

УДК 532.529

doi 10.26089/NumMet.v17r109

## МЕТОДЫ И КОНЦЕПЦИИ ВИЗУАЛИЗАЦИИ ВИХРЕВЫХ ТЕЧЕНИЙ В ЗАДАЧАХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

К. Н. Волков<sup>1</sup>, В. Н. Емельянов<sup>2</sup>, И. В. Тетерина<sup>3</sup>, М. С. Яковчук<sup>4</sup>

Рассматриваются концепции и методы визуального представления результатов численных исследований задач гидро- и газодинамики, связанных с расчетами вихревых течений. Обсуждаются подходы к визуализации вихревых течений, основанные на использовании различных определений вихря и критериев его идентификации. Приводятся примеры визуального представления решений ряда задач механики жидкости и газа, связанных с расчетами вихревых течений в струях, каналах и кавернах, а также отрывных течений, возникающих при обтекании тел различной формы. Обсуждается визуализация результатов, полученных на основе вихреразрешающих подходов к моделированию турбулентности.

**Ключевые слова:** научная визуализация, вычислительная газовая динамика, течение жидкости, вихрь, векторное поле, тензорное поле, струя, каверна, канал.

**1. Введение.** Диагностика вихревых течений является важной для описания и понимания различных природных явлений и технологических процессов с закрученными потоками (улучшение аэродинамических характеристик летательных аппаратов и судов, создание вихревых технологий получения и преобразования энергии, минимизация воздействия вихревого следа роторных машин и др.). Важным фактором, оказывающим влияние на структуру течения, является перемещение вихревых структур и изменение их формы во времени, а также распад вихря (vortex breakdown), который обуславливается внезапной перестройкой структуры течения. При этом наблюдается резкое увеличение характерного размера вихревого ядра, замедление осевой скорости вихря и турбулизация течения. Успешное решение практических проблем и создание техники нового поколения во многом зависит от разработки методов и средств, предназначенных для диагностики вихревых течений [1].

Интенсивное развитие вычислительной техники и методов математического моделирования сформировали новую научную дисциплину, которая получила название научная визуализация (scientific visualization). Научная визуализация переводит результаты научных исследований, выраженные в численной форме, в визуальные образы [1]. Визуальное представление численных данных облегчает работу с информацией и обмен этой информацией. Визуализация также обеспечивает контроль и лучшее понимание численных результатов, выполняет иллюстративную функцию, облегчающую запоминание и ориентацию в обсуждениях и дискуссиях [2].

Визуализация в вычислительной газовой динамике (Computational Fluid Dynamics, CFD) представляет собой заключительный этап моделирования (рис. 1), необходимый для анализа структуры течения и выяснения механизмов переноса в потоках жидкости и газа. Вычислительный эксперимент предоставляет информацию о полях скорости, давления и температуры, а также о распределениях переносимых величин, изменяющихся во времени.

Визуализация результатов численного решения той или иной задачи состоит из четырех основных шагов, включающих в себя задание входных данных, обработку данных, преобразование данных и рендеринг (рис. 2). В качестве входных данных используются данные численного моделирования (virtual data)

<sup>1</sup> Балтийский государственный технический университет "Военмех" им. Д. Ф. Устинова, факультет ракетно-космической техники, 1-я Красноармейская ул., д. 1, 190005, Санкт-Петербург; вед. науч. сотр., e-mail: dsci@mail.ru

<sup>2</sup> Балтийский государственный технический университет "Военмех" им. Д. Ф. Устинова, факультет ракетно-космической техники, 1-я Красноармейская ул., д. 1, 190005, Санкт-Петербург; профессор, e-mail: vlademelyanov@gmail.com;

<sup>3</sup> Балтийский государственный технический университет "Военмех" им. Д. Ф. Устинова, факультет ракетно-космической техники, 1-я Красноармейская ул., д. 1, 190005, Санкт-Петербург; доцент, e-mail: yaiv@mail.ru

<sup>4</sup> Балтийский государственный технический университет "Военмех" им. Д. Ф. Устинова, факультет ракетно-космической техники, 1-я Красноармейская ул., д. 1, 190005, Санкт-Петербург; доцент, e-mail: mihailyakovchuk@gmail.com

или данные физического эксперимента (physical data). На шаге обработки данных выполняется пост-процессирование (post-processing), заключающееся в расчете производных векторных полей (например, расчет завихренности из известного поля скорости) и в сглаживании данных численного моделирования. Шаг преобразования данных является наиболее важным в процессе визуализации и состоит в построении геометрических примитивов (точки, линии, поверхности), содержащих информацию о поле течения (линии уровня, изоповерхности). Заключительный шаг визуализации (рендеринг, rendering) заключается в конвертировании трехмерных геометрических примитивов в двумерный рисунок, состоящий из пикселей различного цвета.

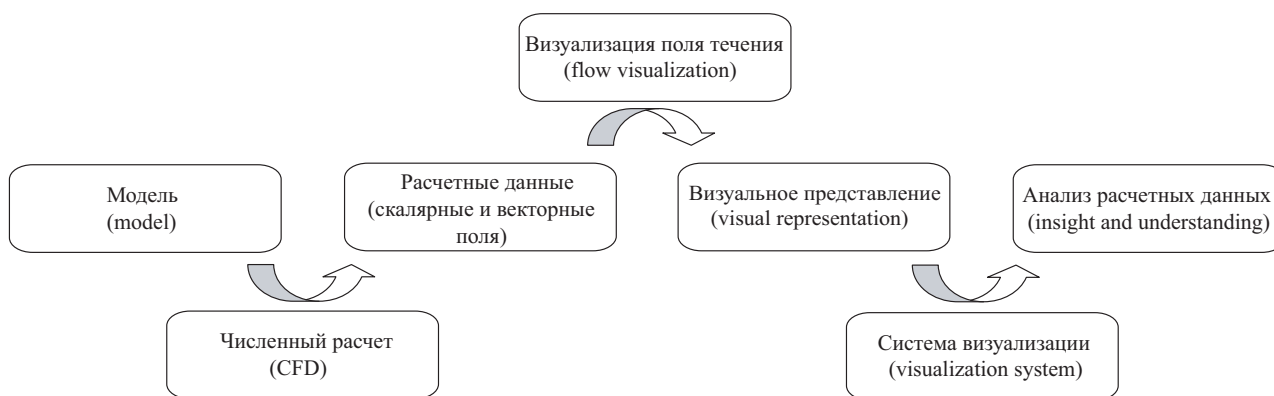


Рис. 1. Основные этапы численного моделирования

Методы графического представления моделируемых течений развиваются на основе опыта экспериментального наблюдения течений жидкости и газа, визуализируемых за счет введения красящих добавок, инъекции струек дыма, гелиевых пузырьков или механических включений в движущуюся среду с использованием оптических и других методов наблюдения. Применяются традиционные способы построения линий тока и траекторий меченых частиц, а для выделения зон резкого изменения давления в заданных областях течения — приемы специальной фототехники. В приборах с PIV (Particle Image Velocimetry) и PTV (Particle Tracking Velocimetry) технологиями обработка результатов лазерной доплеровской анемометрии потоков ведется с последовательным расчетом векторных величин (отрезки траекторий частиц за небольшой интервал времени).

