

УДК 519.62

doi 10.26089/NumMet.v17r320

## ИССЛЕДОВАНИЕ СВОЙСТВ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ ДЛЯ РЕАЛИЗАЦИИ ЭТАПА АДВЕКЦИИ МЕТОДА РЕШЕТОЧНЫХ УРАВНЕНИЙ БОЛЬЦМАНА

Г. В. Кривовичев<sup>1</sup>, Е. С. Марнопольская<sup>2</sup>

Исследуется конечно-разностная однопараметрическая схема для решения системы уравнений переноса, возникающей при применении метода расщепления по физическим процессам к задачам для системы кинетических уравнений. Исследование устойчивости проводится с помощью метода Неймана, построена область устойчивости на плоскости “параметр схемы–число Куранта”. Показано, что за счет выбора параметра можно влиять на дисперсионные и диссипативные свойства схемы. Реализован подход к выбору оптимального параметра, основанный на оптимизации дисперсионных и диссипативных поверхностей. Эффективность схемы при оптимальном значении параметра показана при численном решении задач о течении в каверне и о волнах сдвига в вязкой жидкости.

**Ключевые слова:** метод решеточных уравнений Больцмана, расщепление по физическим процессам, уравнение переноса, устойчивость по начальным условиям, метод Неймана.

**1. Введение.** Метод решеточных уравнений Больцмана (lattice Boltzmann method, далее метод LBM) является одним из наиболее эффективных современных методов решения задач вычислительной гидродинамики [1–5]. При применении метода LBM удается эффективно моделировать системы с фазовыми переходами [6–8] и течения в пористых средах с учетом сложной формы границ [9]. Метод является особенно актуальным в связи с широкими возможностями для распараллеливания его алгоритма и реализации на гибридных многопроцессорных системах [10–12].

Реализуемая в большинстве работ разностная схема (так называемое решеточное уравнение Больцмана) строится посредством интегрирования системы кинетических уравнений Больцмана–Бхатнагара–Гросса–Крука (ББГК) вдоль своих характеристик с учетом последующего применения интегро-интерполяционного метода [13, 14]. Схема характеризуется единичным значением параметра Куранта, что задает жесткую связь шагов по времени и пространственным переменным [15]. Для возможности независимого варьирования шагов сеток, что необходимо для улучшения точности, устойчивости и возможности использования неравномерных сеток, были предложены конечно-разностные решеточные схемы Больцмана (finite-difference-based lattice Boltzmann schemes) [15–19].

В работах [18, 19] были предложены трехслойные конечно-разностные схемы со специальными аппроксимациями по времени и пространственным переменным. В настоящей статье исследуются возможности применения схем такого типа к решению задач для системы линейных уравнений переноса, возникающей на одном из этапов метода расщепления по физическим процессам. Рассмотрена разностная схема, зависящая от скалярного параметра, за счет которого можно влиять на условия устойчивости, регулировать дисперсионные и диссипативные свойства. Определено оптимальное значение параметра. В качестве иллюстрации приводятся результаты расчетов, полученные при применении метода расщепления к решению двух известных тестовых задач.

**2. Система кинетических уравнений.** Рассматривается система дискретных по скоростям уравнений ББГК следующего вида:

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + \mathbf{V}_i \nabla f_i = -\frac{1}{\lambda} (f_i - f_i^{(\text{eq})}), \quad (1)$$

где  $f_i = f_i(t, \mathbf{r})$ ,  $i = \overline{1, n}$ , — функции распределения частиц со скоростями  $\mathbf{V}_i$ ,  $t$  — время,  $\mathbf{r}$  — вектор пространственных переменных,  $f_i^{(\text{eq})}$  — приближенные равновесные функции распределения,  $\lambda$  — время релаксации. Система вида (1) может быть получена при дискретизации кинетического уравнения ББГК

<sup>1</sup> Санкт-Петербургский государственный университет, факультет прикладной математики — процессов управления, Университетский просп., д. 35, 198504, г. Санкт-Петербург; доцент, e-mail: g.krivovichev@spbu.ru

<sup>2</sup> Санкт-Петербургский государственный университет, факультет прикладной математики — процессов управления, Университетский просп., д. 35, 198504, г. Санкт-Петербург; студент, e-mail: marnlena@yandex.ru

в пространстве скоростей на сетке  $\mathbf{V}_i = V\mathbf{e}_i$ , где  $V = l/\delta t$ ,  $l$  и  $\delta t$  — средняя длина и время свободного пробега частиц соответственно [20].

В настоящей работе будет рассматриваться только плоский случай и шаблон D2Q9 [1]:  $\mathbf{e}_1 = (0, 0)$ ,  $\mathbf{e}_2 = (1, 0)$ ,  $\mathbf{e}_3 = (0, 1)$ ,  $\mathbf{e}_4 = (-1, 0)$ ,  $\mathbf{e}_5 = (0, -1)$ ,  $\mathbf{e}_6 = (1, 1)$ ,  $\mathbf{e}_7 = (-1, 1)$ ,  $\mathbf{e}_8 = (-1, -1)$ ,  $\mathbf{e}_9 = (1, -1)$ .

Макроскопические характеристики среды — плотность  $\rho$  и скорость  $\mathbf{U}$  — вычисляются через  $f_i$  по следующим формулам:

$$\rho(t, \mathbf{r}) \approx \sum_{i=1}^9 f_i(t, \mathbf{r}), \quad \rho(t, \mathbf{r})\mathbf{U}(t, \mathbf{r}) \approx \sum_{i=1}^9 \mathbf{V}_i f_i(t, \mathbf{r}). \quad (2)$$

**3. Метод расщепления по физическим процессам.** Для численного решения задач для системы (1) может быть применен метод расщепления по физическим процессам, основанный на том, что при выводе уравнения Больцмана (см., например, [21]) учитываются два процесса — взаимодействие частиц (столкновение) и их свободный разлет в результате взаимодействия (адвекция). При численном решении задачи на одном шаге по времени оба этих процесса предлагается рассматривать последовательно.

Применению и обоснованию метода расщепления для уравнения Больцмана посвящено большое число работ (см., например, [22–27]). В [23] показано, что метод имеет только первый порядок точности по времени. Несмотря на это, метод является весьма удобным, поскольку на каждом из его этапов рассматривается своя система уравнений, что позволяет использовать на каждом этапе свои разностные схемы и таким образом влиять на свойства получаемых численных решений. В связи с этим метод расщепления часто используется при реализации конечно-разностных решеточных схем Больцмана [28–32].

В настоящей статье рассматривается модификация метода расщепления с итерациями, физически выражающаяся во множестве процессов последовательных взаимодействий. Для останова метода предлагается использовать значение такой макроскопической характеристики, как плотность.

Итак, на малом по сравнению со средним временем свободного пробега  $\delta t$  промежутке  $(t_j, t_{j+1})$  длины  $\Delta t$  при известном решении  $f_i(t_j, \mathbf{r})$  задача численно решается в два этапа.

Этап 1. Адвекция (свободный разлет). Решается задача для системы линейных уравнений переноса

$$\frac{\partial \tilde{f}_i}{\partial t} + \mathbf{V}_i \nabla \tilde{f}_i = 0 \quad (3)$$

при начальном условии  $\tilde{f}_i(t_j, \mathbf{r}) = f_i(t_j, \mathbf{r})$ . Заметим, что уравнения (3) не зависят друг от друга, а потому задачи для них могут решаться параллельно.

