. Eng.* **43** (1), 353–361 (2010).
9. I. A. Banshchikova, B. V. Gorev, and I. V. Sukhorukov, "Two-Dimensional Problems of Beam Forming under Conditions of Creep," *Zh. Prikl. Mekh. Tekh. Fiz.* **43** (3), 129–139 (2002) [*J. Appl. Mech. Tech. Phys.* **43** (3), 448–456 (2002)].
10. I. Yu. Tsvlodub, *A Stability Postulate and Its Applications in the Theory of Creep for Metallic Materials* (Hydrodynamics Inst., Novosibirsk, 1991) [in Russian].
11. K. S. Bormotin, "An Iterative Method for the Solution of Inverse Shaping Problems under Creep Conditions," *Vychisl. Metody Programm.* **14**, 141–148 (2013).
12. K. S. Bormotin, "Iterative Method for Solving Geometrically Nonlinear Inverse Problems of Structural Element Shaping under Creep Conditions," *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.* **53** (12), 2091–2099 (2013) [*Comput. Math. Math. Phys.* **53** (12), 1908–1915 (2013)].
13. I. D. Klotov, I. V. Lyubashevskaya, G. A. Raevskaya, L. L. Rublevskii, and O. V. Sosnin, RF Patent No. 2 251 464, *Byull. Izobret.*, No. 13 (2005).
14. L. L. Rublevskii, O. V. Sosnin, B. V. Gorev, and M. I. Bondarenko, RF Patent No. 2 076 010, *Byull. Izobret.*, No. 9 (1997).
15. W. W. Wang, B. B. Jia, and J. B. Yu, "A New Flexible Sheet Metal Forming Method and Its Stamping Process," in *Proc. 14th IFToMM World Congress, Taipei, Taiwan, October 25–30, 2015*, doi 10.6567/IFTToMM.14TH.WC.PS20.006
16. D. Simon, L. Kern, J. Wagner, and G. Reinhart, "A Reconfigurable Tooling System for Producing Plastic Shields," *Procedia CIRP* **17**, 853–858 (2014).
17. H. Lin, W. Min, C. Cailou, and J. Xiusheng, "FEM Analysis of Spring-backs in Age Forming of Aluminum Alloy Plates," *Chin. J. Aeronaut.* **20** (6), 564–569 (2007).
18. V. Păunoiu, E. Găvan, and A. Dimache, "Springback Analysis in Reconfigurable Multipoint Forming of Thick Plates," *The Annals of Dunarea de Jos University of Galati, Technologies in Machine Building, Fascicle V*, ISSN 1221-4566, 47–54 (2012).
19. K. S. Bormotin, "Numerical Modeling of a Problem Forming with Contact Conditions in a Plasticity and Creep Mode," *Naukovedenie*, No. 1, 1–13 (2014).
20. P. Wriggers, *Computational Contact Mechanics* (Springer, Heidelberg, 2006).
21. S. N. Korobeinikov, *Nonlinear Deformation of Solids* (Izd. Ross. Akad. Nauk, Novosibirsk, 2000) [in Russian].
22. R. Hill, "On Uniqueness and Stability in the Theory of Finite Elastic Strain," *J. Mech. Phys. Solids* **5** (4), 229–241 (1957).
23. F. P. Vasil'ev, *Methods of Optimization* (Faktorial Press, Moscow, 2002) [in Russian].
24. K.-J. Bathe, *Finite Element Procedures* (Prentice Hall, Upper Saddle River, 1982).
25. N.-H. Kim, *Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis* (Springer, New York, 2015).
26. Marc: Advanced Nonlinear Simulation Solution, MSC Software Corporation.  
<http://www.mssoftware.com/product/marc>. Cited July 14, 2016.