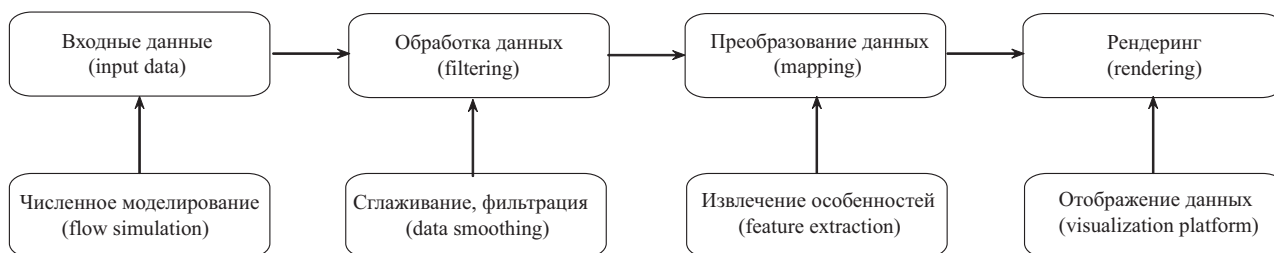


Рис. 2. Основные этапы визуализации

Визуализация нестационарных газодинамических полей выполняется при помощи выбора и построения видов, сечений и выделенных подобластей с использованием карт распределенных скалярных и векторных полей, генерации изоповерхностей, отображения линий тока или траекторий меченых частиц. Находят применение объемный рендеринг и сложное наложение слоев изоповерхностей разной прозрачности и освещенности с выделением границ структур и с применением различных оптических эффектов изменения интенсивности освещения. Для повышения доходчивости представления подвижных и изменчивых структур течения используется техника традиционных рисунков и иллюстраций как последовательности выделенных объектов, вынесенных со сдвигом на одно изобразительное поле. Через частоту штриховки и стиль ее нанесения подчеркиваются особенности вихревого течения среды.

Выявление вихревых структур ведется различными методами с использованием градиентов основных и производных скалярных и векторных полей. Определяется вихрь скорости и проводится расчет нормированной спиральности, представляющей собой скалярное произведение векторов скорости и завихренности

(идентификация вихрей проводится по признаку распределения этой величины в области формирования вихревой линии). Для выявления вихревых структур ищутся области течения с пониженным давлением (используется критерий, являющийся инвариантом тензора скоростей деформаций и применяемый в тех случаях, когда вихрь доминирует над вязким сдвигом) или области течения с повышенным уровнем завихренности. На основе производных полей создаются геометрические объекты (изоповерхности, связанные со скалярными и векторными величинами), дающие представление о вихревой структуре потока.

Использование многопроцессорных вычислительных систем и распараллеливание вычислений позволяет проводить прямое численное моделирование и моделирование крупных вихрей турбулентных течений [3]. Проведение вычислений при помощи вихреразрешающих подходов, определяющих генерацию вихревых структур разных масштабов, занимает значительное время и порождает большой объем информации о скалярных и векторных полях, меняющихся во времени.

Выбор объектов, представляющих интерес для визуализации, существенно зависит от изучаемой задачи. Существует набор стандартных методов визуализации, предлагаемый имеющимися пакетами прикладных программ и библиотеками визуализации. Пользователь пакета выбирает подходящий метод или комбинацию методов, наглядным образом изображающие искомые характеристики изучаемого объекта. Во многих случаях стандартных средств визуализации данных оказывается недостаточно для понимания структуры потока и локализации его особенностей. Требуется разработка и реализация специальных средств визуального представления данных численного моделирования, включая подходы к обработке данных, полученных при помощи вихреразрешающих подходов к моделированию турбулентных течений [3].

В настоящей статье обсуждаются подходы к визуализации вихревых течений, основанные на использовании различных определений вихря и критериев его идентификации. Для дискретизации уравнений Навье–Стокса применяется метод конечных объемов и схемы высокого порядка точности, реализуемые на неструктурированных сетках с произвольной топологией ячеек. Приводятся примеры визуального представления решений ряда задач газовой динамики, связанных с численным моделированием внутренних и внешних течений жидкости и газа. На основе визуального представления рассчитанных основных и производных скалярных и векторных полей делаются выводы о структуре и особенностях вихревых течений в струях, каналах и кавернах, а также в следе за плохообтекаемым телом.

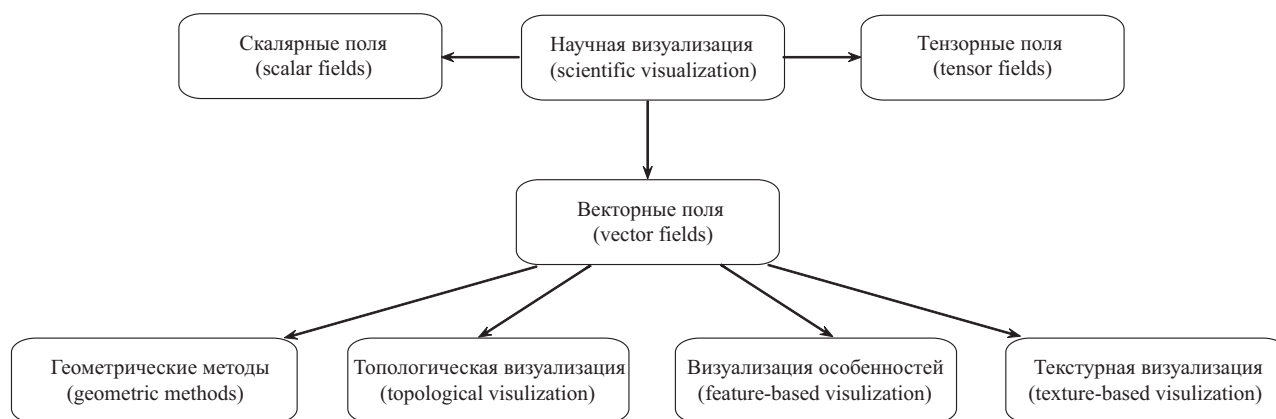


Рис. 3. Визуализация расчетных данных

**2. Методы визуализации.** Методы визуализации векторных полей (в механике жидкости и газа к ним, в частности, относятся поля скорости и завихренности) допускают разбиение на четыре основные группы: геометрические методы, топологические методы, методы визуализации особенностей и текстурные методы (рис. 3).