Этап 2. Взаимодействия (столкновения). Решается последовательность задач вида

$$\frac{\partial \hat{f}_i^{(k)}}{\partial t} = -\frac{1}{\lambda} \left( \hat{f}_i^{(k)} - f_i^{(eq)}(\hat{\mathbf{f}}^{(k)}) \right), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (4)$$

где  $\hat{\mathbf{f}} = (\hat{f}_1, \dots, \hat{f}_9)^T$ , с начальными условиями

$$\hat{f}_i^{(k)}(t_j, \mathbf{r}) = \hat{f}_i^{(k-1)}(t_{j+1}, \mathbf{r}), \quad k = 1, 2, \dots \quad (5)$$

при этом предполагается, что  $\hat{f}_i^{(0)}(t_j, \mathbf{r}) = \tilde{f}_i(t_{j+1}, \mathbf{r})$ .

Для улучшения устойчивости при численном решении задач (4) и (5) предлагается использовать неявные методы, проводя при каждом  $k$  всего одну итерацию. При расчетах авторами применялся неявный метод Эйлера.

Физически совокупность последовательно решаемых задач (4) и (5) выражает множественные последовательные взаимодействия частиц на одном шаге сетки по времени. При этом при каждом  $k$  для расчета равновесных функций распределения по формулам (2) вычисляются макровеличины. В качестве критерия останова процесса множественных взаимодействий предлагается использовать неравенство

$$\|\rho^{k+1} - \rho^k\| < \text{Tol}, \quad (6)$$

где величина Tol задается исследователем. Возможно использование и критериев, отличных от (6).

**4. Схема для линейного уравнения переноса.** В настоящей статье рассмотрим одну разностную схему, применяемую при решении задач для системы вида (3). Для исследования свойств разностной

схемы достаточно ограничиться одномерным случаем. Рассмотрим одномерный шаблон D1Q2:  $V_i = V e_i$ ,  $i = 1, 2$ ,  $e_1 = 1$ ,  $e_2 = -1$ . Аналогом системы (3) будет выступать система

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + V_i \frac{\partial f_i}{\partial x} = 0. \quad (7)$$

Приведем (7) к безразмерному виду, введя новые переменные

$$t := \frac{t}{\delta t}, \quad x := \frac{x}{l}, \quad f_i := \frac{f_i}{\Phi_i}, \quad (8)$$

где  $\Phi_i$  — характерные значения функций распределения.

Подставляя (8) в (7), получим

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + e_i \frac{\partial f_i}{\partial x} = 0.$$

В силу независимости уравнений этой системы друг от друга, при исследовании свойств разностных схем достаточно будет рассматривать только одно уравнение: полагая  $u = f_i$  и  $c = e_i$ , получим простейшее линейное уравнение переноса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Для аппроксимации производной по времени воспользуемся модификацией центральной разностной производной, рассмотренной в [18, 19]:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t_j, x_n) \approx \frac{u(t_{j+1}, x_n) - \frac{1}{2}(u(t_j, x_n) + u(t_{j-2}, x_n))}{2\Delta t}.$$

Здесь  $t_j$  — узел сетки по времени, построенной с шагом  $\Delta t$ ,  $x_n$  — узел сетки по пространственной переменной, построенной с шагом  $h$ . Полученная формула следует из обычной формулы для центральной разностной производной

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t_j, x_n) \approx \frac{u(t_{j+1}, x_n) - u(t_{j-1}, x_n)}{2\Delta t}$$

посредством замены значения сеточной функции на  $(j-1)$ -м слое средним арифметическим ее значений на двух ближайших слоях —  $(j-2)$ -м и  $j$ -м. При этом теряется симметричность записи аппроксимации по времени, но улучшается устойчивость получаемых схем [18].

Для аппроксимации конвективного члена  $c \partial u / \partial x$  используем аналоги центральной разности и направленной разности первого порядка [33]:

$$\begin{aligned} c \frac{\partial u}{\partial x}(t_j, x_n) &\approx \frac{c}{2h} \left( u(t_j, x_n + \text{sign}(c)h) - u(t_j, x_n - \text{sign}(c)h) \right), \\ c \frac{\partial u}{\partial x}(t_j, x_n) &\approx \frac{c}{h} \left( u(t_j, x_n) - u(t_j, x_n - \text{sign}(c)h) \right). \end{aligned}$$

Таким образом, уравнение переноса аппроксимируется трехслойными явными разностными схемами вида (для определенности положим  $c > 0$ ):

$$u_n^{j+1} = \frac{1}{2} (u_n^j + u_n^{j-2}) - \gamma (u_{n+1}^j - u_{n-1}^j), \quad (9)$$

$$u_n^{j+1} = \frac{1}{2} (u_n^j + u_n^{j-2}) - 2\gamma (u_n^j - u_{n-1}^j), \quad (10)$$

где  $u_n^j \approx u(t_j, x_n)$ ,  $\gamma = c\Delta t/h$  — число Куранта.

Исследуем устойчивость построенных схем с помощью метода Неймана. Представим их решения в виде [34]

$$u_n^j = \lambda^j(\varphi) e^{in\varphi}, \quad (11)$$

где  $\varphi \in [0, 2\pi)$ ,  $i^2 = -1$ ,  $\lambda(\varphi)$  — спектральная функция. Подставляя (11) в (9), получим кубическое уравнение относительно  $\lambda$ :

$$\lambda^3 + \left( i2\gamma \sin(\varphi) - \frac{1}{2} \right) \lambda^2 - \frac{1}{2} = 0.$$

Аналогично для схемы (10) получим

$$\lambda^3 + \left(2\gamma(1 - e^{-i\varphi}) - \frac{1}{2}\right)\lambda^2 - \frac{1}{2} = 0.$$

Корни полученных уравнений без особого труда можно найти в современных пакетах символьных вычислений или с использованием формул Кардано; здесь выражения для них не приводятся в силу их громоздкости. При численном анализе их модулей было установлено, что они будут удовлетворять спектральному критерию устойчивости при следующих ограничениях на  $\gamma$ :  $\gamma \leq 1/2$  для схемы (9) и  $\gamma \leq 1/4$  для схемы (10).

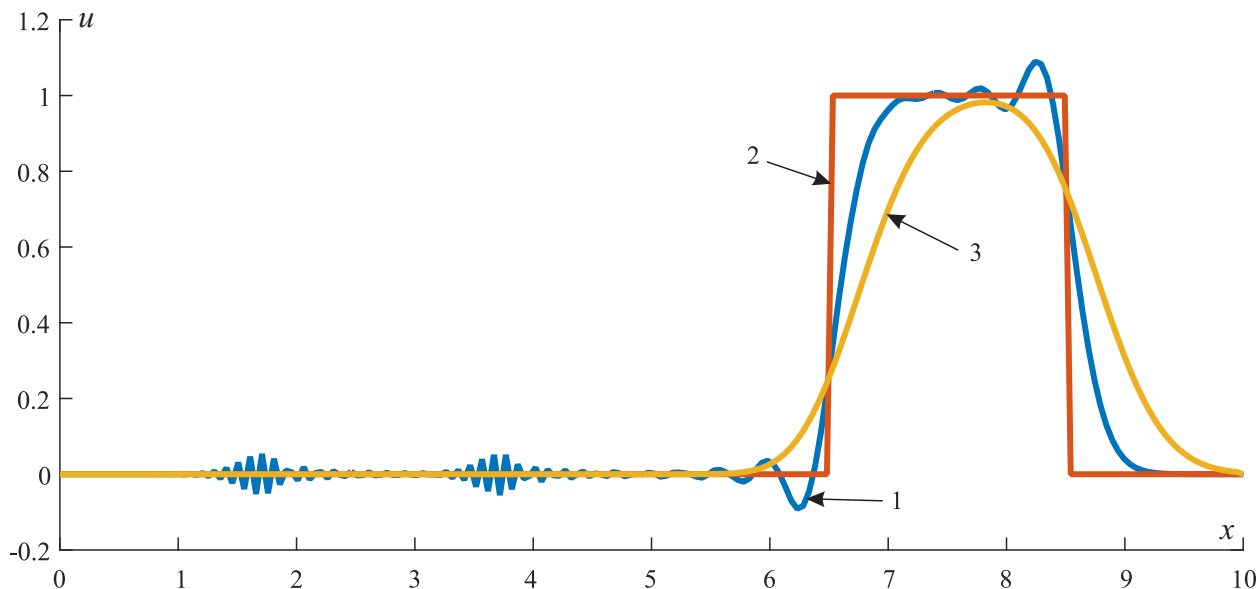


Рис. 1. Графики решения задачи о распространении прямоугольного импульса:  
1) численное решение по схеме (9); 2) точное решение; 3) численное решение по схеме (10)

При численном решении простейшей задачи о распространении прямоугольного импульса при  $c = 1$  было обнаружено (рис. 1), что для схемы (9) характерна численная дисперсия, проявляющаяся в фиктивных высокочастотных колебаниях, тогда как для схемы (10) характерна численная диссипация, проявляющаяся в фиктивном затухании решения.

Поскольку эти эффекты компенсируют друг друга, для построения разностной схемы был использован подход, предложенный в [29] и основанный на введении скалярного параметра  $\varepsilon \in [0, 1]$  и использовании смешанной аппроксимации вида

$$c \frac{\partial u}{\partial x}(t_j, x_n) \approx \varepsilon \left(c \frac{\partial u}{\partial x}(t_j, x_n)\right)^{UW} + (1 - \varepsilon) \left(c \frac{\partial u}{\partial x}(t_j, x_n)\right)^C,$$

$\left(c \frac{\partial u}{\partial x}(t_j, x_n)\right)^{UW}$  — приближение с помощью направленной разности первого порядка,  $\left(c \frac{\partial u}{\partial x}(t_j, x_n)\right)^C$  — приближение с помощью центральной разности.

Построенная с использованием такой аппроксимации разностная схема с параметром имеет вид

$$u_n^{j+1} = \frac{1}{2} (u_n^j + u_n^{j-2}) - 2\gamma\varepsilon(u_n^j - u_{n-1}^j) - \gamma(1 - \varepsilon)(u_{n+1}^j - u_{n-1}^j). \tag{12}$$

### 5. Исследование свойств разностной схемы.

**5.1. Устойчивость.** Подставляя (11) в (12), получим кубическое уравнение относительно спектральной функции схемы (12):

$$\lambda^3 + \left(2\gamma(\varepsilon(1 - \cos(\varphi)) + i \sin(\varphi)) - \frac{1}{2}\right)\lambda^2 - \frac{1}{2} = 0. \tag{13}$$

В результате численного анализа корней уравнения (13) была построена область устойчивости на плоскости параметров  $(\varepsilon, \gamma)$ , границы которой представлены на рис. 2. Как можно видеть, схема является условно устойчивой, причем обеспечивающее устойчивость ограничение на  $\gamma$  будет зависеть от  $\varepsilon$ .

**5.2. Дисперсионные и диссипативные свойства.** Для анализа дисперсионных и диссипативных свойств воспользуемся подходом, предложенным в работах [35, 36] и основанным на оптимизации дисперсионных и диссипативных поверхностей.

Представим решение разностной схемы (12) в виде бегущей волны:

$$u_n^j = e^{i(\omega \Delta t j - k n h)}, \tag{14}$$

где  $\omega$  — круговая частота,  $k$  — волновое число.

Подставляя (14) в (12), получим уравнение относительно  $q = e^{i\omega \Delta t}$ :

$$q^3 + \left( 2\gamma \left( \varepsilon (1 - \cos(\xi)) - i \sin(\xi) \right) - \frac{1}{2} \right) q^2 - \frac{1}{2} = 0, \tag{15}$$

где  $\xi = kh$  — приведенное волновое число. Исследуя вещественные части частот  $\omega_s$ , которые выражаются из корней  $q_s$  уравнения (15), можно судить о наличии численной дисперсии, поскольку дисперсионные поверхности можно охарактеризовать следующими функциями:

$$\psi_s(\gamma, \xi, \varepsilon) = \operatorname{Re}(\omega_s) = \frac{1}{\Delta t} \arctan \left( \frac{\operatorname{Re}(q_s)}{\operatorname{Im}(q_s)} \right).$$

Как известно, дисперсионное соотношение для линейного уравнения переноса имеет вид [34]

$$\omega = ck. \tag{16}$$

Из (16) легко получить выражение для функции, характеризующей дисперсионную поверхность исходного уравнения как функцию  $(\gamma, \xi)$ :  $\omega(\gamma, \xi) = \frac{\gamma \xi}{\Delta t}$ .

Дисперсионные свойства разностной схемы можно характеризовать отклонением функций  $\psi_s$  и  $\omega$  друг от друга. При этом, поскольку функции зависят от параметра Куранта  $\gamma$ , достаточно рассмотреть случай единичного значения безразмерного шага по времени  $\Delta t$ .

Задачу о нахождении оптимального значения параметра  $\varepsilon$ , при котором схема (12) будет иметь наилучшие дисперсионные свойства, поставим как задачу о минимизации по  $\varepsilon$  функции

$$I(\varepsilon) = \sup_{s=1,2,3} \left( \sup_{(\gamma, \xi)} |\psi_s(\gamma, \xi, \varepsilon) - \omega(\gamma, \xi)| \right).$$

Рассматривались промежутки изменения по  $\gamma$  и  $\xi$  следующего вида:  $\gamma \in (0, \gamma^*(\varepsilon)]$ ,  $\xi \in [-\pi, \pi]$ , где  $\gamma^*(\varepsilon)$  — верхняя граница области устойчивости при фиксированном  $\varepsilon$ .

Для получения функции, оценивающей влияние диссипативных свойств, воспользуемся соотношением (14), которое перепишем с использованием показательной формы комплексного числа:

$$u_n^j = |q|^j e^{i(\operatorname{Arg}(q^j) - k n h)}. \tag{17}$$

Как видно из (17), диссипативные свойства будут характеризоваться функциями  $\eta_s(\gamma, \xi, \varepsilon) = |q_s|$ . Для поиска оптимальных  $\varepsilon$ , обеспечивающих наилучшие диссипативные свойства, будем минимизировать функцию, характеризующую отклонения  $\eta_s$  от их постоянных значений  $C_s$ , которые имеют место при малых значениях  $\gamma$ , когда диссипативные эффекты не являются существенными (сами значения  $C_s$  можно определить численно при анализе значений  $\eta_s$ ):  $F(\varepsilon) = \sup_{s=1,2,3} \left( \sup_{(\gamma, \xi)} |\eta_s(\gamma, \xi, \varepsilon) - C_s| \right)$ .