Геометрические методы основаны на численном интегрировании системы обыкновенных дифференциальных уравнений, позволяя построить линии тока, вихревые линии и траектории меченых частиц. Основная проблема состоит в выборе достаточного количества точек (частиц), необходимых для визуализации картины течения и понимания его структуры. На практике такой выбор делается как интерактивным способом, так и автоматически при помощи анализа плотности интегральных кривых. Для визуализации стационарных трехмерных векторных полей применяются интегральные поверхности (семейство интегральных кривых на поверхности).

В топологических подходах векторное поле течения представляется в виде набора линий тока, что

позволяет определить локальное направление потока и найти критические точки, линии отрыва и присоединения потока. Тип критической точки зависит от собственных значений тензора градиента скорости (комплексные собственные значения соответствуют вращению, положительная вещественная часть — источнику, а отрицательная вещественная часть — стоку).

Методы визуализации особенностей течения позволяют идентифицировать вихревые структуры и вихревые линии, а также линии отрыва и присоединения потока, основываясь на тех или иных определениях и критериях. Для визуализации вихревых областей потока используются некоторые пороговые значения давления и завихренности [4]. В двумерном потоке точки отрыва и присоединения потока являются критическими точками тангенциальной скорости.

В отличие от геометрических и топологических подходов, в которых проводится анализ отдельных точек, линий или поверхностей, в текстурных подходах визуализируется общая картина течения, что делает их близкими к методам экспериментальной визуализации. Под текстурой понимается некоторым образом организованный участок изображения, который носит характер как яркостной, так и пространственной регулярности. Выделенные тем или иным способом текстурные элементы объединяются в более общие структуры, а степень их различия определяет результаты сегментации изображения. В зависимости от яркостных и геометрических характеристик текстурных элементов применяются различные методы их выявления и сравнения. Текстурирование производится при помощи вычисления свертки векторного поля скорости и белого шума (интегрирование выполняется вдоль линий тока, выходящих из каждого пикселя результирующего образа). Результаты расчетов интеграла свертки вдоль линии (Line Integral Convolution, LIC) нормализуются, что позволяет определить яркость и контраст каждого пикселя.

**3. Скалярные и векторные поля.** Традиционными объектами для методов визуализации являются скалярные и векторные поля. Скалярными полями представляются, например, температура, плотность и давление, а векторными — скорость и завихренность.

**3.1. Скалярные поля.** К скалярным полям, играющим важную роль в визуализации вихревых течений, относится поле давления  $p(\mathbf{x}, t)$ , величина градиента давления  $|\nabla p|$  и гессиан давления  $\nabla(\nabla p)$  (pressure Hessian). К другим важным скалярным полям относится поле спиральности (helicity)  $h = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{v}$ , представляющее собой скалярное произведение вектора завихренности и вектора скорости. В некоторых случаях находит применение нормализованная спиральность (normalized helicity), которая определяется как косинус угла между векторами завихренности и скорости.

Под визуализацией трехмерных скалярных полей понимается визуализация поверхности, заданной уравнением функции трех аргументов и фиксированного значения этой функции  $\{(x, y, z) \mid f(x, y, z) = c\}$ , где  $f(x, y, z)$  — заданная функция,  $c$  — заданный уровень. Множество точек, удовлетворяющих приведенному соотношению, дает искомую поверхность. На практике восстанавливается не сама поверхность, а поверхность, которая является приближением исходной с помощью треугольников (триангуляция). Имеющиеся методы визуализации позволяют реконструировать трехмерную структуру объекта по множеству параллельных сечений, используя различные способы усиления выразительности результирующего образа [2].

**3.2. Векторные поля.** Численное решение уравнений Навье–Стокса дает распределение скорости в каждом узле вычислительной сетки  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ , где  $t$  — время, а  $\mathbf{x} = (x, y, z)$  представляет собой точку в трехмерном пространстве. Каждая компонента вектора скорости дает скалярное поле, градиент которого находится при помощи дифференцирования в каждом пространственном направлении, что приводит к определению тензора градиента скорости  $\nabla \mathbf{v} = (\partial v_i / \partial x_j)_{ij}$  (velocity gradient tensor).

Движение жидкости представляет собой одновременное перемещение и вращение. Такие движения разделяются, представляя тензор градиента скорости в виде суммы двух тензоров

$$\nabla \mathbf{v} = \mathbf{S} + \boldsymbol{\Omega}, \quad \mathbf{S} = \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^*], \quad \boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{v} - (\nabla \mathbf{v})^*],$$

где  $\mathbf{S}$  — тензор скоростей деформаций (strain rate tensor),  $\boldsymbol{\Omega}$  — тензор завихренности (vorticity tensor). Звездочка относится к сопряженному тензору. Компоненты тензора скоростей деформаций и тензора завихренности находятся из соотношений  $S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$ ,  $\Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$ .

Завихренность представляет собой свойство движения жидкости или газа, при котором в среде существуют вращающиеся элементы объема. Количественной мерой завихренности служит ротор скорости (вектор вихря)  $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v}$ . Компоненты скорости определяются только в узлах сетки, в связи с чем нахождение производных и расчет компонент тензора градиента скорости представляет собой нетривиальную задачу, сложность решения которой зависит от типа используемой сетки.

Интенсивность вихря (vortex strength) служит индикатором того, насколько быстро происходит вра-

пление жидкости вокруг некоторой точки. В двумерном случае, когда вихревое движение наблюдается в окрестности критической точки, тензор градиента скорости имеет два комплексно-сопряженных собственных значения, комплексная часть которых дает интенсивность вихря.

**3.3. Линии тока и траектории меченых частиц.** Для визуализации стационарных и нестационарных течений находят применение различные подходы, основанные на построении линий тока и траекторий меченых частиц.

В стационарном поле течения линии тока (streamline), траектории меченых частиц (pathline) и траектории трассирующих частиц (streakline) совпадают. В том случае, когда вектор скорости зависит от времени, эти линии отличаются друг от друга. Для лучшего понимания структуры потока меченые частицы вводятся в поток в один и тот же момент времени вдоль некоторой выбранной линии или кривой (timeline). Дальнейшее улучшение визуального образа достигается за счет изменения толщины линии, представляющей траекторию меченой частицы, а также при помощи использования геометрических объектов конечного размера (типа лент и полос) в направлении, нормальном к траектории частицы (streamribbon). Применение трубок тока (streamtube) различного радиуса позволяет изобразить расширение потока.