Задачи минимизации функций  $I(\varepsilon)$  и  $F(\varepsilon)$  решались методом перебора на сетке с постоянным шагом. Сетка по  $\varepsilon$  состояла из 100 узлов, сетка в области изменения  $\gamma$  и  $\xi$  — из  $100 \times 100$  узлов.

На рис. 3 приведен график зависимости  $I(\varepsilon)$ , на рис. 4 — график  $F(\varepsilon)$ . Как можно видеть, схема имеет оптимальные дисперсионные свойства при наибольшем значении параметра. Результат является вполне ожидаемым, поскольку в этом случае схема (12) сводится к схеме (10) с явно проявляющейся численной

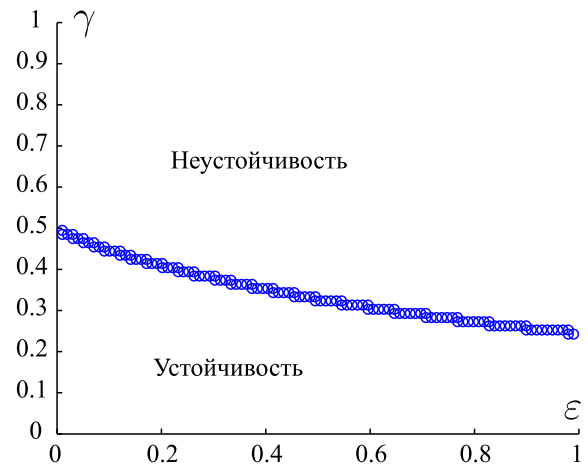


Рис. 2. Границы области устойчивости схемы (12)

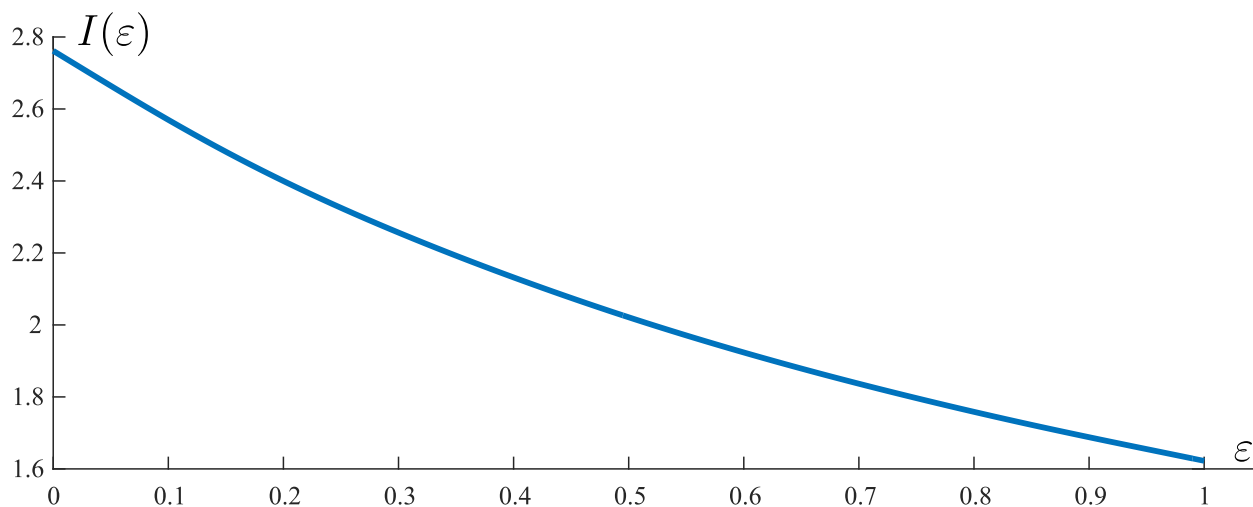


Рис. 3. График  $I(\varepsilon)$

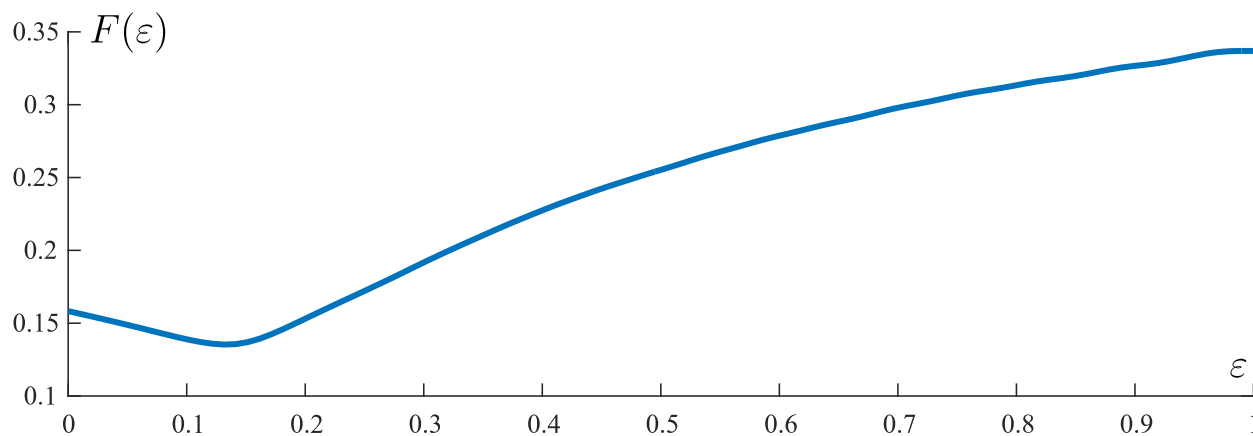


Рис. 4. График  $F(\varepsilon)$

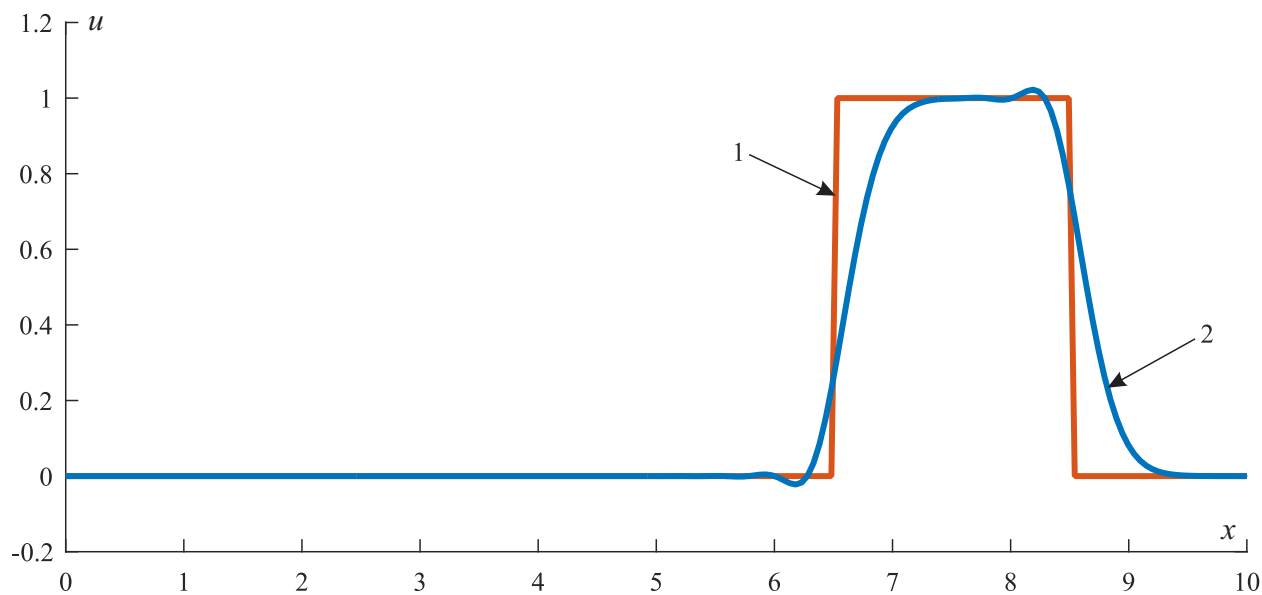


Рис. 5. Графики решения задачи о распространении прямоугольного импульса:  
1) точное решение; 2) численное решение при оптимальном значении параметра

диссипацией, которой экранируются эффекты численной дисперсии и гасятся фиктивные высокочастотные колебания. Функция  $F(\varepsilon)$  имеет минимум в точке  $\varepsilon \approx 0.15$ . Поскольку дисперсионная характеристика  $I(\varepsilon)$  убывает на всем промежутке  $[0, 1]$ , а основное влияние на решение оказывают именно диссипативные свойства (при увеличении  $t$  амплитуда решения затухает), то определяющим критерием решено было выбрать функцию  $F(\varepsilon)$ . В связи с этим оптимальным был принят параметр, обеспечивающий наименьшее значение  $F(\varepsilon)$ .

На рис. 5 представлен график численного решения, полученного по схеме (12) при оптимальном значении  $\varepsilon$ . Как можно видеть, полученное решение не затухает настолько сильно, как для случая схемы (10), и в то же время не имеет фиктивных высокочастотных колебаний.

Построенная разностная схема была распространена на двумерный случай, и с ее применением методом расщепления было получено решение двух тестовых задач вычислительной гидродинамики.

**6. Решение тестовых задач.** Рассматриваются две тестовые задачи — задача о течении в квадратной плоской каверне (предложена в [37]) и задача о сдвиговых волнах в вязкой жидкости (предложена в [16]).

**6.1. Задача о течении в каверне.** Рассматривается область в форме квадрата со стороной длины  $L$ . На границах поставлены условия следующего вида:

$$U_x(t, x, 0) = U_y(t, x, 0) = 0, \quad U_x(t, x, L) = U_0 = \text{const}, \quad U_y(t, x, L) = 0, \quad x \in [0, L], \\ U_x(t, 0, y) = U_y(t, 0, y) = U_x(t, L, y) = U_y(t, L, y) = 0, \quad y \in [0, L].$$

Физически поставленные условия соответствуют ситуации, когда три границы являются неподвижными, а верхняя граница движется с постоянной скоростью.

В начальный момент времени предполагается, что скорость во всех внутренних точках области равна нулю, плотность полагается равной единице.

Стороны квадрата полагаются равными единице. В качестве входного параметра выступает число Рейнольдса  $Re$ , через которое вычисляются все остальные характеристики (подробнее см. [38, 39]). Для реализации поставленных граничных условий на уровне функций распределения используется подход, предложенный в [40].

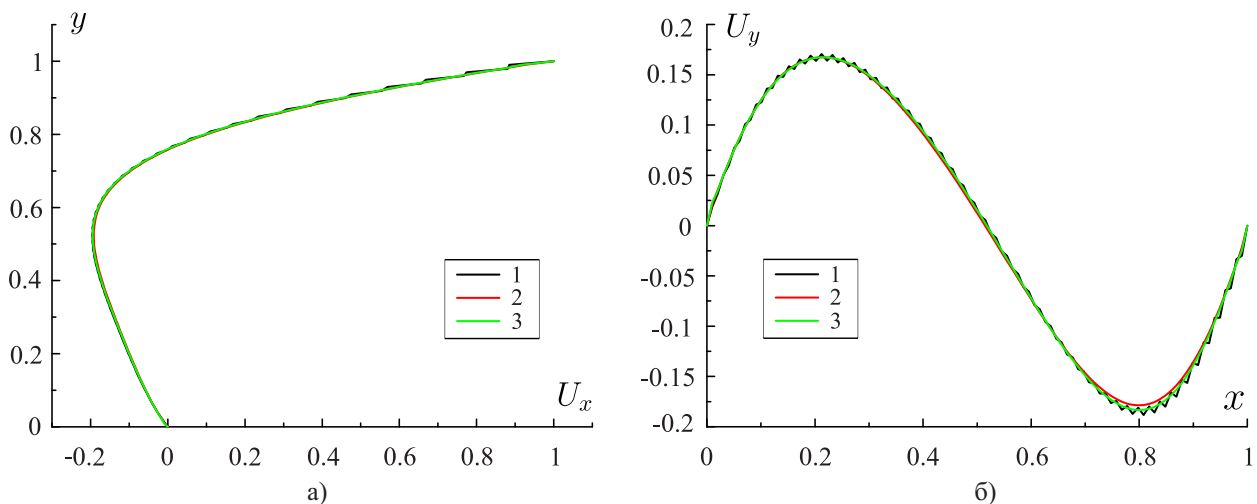


Рис. 6. Графики решения задачи о течении в каверне при  $Re = 50$ : 1) решение при  $\varepsilon = 0$ ; 2) решение при оптимальном значении  $\varepsilon$ ; 3) решение при  $\varepsilon = 1$

Расчеты по методу расщепления производились при  $Re = 50$ ,  $U_0 = 0.1$  на сетке из  $100 \times 100$  узлов. Шаг по времени выбирался из неравенства, обеспечивающего выполнение условия устойчивости при заданном  $\varepsilon$ . Величина  $ToI$  для критерия останова итерационного процесса (6) выбиралась равной  $10^{-8}$ . На рис. 6 для сравнения представлены графики компонент вектора скорости в точках заданных прямых на построенных сетках после выхода решения на стационар. Значения  $U_x$  выводились при  $x = 0.5$  как значения функции переменной  $y$ , значения  $U_y$  — при  $y = 0.5$  как функции от  $x$ . При расчетах рассматривался случай  $\varepsilon = 0$  (соответствует двумерному аналогу схемы (9)),  $\varepsilon = 1$  (соответствует двумерному аналогу схемы (10)) и при оптимальном значении  $\varepsilon$ . Как можно видеть, для случая  $\varepsilon = 0$  проявляются эффекты численной дисперсии — заметны колебания решения между узлами сетки, от которых можно избавиться посредством выбора оптимального значения  $\varepsilon$ . Полученное при оптимальном значении решение не затухает так, как

решение, полученное по диссипативной схеме с направленными разностями первого порядка (случай  $\varepsilon = 1$ ).