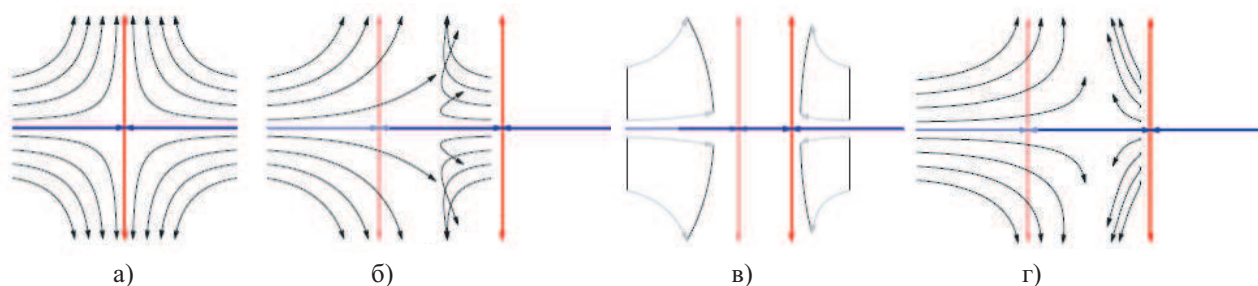


Рис. 4. Визуализация векторного поля скорости при помощи линий тока (а), pathlines (б), timelines (в) и streaklines (г)

Различные способы визуализации нестационарного поля течения поясняет рис. 4. Линии тока в начальный момент времени показаны на рис. 4а. За некоторый интервал времени  $\Delta t$  поток смещается слева направо. Pathlines показывает рис. 4б. Timelines для того же поля течения, но за более короткий интервал времени, показывает рис. 4в. Streaklines, соответствующие моменту времени на рис. 4б, показывает рис. 4г.

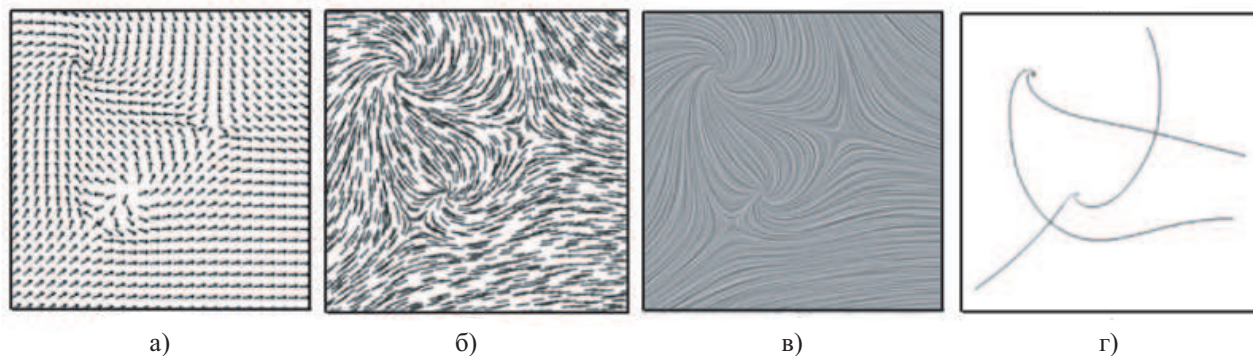


Рис. 5. Визуализация векторного поля скорости вихревого течения на основе стрелок (а), сегментов линий (б), текстурного метода (в) и топологического подхода (г)

Для указания направления течения используются стрелки, наносимые в дискретных точках (arrow plot). Для оценки величины скорости потока применяется подход, в котором линия тока изображается при помощи сегментов линий, длина которых принимается пропорциональной локальной скорости потока (streamlet). Для повышения наглядности изображения картины течения точки, в которых рисуются сегменты линий, выбираются случайным образом. Сравнение визуализации двумерной картины течения на основе различных подходов показывает рис. 5. Общую картину течения при помощи стрелок одинакового размера демонстрирует рис. 5а. Картина течения, полученная при помощи рисования сегментов линий в дискретных точках (рис. 5б), оказывается близкой к рисунку, полученному на основе текстурного подхода (рис. 5в). Топологический подход (рис. 5г) позволяет определить положение критических точек

и структуру потока в их окрестности.

Применение различных способов визуализации векторного поля скорости поясняет рис. 6. Для визуализации течения используются стрелки различного (рис. 6а) или одинакового (рис. 6б) размера. Размер стрелок соответствует величине скорости. Линии тока и направление потока показывают рис. 6в и 6г. На рис. 6в используется размещение базовых точек с равномерным шагом. На рис. 6г применяется другой подход к размещению базовых точек, при этом структура потока становится более наглядной.

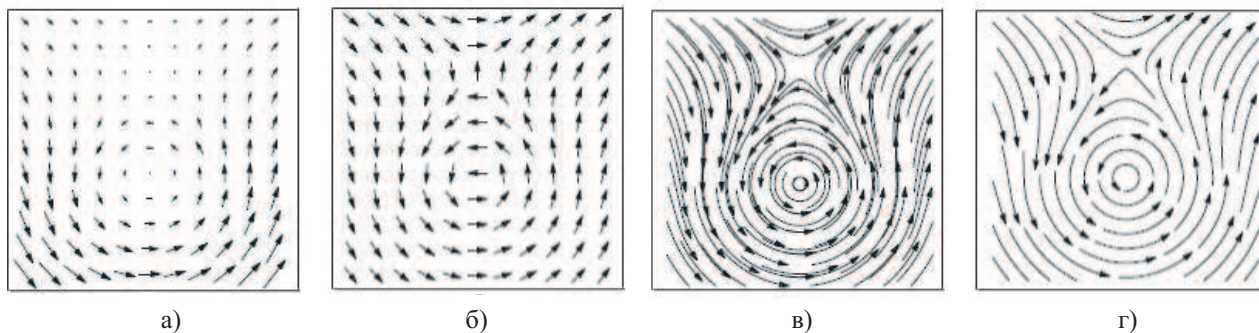


Рис. 6. Визуализация векторного поля скорости при помощи различных подходов

Использование стрелок и других геометрических примитивов для визуализации пространственных течений является ограниченным, что связывается с трудностями понимания направления скорости потока при проектировании трехмерного векторного поля на плоскость. Для повышения наглядности визуального образа в трехмерном случае стрелки подсвечиваются различным цветом в зависимости от ориентации вектора скорости или при помощи использования особым образом выбранного набора базовых точек. В трехмерном случае находят применение теневые образы двумерных областей потока и обработка тензора градиента скорости, которая позволяет получить ускорение, кривизну, закрутку, сдвиг и другие характеристики потока.

Для визуализации нестационарного векторного поля скорости или тензорного поля градиента скорости строятся интегральные кривые, соответствующие различным собственным векторам (tensor line). Недостаток такого подхода заключается в неразличимости соответствующих интегральных кривых в случае равенства собственных значений.

**3.4. Вихревые линии и вихревые трубки.** Построение вихревых линий (vortex line), представляющих собой положения центров вихревых образований в пространстве в различные моменты времени, проводится такими же способами, что и построение линий тока (при помощи интегрирования системы обыкновенных дифференциальных уравнений).