**6.2. Задача о сдвиговых волнах.** Рассматривается область квадратной формы со сторонами длины  $L = \pi$ . Предполагается, что в начальный момент времени компоненты вектора  $\mathbf{U}$  задаются следующим образом:  $U_x(0, x, y) = U_0 \sin(Ky)$ ,  $U_y(0, x, y) = 0$ .

На границах области задаются условия вида:

$$U_x(t, 0, y) = U_0 e^{-K^2 \nu t} \sin(Ky), \quad U_x(t, L, y) = U_0 e^{-K^2 \nu t} \sin(Ky), \\ U_x(t, x, 0) = U_x(t, x, L) = U_y(t, 0, y) = U_y(t, L, y) = U_y(t, x, 0) = U_y(t, x, L) = 0.$$

Известно не зависящее от  $x$  аналитическое решение поставленной задачи [16]:

$$U_x(t, x, y) = U_0 e^{-K^2 \nu t} \sin(Ky), \quad U_y(t, x, y) = 0.$$

При расчетах рассматривался случай  $U_0 = 0.1$ ,  $K = 1$ ,  $Re = 50$ , расчет производился до момента  $T = \pi/2$  на пространственной сетке из  $100 \times 100$  узлов. Шаг по времени выбирался из неравенства, обеспечивающего выполнение условия устойчивости. На рис. 7 для сравнения приведены графики компоненты  $U_x$  при  $x = 0.5$  как функции  $y$ , полученные в момент  $T$ . Как можно видеть, свойства полученных по различным схемам численных решений близки по свойствам к решениям задачи о течении в каверне — для схемы с центральными разностями характерны малые нефизические осцилляции решения вблизи границ области. Для схемы при  $\varepsilon = 1$  характерно затухание решения. Схема при оптимальном значении параметра такими эффектами не обладает.

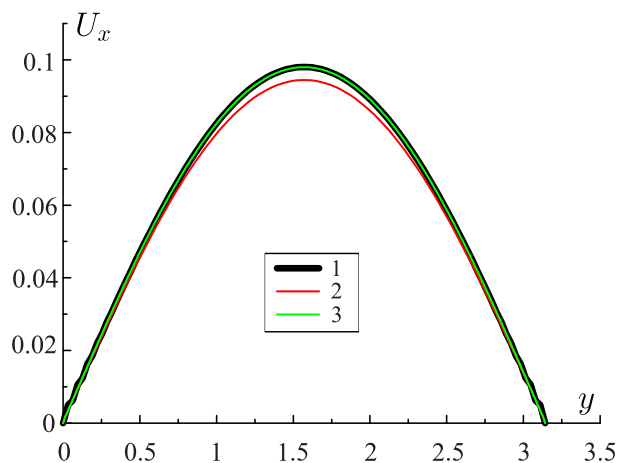


Рис. 7. Графики решения задачи о течении в каверне при  $Re = 50$ : 1) решение при  $\varepsilon = 0$ ; 2) решение при оптимальном значении  $\varepsilon$ ; 3) решение при  $\varepsilon = 1$

**7. Заключение.** В работе проведено исследование свойств конечно-разностной схемы для решения системы уравнений переноса, возникающей при применении метода расщепления по физическим процессам в рамках расчетов по методу LBM. Показано влияние параметра схемы на такие ее свойства, как устойчивость, численные дисперсия и диссипация. Реализован подход к выбору оптимального параметра, основанный на оптимизации дисперсионных и диссипативных поверхностей.

В дальнейшем на основе предлагаемого подхода планируется исследовать разностные схемы высокого порядка, предложенные в [18, 19], с различными аппроксимациями производной по времени.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках проекта 16-31-00021 мол\_а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Chen S., Doolen G.D.* Lattice Boltzmann method for fluid flows // Annual Review of Fluid Mechanics. 1998. **30**. 329–364.
2. *Грачев Н.Е., Дмитриев А.В., Сенин Д.С.* Моделирование динамики газа при помощи решеточного метода Больцмана // Вычислительные методы и программирование. 2011. **12**. 227–231.
3. *Захаров А.М., Сенин Д.С., Грачев Н.Е.* Моделирование течений методом решеточных уравнений Больцмана со многими временами релаксации // Вычислительные методы и программирование. 2014. **15**. 644–657.
4. *Евстигнеев Н.М., Магницкий Н.А.* Нелинейная динамика в начально-краевой задаче течения жидкости с уступа для гидродинамического приближения уравнений Больцмана // Дифференциальные уравнения. 2010. **46**, № 12. 1794–1798.
5. *Владимирова Н.А., Простомолотов А.И., Верезуб Н.А.* Компьютерное моделирование задач аэрогидродинамики на основе численного решения кинетического уравнения методом решеточных уравнений Больцмана в программном комплексе XFlow // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. 2015. **16**, № 1. 1–14.
6. *Куперштох А.Л.* Трехмерное моделирование двухфазных систем типа жидкость-пар методом решеточных уравнений Больцмана на GPU // Вычислительные методы и программирование. 2012. **13**. 130–138.
7. *Куперштох А.Л.* Трехмерное моделирование методом LBE на гибридных GPU-кластерах распада бинарной смеси жидкого диэлектрика с растворенным газом на систему парогазовых каналов // Вычислительные методы и программирование. 2012. **13**. 384–390.