Визуализация распределения и эволюции завихренности в нестационарном поле течения производится при помощи численного интегрирования уравнения переноса завихренности (vorticity transport equation). В уравнении переноса вихря скорости слагаемое  $\omega \cdot \nabla v$  раскладывается на компоненту, параллельную вектору вихря (vorticity stretching), и компоненту, нормальную к направлению вектора вихря (vorticity tilting). Компонента, параллельная вектору завихренности, является ответственной за растяжение и сжатие вихревых трубок. Компонента, нормальная к вектору вихря, указывает на скорость вращения вектора завихренности, но не изменяет величину завихренности и из процесса визуализации обычно исключается. Такой же подход применяется и к слагаемому, описывающему диффузию завихренности (только компонента, параллельная вектору завихренности, оказывает влияние на величину завихренности).

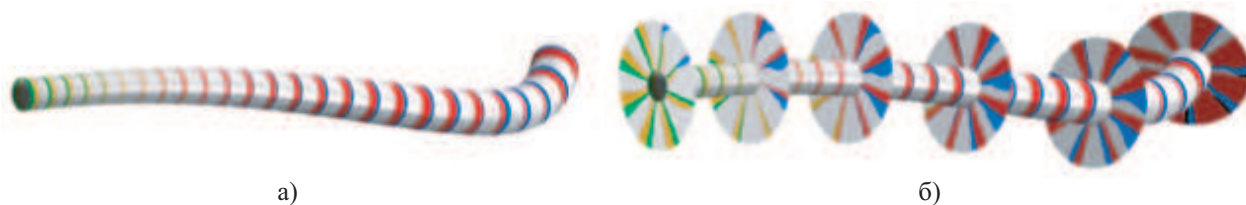



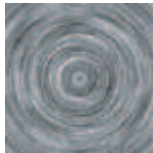




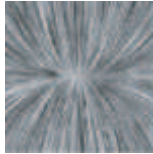

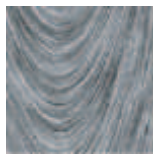




Рис. 7. Визуализация вихревых трубок

Вихревая трубка разделяется на ряд равных сегментов, длина которых определяется пользователем

(рис. 7). Радиус вихревой трубки принимается пропорциональным величине завихренности. Каждый из построенных сегментов используется для визуализации различных механизмов переноса завихренности. Вычисление соответствующих функций (растяжение/сжатие вихревой трубки, диффузия завихренности) проводится в серединной точке каждого сегмента. Визуализацию вихревых трубок поясняет рис. 7а. Светлые и темные кольца указывают на различные механизмы переноса завихренности. Раскраска вихревых трубок используется также для указания на направление потока. Для углубленного анализа используются поперечные сечения вихревых трубок, показанные на рис. 7б. Сечения в виде окружностей разделяются на сектора, каждый из которых соответствует тому или иному механизму переноса завихренности (обычно используется такая же цветовая палитра, что и для визуализации вихревых трубок). Ориентация завихренности визуализируется при помощи специальных засечек (vorticity streamlets).

Таблица 1

Тип критической точки и локальная структура течения

Знак $\text{discr}(A)$	Знак $\text{det}(A)$	Знак $\text{trace}(A)$		
		$> 0$	$= 0$	$< 0$
$< 0$	$> 0$	focus source 	center 	focus sink 
$= 0$	$> 0$	node focus source 		node focus sink 
$> 0$	$> 0$	node source 		node sink 
$> 0$	$= 0$	line source 	shear 	line sink 
$> 0$	$< 0$	saddle source 	saddle div-free 	saddle sink 

**3.5. Особые точки.** Для выяснения типа особой точки производится топологический анализ собственных значений и собственных векторов тензора градиента скорости. Векторное поле скорости представляется в виде  $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$ , где  $A = \nabla \mathbf{v}$  (тензор градиента скорости). Формула  $\mathbf{r} \rightarrow A\mathbf{r}$  при  $\text{det } A \neq 0$  определяет аффинное отображение пространства самого на себя, сохраняющее ориентацию, если  $\text{det } A > 0$ , и меняющее ориентацию в противном случае. Если в точке покоя  $\text{det} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) > 0$ , то индекс критической точки равняется единице (или минус единице в противном случае).

Тип особой точки зависит от характера поведения фазовых траекторий в ее окрестности и определяется корнями характеристического уравнения  $\det(A - \lambda I) = 0$ . Корни характеристического уравнения имеют вид  $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \{ \text{trace}(A) \pm [\text{discr}(A)]^{1/2} \}$ . Дискриминант характеристического уравнения находится из соотношения  $\text{discr}(A) = \text{trace}^2(A) - 4\det(A)$ . Тип критической точки определяется собственными значениями тензора градиента скорости, а также дискриминантом характеристического уравнения. Определение типа критической точки поясняет табл. 1. Для визуализации локальной структуры потока в окрестности сингулярной точки применяется текстурный подход.

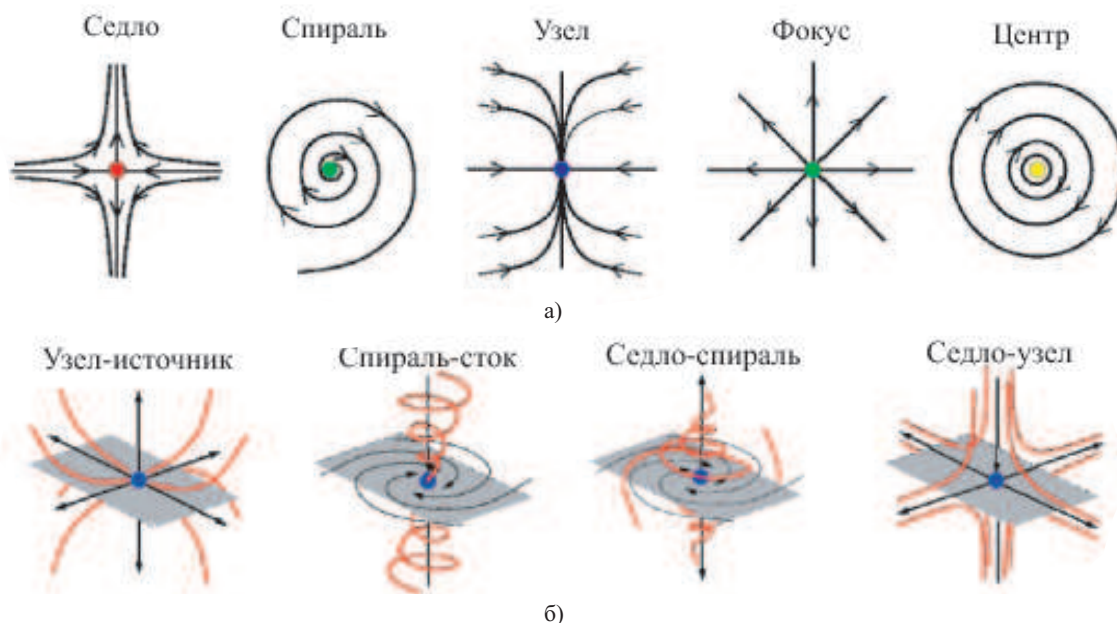


Рис. 8. Локальная структура течения в зависимости от типа критической точки в двумерном (а) и трехмерном (б) случаях

Картину линий тока вблизи критической точки, которая зависит от собственных значений тензора градиента скорости, поясняет рис. 8. В зависимости от знака собственных значений реализуются следующие ситуации.