8. *Куперштох А.Л., Медведев Д.А., Грибанов И.И.* Моделирование тепломассопереноса в среде с фазовыми переходами методом решеточных уравнений Больцмана // Вычислительные методы и программирование. 2014. **15**. 317–328.
9. *Bikulov D., Saratov A., Grachev E.* Prediction of the permeability of proppant packs under load // International Journal of Modern Physics C. 2015. **26**. 1550117-1–1550117-2.
10. *Бикюлов Д.А., Сенин Д.С., Демин Д.С., Дмитриев А.В., Грачев Н.Е.* Реализация метода решеточных уравнений Больцмана для расчетов на GPU-кластере // Вычислительные методы и программирование. 2012. **13**. 13–19.
11. *Бикюлов Д.А., Сенин Д.С.* Реализация метода решеточных уравнений Больцмана без хранимых значений функций распределения для GPU // Вычислительные методы и программирование. 2013. **14**. 370–374.
12. *Бикюлов Д.А.* Эффективная реализация метода решеточных уравнений Больцмана для гибридных суперкомпьютерных систем // Вычислительные методы и программирование. 2015. **16**. 205–214.
13. *He X., Luo L.-S.* A priori derivation of the lattice Boltzmann equation // Physical Review E. 1997. **55**, N 6. R6333–R6336.
14. *Кривовичев Г.В.* О применении интегро-интерполяционного подхода к построению одношаговых решеточных кинетических схем Больцмана // Вычислительные методы и программирование. 2012. **13**. 19–27.
15. *Rao P.R., Schaefer L.A.* Numerical stability of explicit off-lattice Boltzmann schemes: A comparative study // Journal of Computational Physics. 2015. **285**. 251–264.
16. *Sofonea V., Sekerka R.F.* Viscosity of finite difference lattice Boltzmann models // Journal of Computational Physics. 2003. **184**, N 2. 422–434.
17. *Кривовичев Г.В.* Исследование устойчивости явных конечно-разностных решеточных кинетических схем Больцмана // Вычислительные методы и программирование. 2012. **13**. 332–340.
18. *Кривовичев Г.В., Михеев С.А.* Исследование устойчивости трехслойных конечно-разностных решеточных схем Больцмана // Вычислительные методы и программирование. 2014. **15**. 211–221.
19. *Кривовичев Г.В., Михеев С.А.* Исследование устойчивости конечно-разностных решеточных схем Больцмана с направленными разностями повышенного порядка аппроксимации // Вычислительные методы и программирование. 2015. **16**. 196–204.
20. *Abe T.* Derivation of the lattice Boltzmann method by means of the discrete ordinate method for the Boltzmann equation // Journal of Computational Physics. 1997. **131**, N 1. 241–246.
21. *Коган М.Н.* Динамика разреженного газа. М.: Наука, 1967.
22. *Filbet F., Russo G.* High order numerical methods for the space non-homogeneous Boltzmann equation // Journal of Computational Physics. 2003. **186**, N 2. 457–480.
23. *Ohwada T.* Higher order approximation methods for the Boltzmann equation // Journal of Computational Physics. 1998. **139**, N 1. 1–14.
24. *Tcheremissine F.G.* Solution of the Boltzmann kinetic equation for low speed flows // Transport Theory and Statistical Physics. 2008. **34**, N 5–7. 564–575.
25. *Клосс Ю.Ю., Мартынов Д.В.* Решение кинетического уравнения Больцмана с помощью тетраэдрических сеток на кластерной архитектуре // Вычислительные методы и программирование. 2012. **13**. 90–96.
26. *Клосс Ю.Ю., Мартынов Д.В., Черемисин Ф.Г.* Численный метод анализа свойств микронасосов Кнудсена // Вычислительные методы и программирование. 2011. **12**. 16–27.
27. *Малков Е.А., Иванов М.С.* Детерминированный метод частиц-в-ячейках для решения задач динамики разреженного газа. Часть I // Вычислительные методы и программирование. 2011. **12**. 368–374.
28. *Guo Z., Zheng C., Zhao T.S.* A lattice BGK scheme with general propagation // Journal of Scientific Computing. 2001. **16**, N 4. 569–585.
29. *Guo Z., Zhao T.S.* Finite-difference-based lattice Boltzmann scheme for dense binary mixtures // Physical Review E. 2005. **71**. 026701-1–026701-12.
30. *Erdembilegt J.H.B., Feng W.-B., Zhang W.* High velocity flow simulation using lattice Boltzmann method with no-free-parameter dissipation scheme // Journal of Shanghai University (English Edition). 2009. **13**, N 6. 454–461.
31. *Kefayati G.H.R.* FDLBM simulation of magnetic field effect on mixed convection in a two sided lid-driven cavity filled with non-Newtonian nanofluid // Powder Technology. 2015. **280**. 135–153.
32. *Кривовичев Г.В.* Об устойчивости конечно-разностных решеточных схем Больцмана // Вычислительные методы и программирование. 2013. **14**. 1–8.
33. *Федоренко Р.П.* Введение в вычислительную физику. Долгопрудный: Интеллект, 2008.
34. *Guo Z., Zhao T.S.* Explicit finite-difference lattice Boltzmann method for curvilinear coordinates // Physical Review E. 2003. **67**. 066709-1–066709-12.
35. *Головизнин В.М., Самарский А.А.* Разностная аппроксимация конвективного переноса с пространственным расщеплением временной производной // Математическое моделирование. 1998. **10**, № 1. 86–100.
36. *Головизнин В.М., Самарский А.А.* Некоторые свойства разностной схемы “кабаре” // Математическое моделирование. 1998. **10**, № 1. 101–116.
37. *Ghia U., Ghia K.N., Shin C.T.* High-Re solutions for incompressible flow using the Navier–Stokes equations and a multigrid method // Journal of Computational Physics. 1982. **48**. 387–411.

38. *Кривовичев Г.В.* О решеточной схеме Больцмана для расчетов на неструктурированных сетках // Вычислительные методы и программирование. 2013. **14**. 524–532.
39. *Кривовичев Г.В.* Модифицированный вариант метода решеточных уравнений Больцмана для расчета течений вязкой несжимаемой жидкости // Компьютерные исследования и моделирование. 2014. **6**, № 3. 365–381.
40. *Zou Q., He X.* On pressure and velocity boundary conditions for the lattice Boltzmann BGK model // Physics of Fluids. 1997. **9**, N 6. 1591–1598.

Поступила в редакцию  
17.05.2016

---

## Study of Properties of a Finite-Difference Scheme for the Advection Stage Implementation in the Lattice Boltzmann Method

G. V. Krivovichev<sup>1</sup> and E. S. Marnopolskaya<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Saint Petersburg State University, Faculty of Applied Mathematics and Control Processes; prospekt Universitetskii 35, Saint Petersburg, 198504, Russia; Ph.D., Associate Professor, e-mail: g.krivovichev@spbu.ru*

<sup>2</sup> *Saint Petersburg State University, Faculty of Applied Mathematics and Control Processes; prospekt Universitetskii 35, Saint Petersburg, 198504, Russia; Student, e-mail: marnlena@yandex.ru*

Received May 17, 2016

**Abstract:** A finite-difference single-parameter scheme for solving the system of advection equations arising in the application of the method of splitting into physical processes to a system of kinetic equations is studied. The stability analysis is performed using the Neumann method. A stability domain in the “scheme’s parameter–Courant number” plane is constructed. It is shown that an appropriate choice of this parameter allows one to regulate the dispersive and dissipative properties of the scheme. An approach of choosing the optimal parameter is proposed on the basis of an optimization of dispersive and dissipative surfaces. An efficiency of the scheme with the optimal parameter is illustrated by the numerical solution of the cavity flow problem and the problem on the propagation of shear waves in viscous fluid.

**Keywords:** lattice Boltzmann method, splitting into physical processes, advection equation, stability with respect to initial conditions, Neumann method.

### References

1. S. Chen and G. D. Doolen, “Lattice Boltzmann Method for Fluid Flows,” *Annu. Rev. Fluid Mech.* **30**, 329–364 (1998).
2. N. E. Grachev, A. V. Dmitriev, and D. S. Senin, “Simulation of Gas Dynamics with the Lattice Boltzmann Method,” *Vychisl. Metody Programm.* **12**, 227–231 (2011).
3. A. M. Zakharov, D. S. Senin, and E. A. Grachev, “Flow Simulation by the Lattice Boltzmann Method with Multiple-Relaxation Times,” *Vychisl. Metody Programm.* **15**, 644–657 (2014).
4. N. M. Evstigneev and N. A. Magnitskii, “Nonlinear Dynamics in the Initial-Boundary Value Problem on the Fluid Flow from a Ledge for the Hydrodynamic Approximation to the Boltzmann Equations,” *Differ. Uravn.* **46** (12), 1794–1798 (2010) [*Differ. Equ.* **46** (12), 1794–1798 (2010)].
5. N. A. Vladimirova, A. I. Prostomolotov, and N. A. Verezub, “Computer Simulation of Aerohydrodynamics Problems on the Base of Numerical Solution of Kinetic Equation by Lattice Boltzmann Method in the XFlow Software Package,” *Fiz. Khim. Kinetika Gaz. Dinamika* **16** (1), 1–14 (2015).
6. A. L. Kupershtokh, “Three-Dimensional Simulations of Two-Phase Liquid–Vapor Systems on GPU Using the Lattice Boltzmann Method,” *Vychisl. Metody Programm.* **13**, 130–138 (2012).
7. A. L. Kupershtokh, “Three-Dimensional LBE Simulations on Hybrid GPU-Clusters for the Decay of a Binary Mixture of Liquid Dielectrics with a Solute Gas to a System of Gas–Vapor Channels,” *Vychisl. Metody Programm.* **13**, 384–390 (2012).
8. A. L. Kupershtokh, D. A. Medvedev, and I. I. Griбанov, “Modeling of Thermal Flows in a Medium with Phase Transitions Using the Lattice Boltzmann Method,” *Vychisl. Metody Programm.* **15** (2), 317–328 (2014).