1. Все корни вещественные и отрицательные. Имеется устойчивый узел (sink node). При положительных корнях получается неустойчивый узел (source node).

2. Все корни вещественные, но не одного знака. Получается седловая точка (saddle). Через седло проходят только две интегральные кривые — сепаратрисы.

3. Имеется пара комплексно-сопряженных корней ( $\lambda_{1,2} = \mu \pm i\nu$ ) и один вещественный корень ( $\lambda_3 \in R$ ). Получается либо узел-фокус (если  $\mu$  и  $\lambda_3$  одного знака), либо седло-фокус (если  $\mu$  и  $\lambda_3$  различного знака). В двумерном случае при  $\mu > 0$  имеется неустойчивый фокус (focus source), а при  $\mu < 0$  — устойчивый фокус (focus sink). В трехмерном случае при  $\mu > 0$  и  $\lambda_3 > 0$  образуется спиральный источник (spiral source), при  $\mu < 0$  и  $\lambda_3 < 0$  образуется спиральный сток (spiral sink), а при  $\mu\lambda_3 < 0$  образуется седловая точка (spiral saddle).

**3.6. Предельные линии тока.** Для визуализации отрывных течений используются предельные линии тока (limiting streamline), представляющие собой линии тока вязкого течения на поверхности, касательная к которой в каждой точке поверхности тела совпадает с направлением вектора касательного напряжения трения в этой точке.

В трехмерном случае линии тока находятся из решения уравнения  $\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \mathbf{v}[\mathbf{r}(t)]$ .

Решением уравнения являются функции  $x(t)$ ,  $y(t)$  и  $z(t)$ , определяющие в параметрическом виде кривую (фазовую траекторию) на фазовой плоскости. Совокупность фазовых траекторий, соответствующих различным начальным условиям, составляет фазовый портрет системы.

Рассмотрим малую окрестность особой точки в грубом случае (при любом достаточно малом изменении правых частей и их производных картина расположения траекторий не меняется). Линии тока в каждой точке, описываемой радиус-вектором  $\mathbf{r}$ , имеют направление векторного поля скорости  $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ . Дифференциал радиус-вектора  $d\mathbf{r}$  вдоль кривой, описываемой уравнением  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ , определяется следующей



формулой:  $dr = \frac{dr(t)}{dt} dt$ . Совместим плоскость  $z_* = 0$  со стенкой, на которой используются условия непротекания и прилипания (рис. 9). Предельные линии тока находятся из решения уравнения  $\frac{dr_*}{dt} = v_*(r_*)$ , где  $dr_*$  определяет локальное направление течения.

Для исследования типа особых точек рассмотрим линеаризованную систему дифференциальных уравнений, которая описывает движение вблизи положения равновесия.

Линеаризуя уравнение в окрестности критической точки (при  $z_* \rightarrow 0$ ), получим  $\frac{dr}{dt} = (Ar_* + b) z_*$ .

Поскольку в критической точке  $v(r_*) = 0$ , то  $r_* = -A^{-1}b$ . Течение в окрестности критической точки характеризуется собственными значениями и собственными векторами тензора градиента скорости  $A = (\partial v / \partial r)_*$ . В зависимости от величины собственных значений определяются координаты критических точек и их тип.

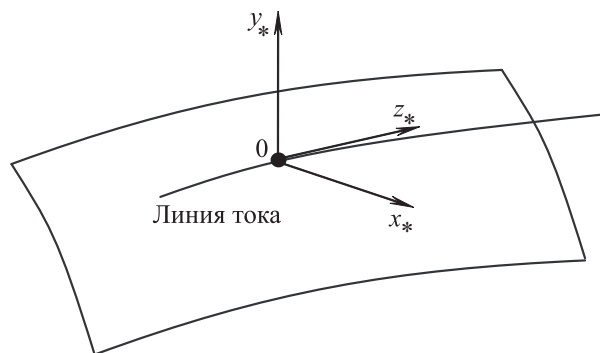


Рис. 9. Построение предельной линии тока

Таблица 2

Методы идентификации вихревых течений

Метод	Область/Линия	Инвариантность	Локальный/Глобальный
Метод спиральности (helicity method)	Линия	Нет	Локальный
Метод параметра закрутки (swirl parameter method)	Область	Нет	Локальный
Метод $\lambda_2$ (lambda-2 method)	Область	Да	Локальный
Метод предиктора–корректора (predictor–corrector method)	Линия	Да	Глобальный
Метод собственных векторов (eigenvector method)	Линия	Нет	Локальный
Метод параллельных векторов (parallel vector method)	Линия	Нет	Локальный
Метод максимальной завихренности (maximum vorticity method)	Линия	Да	Локальный
Метод линий тока (streamline method)	Область	Нет	Глобальный
Комбинаторный метод (combinatorial method)	Область	Нет	Локальный

**4. Визуализация вихревых течений.** Вихрь обычно определяется как область течения, в которой существует значительный уровень завихренности, или как область течения, в которой линии тока являются замкнутыми (рециркуляционная область за плохообтекаемым телом) или спиралевидными. В других подходах для определения центра вихря используется минимум давления или максимум завихренности. Приведенные определения не являются точными [5, 6], и имеются простые примеры вихревых течений, противоречащие этим определениям [4]. Значительный уровень завихренности существует в параллельных сдвиговых течениях, а топология линий тока изменяется за счет применения простого преобразования координат  $y = Ax + vt$ , где  $A$  — ортогональный тензор,  $v$  — скорость.

**4.1. Методы и подходы.** В нестационарных задачах прослеживается не только наличие циркуляционных (вихревых) зон, но и их развитие во времени (процесс зарождения, развития и распада вихря).

Существуют различные подходы к визуализации вихревых течений, использующие то или иное определение вихря и критерии его идентификации [5, 7], в частности, метод спиральности (helicity method) [8], метод параметра закрутки (swirl parameter method) [9], методы, основанные на использовании критериев  $Q$  [5],  $\Delta$  [10] и их модификаций [11],  $\lambda_2$ -метод ( $\lambda_2$  method) [4], метод предиктора–корректора (predictor–corrector method) [12], метод собственных векторов (eigenvector method) [13], метод параллельных векторов (parallel vector method) [14], метод максимальной завихренности (maximum vorticity method) [15], метод линий тока (streamline method) [16], комбинаторный метод (combinatorial method) [17], метод минимума давления [18]. На вихревую область течения указывает положительность лапласиана давления [19], а также наличие комплексных собственных значений тензора градиента скорости [10].

Классификация методов визуализации вихревых течений, данная в табл. 2, проводится в зависимости от того, каким способом определяется вихрь (в области или на линии), является ли метод инвариантным по отношению к преобразованию системы координат, носит подход локальный или глобальный характер.

Вихрь определяется либо линией (определение вихря дает положение его центра), либо областью течения (определение вихря позволяет выявить узлы или ячейки сетки, занятые вихрем). На практике методы идентификации вихрей в какой-либо области течения или ее части оказываются легче реализуемыми, чем методы нахождения вихревых линий, не требуя нахождения точек пересечения вихревых линий с ячейками сетки.

В большинстве подходов предполагается, что течение либо является стационарным, либо вихри перемещаются со скоростью, много меньшей средней скорости движения частиц жидкости. Для идентификации вихрей в нестационарном поле течения необходимо, чтобы метод удовлетворял условию инвариантности (Galilean invariance).

Процесс идентификации вихрей носит локальный или глобальный характер. Локальные методы используют информацию из некоторой окрестности ячейки сетки (подходы, основанные на преобразовании тензора градиента скорости). В глобальных подходах для идентификации вихрей требуется перебор большого числа ячеек сетки (подходы, основанные на использовании линий тока или вихревых линий).

Во многих случаях практическое применение критериев идентификации вихрей оказывается затруднительным, поскольку в некоторых течениях вихревые образования являются достаточно слабыми и не изолированными друг от друга, а также имеют криволинейные границы [14]. Методы, основанные на применении скалярных критериев, например метод максимальной завихренности (для поиска вихрей используется условие  $|\nabla \times \mathbf{v}| \geq \omega_s$ , где  $\omega_s$  — пороговое значение завихренности), дают ложное положение вихрей, поскольку максимум завихренности имеет место также на границах течения из-за сильного сдвига. Методы идентификации вихрей комбинируются с топологическими подходами к визуализации поля течения.

Форма вихря описывается при помощи геометрических или топологических методов [8, 13]. Форма линий тока не является инвариантной к преобразованиям системы отсчета. Для визуализации вихревых течений находят применение различные преобразования уравнений Навье–Стокса (преобразованные формы уравнений получаются при помощи применения операторов  $\text{div}$ ,  $\text{rot}$  и  $\text{grad}$  к исходным уравнениям).

**4.2. Оператор параллельных векторов.** Для идентификации вихрей вводится оператор параллельных векторов (parallel vectors operator), который определяет коллинеарность двух векторов  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{w}$  в каждой точке вихревой линии [14] (условие  $\mathbf{u} \parallel \mathbf{w}$ ). Множество точек, в которых векторы  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{w}$  являются параллельными или один из этих векторов равен нулю, определяется следующим образом:  $S = \{\mathbf{x} : \mathbf{u}(\mathbf{x}) = 0\} \cup \{\mathbf{x} : \exists \lambda, \mathbf{w}(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{u}(\mathbf{x})\}$ .

Величина параметра  $\lambda$  указывает на различие в масштабе векторов, а его знак — на направление векторов (в одну или в противоположные стороны). Из рассмотрения исключаются случаи, для которых  $\lambda = \pm\infty$ . Под векторами  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{w}$  понимаются, в частности, векторы скорости  $\mathbf{v}$  и завихренности  $\boldsymbol{\omega}$ .

Оператор параллельных векторов является достаточно общим, позволяя представить различные подходы к идентификации вихрей с единых позиций [14]. Различные критерии идентификации вихрей на основе оператора параллельных векторов поясняются в табл. 3.

Таблица 3  
Критерии идентификации вихря, использующие оператор параллельных векторов

Критерий	Вектор 1	Вектор 2	Источник
Критерий 1	$\mathbf{v}$	$(\nabla \mathbf{v})\mathbf{v}$	[13]
Критерий 2	$\mathbf{v}$	$\boldsymbol{\omega}$	[8]
Критерий 3	$(\nabla \boldsymbol{\omega})'\boldsymbol{\omega}$	$\boldsymbol{\omega}$	[15]
Критерий 4	$\nabla p$	$\boldsymbol{\omega}$	[12]
Критерий 5	$\nabla p$	$[\nabla(\nabla p)]\nabla p$	[18]

Оператор параллельных векторов определяет множество одномерных особенностей течения в трехмерной области. Для извлечения одномерных особенностей из трехмерной области используется вектор  $\mathbf{z} = \mathbf{u} \times \mathbf{w}$ . Векторы  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{w}$  являются параллельными, если  $\mathbf{z} = (0, 0, 0)'$ , что требует решения системы из трех уравнений.

**4.3. Критерии идентификации.** Идентификация вихревых образований в поле течения проводится по разным критериям. Выбор того или иного критерия для визуализации определяется спецификой решаемой задачи.

$Q$ -критерий ( $Q$ -criterion), предложенный в работе [5]:  $Q = \frac{1}{2} (|\mathbf{\Omega}|^2 - |\mathbf{S}|^2)$ , является одним из критериев, используемых для идентификации вихревых течений. Вихрь определяется как область течения, в которой выполняется неравенство  $Q > 0$  (область течения, в которой норма тензора завихренности превышает норму тензора скоростей деформаций).

В работе [6] вводится модифицированный критерий, предназначенный для описания трехмерных вихревых течений несжимаемой жидкости, который основан на критерии устойчивости траекторий жидких частиц. Модифицированный критерий предлагается также в работе [11] ( $Q$ -criterion in strain basis):  $Q_s = \frac{1}{2} (|\mathbf{\Omega} - \mathbf{\Omega}_s|^2 - |\mathbf{S}|^2)$ , где  $\mathbf{\Omega}_s$  представляет собой тензор, содержащий производные по времени от единичных собственных векторов тензора  $\mathbf{S}$  в лагранжевой системе координат. Области течения, в которой доминирует вращение, соответствует неравенство  $Q_s > 0$ .

Дельта-критерий ( $\Delta$ -criterion), предложенный в работе [10], дается соотношением (используется критерий  $Q$  и детерминант тензора градиента скорости):  $\Delta = \left(\frac{Q}{3}\right)^3 + \left(\frac{\det \nabla \mathbf{v}}{2}\right)^2$ .

Вихрь определяется как область течения, в которой выполняется неравенство  $\Delta > 0$  (в этой области тензор градиента скорости имеет комплексные собственные значения). В вихревой области вращение (антисимметричная часть тензора градиента скорости) доминирует над растяжением или сжатием (симметричная часть тензора градиента скорости).

Для визуализации вихревых линий используется нормализованная спиральность [8]. Нормализованная спиральность изменяется от  $-1$  до  $+1$ . В окрестности центра вихря угол между векторами скорости и завихренности является малым (векторы оказываются почти параллельными, условие  $\mathbf{v} \parallel \boldsymbol{\omega}$ ). В предельном случае, когда векторы скорости и завихренности являются коллинеарными, нормализованная спиральность равняется  $\pm 1$ , а линия тока, проходящая через такую точку, имеет нулевую кривизну (прямая линия). Знак спиральности показывает направление вращения вихря по отношению к направлению потока (по часовой или против часовой стрелки).