9. D. Bikulov, A. Saratov, and E. Grachev, "Prediction of the Permeability of Proppant Packs under Load," *Int. J. Mod. Phys. C* **26**, 1550117-1–1550117-16 (2015).
10. D. A. Bikulov, D. S. Senin, D. S. Demin, et al., "Implementation of the Lattice Boltzmann Method on GPU Clusters," *Vychisl. Metody Programm.* **13**, 13–19 (2012).
11. D. A. Bikulov and D. S. Senin, "Implementation of the Lattice Boltzmann Method without Stored Distribution Functions on GPU," *Vychisl. Metody Programm.* **14**, 370–374 (2013).
12. D. A. Bikulov, "An Efficient Implementation of the Lattice Boltzmann Method for Hybrid Supercomputers," *Vychisl. Metody Programm.* **16**, 205–214 (2015).
13. X. He and L.-S. Luo, "A Priori Derivation of the Lattice Boltzmann Equation," *Phys. Rev. E* **55** (6), R6333–R6336 (1997).
14. G. V. Krivovichev, "Application of the Integro-Interpolation Method to the Construction of Single-Step Lattice Boltzmann Schemes," *Vychisl. Metody Programm.* **13**, 19–27 (2012).
15. P. R. Rao and L. A. Schaefer, "Numerical Stability of Explicit Off-Lattice Boltzmann Schemes: A Comparative Study," *J. Comput. Phys.* **285**, 251–264 (2015).
16. V. Sofonea and R. F. Sekerka, "Viscosity of Finite Difference Lattice Boltzmann Models," *J. Comput. Phys.* **184** (2), 422–434 (2003).
17. G. V. Krivovichev, "Investigation of the Stability of Explicit Finite Difference-Based Lattice Boltzmann Schemes," *Vychisl. Metody Programm.* **13**, 332–340 (2012).
18. G. V. Krivovichev and S. A. Mikheev, "Stability of Three-Layer Finite Difference-Based Lattice Boltzmann Schemes," *Vychisl. Metody Programm.* **15**, 211–221 (2014).
19. G. V. Krivovichev and S. A. Mikheev, "Stability Study of Finite-Difference-Based Lattice Boltzmann Schemes with Upwind Differences of High Order Approximation," *Vychisl. Metody Programm.* **16**, 196–204 (2015).
20. T. Abe, "Derivation of the Lattice Boltzmann Method by Means of the Discrete Ordinate Method for the Boltzmann Equation," *J. Comput. Phys.* **131** (1), 241–246 (1997).
21. M. N. Kogan, *Rarefied Gas Dynamics* (Nauka, Moscow, 1967; Plenum, New York, 1969).
22. F. Filbet and G. Russo, "High Order Numerical Methods for the Space Non-Homogeneous Boltzmann Equation," *J. Comput. Phys.* **186** (2), 457–480 (2003).
23. T. Ohwada, "Higher Order Approximation Methods for the Boltzmann Equation," *J. Comput. Phys.* **139** (1), 1–14 (1998).
24. F. G. Tcheremissine, "Solution of the Boltzmann Kinetic Equation for Low Speed Flows," *Transp. Theory Stat. Phys.* **37** (5–7), 564–575 (2008).
25. Yu. Yu. Kloss and D. V. Martynov, "Solving the Boltzmann Kinetic Equation Using Tetrahedral Meshes on a Cluster Architecture," *Vychisl. Metody Programm.* **13**, 90–96 (2012).
26. Yu. Yu. Kloss, D. V. Martynov, and F. G. Cheremissine, "A Numerical Method for Analyzing the Knudsen Micropump Characteristics," *Vychisl. Metody Programm.* **12**, 16–27 (2011).
27. E. A. Malkov and M. S. Ivanov, "A Deterministic Particle-In-Cell Method for Solving the Problems of Rarefied Gas Dynamics. Part I," *Vychisl. Metody Programm.* **12**, 368–374 (2011).
28. Z. Guo, C. Zheng, and T. S. Zhao, "A Lattice BGK Scheme with General Propagation," *J. Sci. Comput.* **16** (4), 569–585 (2001).
29. Z. Guo and T. S. Zhao, "Finite-Difference-Based Lattice Boltzmann Model for Dense Binary Mixtures," *Phys. Rev. E* **71**, 026701-1–026701-12 (2005).
30. J. H. B. Erdembilegt, W. B. Feng, and W. Zhang, "High Velocity Flow Simulation Using Lattice Boltzmann Method with No-Free-Parameter Dissipation Scheme," *J. Shanghai Univ. (Engl. Ed.)* **13** (6), 454–461 (2009).
31. G. H. R. Kefayati, "FDLBM Simulation of Magnetic Field Effect on Mixed Convection in a Two Sided Lid-Driven Cavity Filled with Non-Newtonian Nanofluid," *Powder Technol.* **280**, 135–153 (2015).
32. G. V. Krivovichev, "Stability of Finite-Difference-Based Lattice Boltzmann Schemes," *Vychisl. Metody Programm.* **14**, 1–8 (2013).
33. R. P. Fedorenko, *Introduction to Computational Physics* (Intellekt, Dolgoprudnyi, 2008) [in Russian].
34. Z. Guo and T. S. Zhao, "Explicit Finite-Difference Lattice Boltzmann Method for Curvilinear Coordinates," *Phys. Rev. E* **67**, 066709-1–066709-12 (2003).
35. V. M. Goloviznin and A. A. Samarskii, "Finite Difference Approximation of Convective Transport Equation with Space Splitting Time Derivative," *Mat. Model.* **10** (1), 86–100 (1998).
36. V. M. Goloviznin and A. A. Samarskii, "Some Characteristics of Finite Difference Scheme 'Cabaret'," *Mat. Model.* **10** (1), 101–116 (1998).

37. U. Ghia, K. N. Ghia, and C. T. Shin, "High-Re Solutions for Incompressible Flow Using the Navier-Stokes Equations and a Multigrid Method," *J. Comput. Phys.* **48**, 387–411 (1982).
38. G. V. Krivovichev, "A Lattice Boltzmann Scheme for Computing on Unstructured Meshes," *Vychisl. Metody Programm.* **14**, 524–532 (2013).
39. G. V. Krivovichev, "Modification of the Lattice Boltzmann Method for the Computations of Viscid Incompressible Fluid Flows," *Kompyut. Issled. Model.* **6** (3), 365–381 (2014).
40. Q. Zou and X. He, "On Pressure and Velocity Boundary Conditions for the Lattice Boltzmann BGK Model," *Phys. Fluids* **9** (6), 1591–1598 (1997).