В работе [4] для идентификации вихрей применяется критерий  $\lambda_2$  ( $\lambda_2$ -criterion), основанный на декомпозиции тензора градиента скорости на симметричный (strain rate tensor) и антисимметричный (rotation tensor) тензоры. Тензор  $\mathbf{S}^2 + \mathbf{\Omega}^2$  является симметричным и имеет вещественные собственные значения ( $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$ ), два из которых являются отрицательными. Область вихревого течения определяется как область, в которой  $\lambda_2(\mathbf{S}^2 + \mathbf{\Omega}^2) < 0$ , где  $\lambda_2(\mathbf{A})$  представляет собой собственное значение симметричного тензора  $\mathbf{A}$ . При адиабатических условиях данный критерий гарантирует мгновенный минимум давления в двумерном течении [6]. Применение критерия затрудняется в том случае, когда в области, занятой жидкостью, присутствует несколько индивидуальных вихрей.

Метод собственных векторов, предложенный в работе [13], основан на теории критических точек. Собственные значения и собственные векторы тензора градиента скорости, рассчитанные в окрестности критической точки, определяют локальную картину течения около этой точки. Поскольку имеются закрученные течения, не содержащие критических точек, то вектор скорости проектируется на плоскость, нормальную к направлению собственного вектора тензора градиента скорости, соответствующего вещественному собственному значению. Предполагается, что два других собственных значения образуют комплексно-сопряженную пару или равны нулю. В случае их равенства нулю критическая точка становится центром вихря.

В работе [15] для определения центра вихря используется локальный максимум величины завихренности  $|\boldsymbol{\omega}|$  в плоскости, нормальной к вектору завихренности  $\boldsymbol{\omega}$ . Такой подход является приемлемым для визуализации свободных сдвиговых течений, но не свободных сдвиговых слоев, в которых имеет место высокий уровень завихренности, но ее локальный максимум отсутствует. Подход позволяет найти линии максимума завихренности (множество точек, в которых величина завихренности  $|\boldsymbol{\omega}|$  достигает максимального значения в плоскости, нормальной к вектору завихренности  $\boldsymbol{\omega}$ ). При этом вектор завихренности оказывается параллельным градиенту величины завихренности  $\boldsymbol{\omega} \parallel \nabla |\boldsymbol{\omega}|$ . Поскольку  $\nabla(\boldsymbol{\omega}^2) = 2(\nabla \boldsymbol{\omega})' \boldsymbol{\omega}$ , то критерий максимальной завихренности записывается в виде условия коллинеарности двух векторов

$\omega \parallel (\nabla \omega)' \omega$  (вектор завихренности коллинеарен произведению транспонированного тензора градиента завихренности и вектора завихренности).

В методе, предложенном в работе [18], вихревая линия определяется как множество точек, в которых имеет место минимум давления. В каждом узле сетки определяется модифицированное давление, которое при определенных условиях представляет собой статическое давление, и гессиан давления. Производится поиск собственных значений и собственных векторов гессиана (гессиан представляет собой симметричную матрицу, поэтому все три собственных значения являются вещественными). Найденные собственные векторы используются для построения преобразованной системы координат, в которой распределение давления аппроксимируется квадратичной функцией. Минимизация этой функции позволяет найти точки, составляющие вихревую линию. На вихревой линии произведение гессиана давления и градиента давления оказывается параллельным градиенту давления, что дает критерий идентификации вихря в виде  $\nabla p \parallel [\nabla(\nabla p)] \nabla p$ .

**5. Текстурная визуализация.** В текстурном методе применяется параметрическое представление линий тока стационарного течения. В качестве параметра используется длина дуги  $s$ , отсчитываемая вдоль линии тока, а не время  $t$ , прошедшее с начала движения частицы. Применение фильтрации приводит к коррелированности цветов пикселей в направлении линии тока, в то время как коррелированность цветов пикселей в направлении, нормальном к линии тока, отсутствует. Движение меченой частицы описывается уравнением

$$\frac{d\mathbf{x}(s)}{ds} = \frac{\mathbf{v}[\mathbf{x}(s)]}{|\mathbf{v}[\mathbf{x}(s)]|}.$$

Нормализация скорости позволяет получить точки, расположенные на равном расстоянии вдоль линии тока. Для линии тока  $\mathbf{x}(s)$  и начального положения частицы  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(s_0)$  интенсивность пикселя результирующего образа находится при помощи вычисления интеграла свертки

$$I(\mathbf{x}_0) = \int_{s_0-L}^{s_0+L} k(s-s_0)g[\mathbf{x}(s)] ds.$$

Под  $k$  понимается фильтр (weighting function) с шириной пропускания  $2L$ , применяемый вдоль линии тока, которая начинается из точки, соответствующей положению пикселя на рисунке. В качестве функции  $g$  обычно выбирается белый шум (white noise), полученный на том же разрешении, что и результирующий образ. Для повышения выразительности рисунка применяется раскрашивание в соответствии с каким-либо критерием.

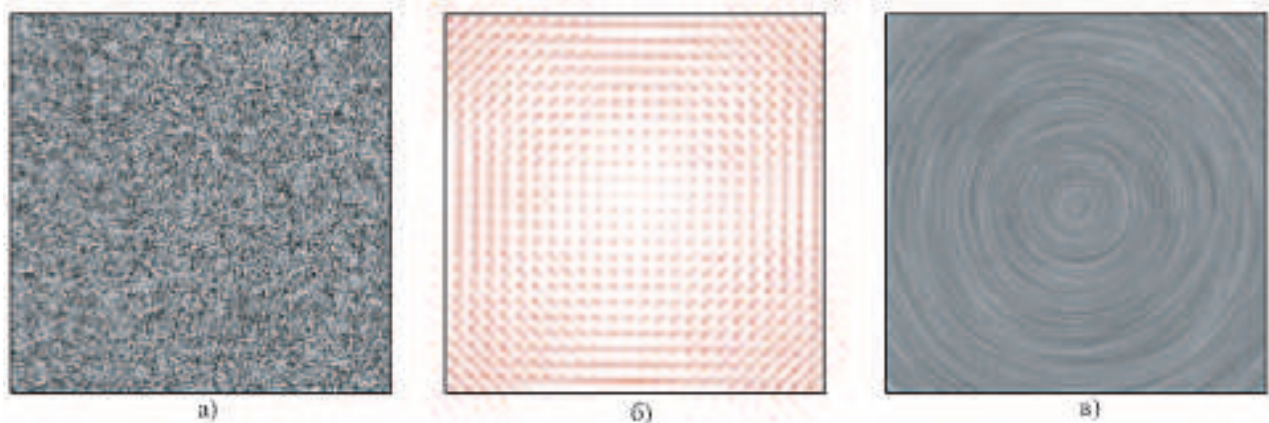


Рис. 10. Результирующий образ (в), полученный в результате свертки двух векторных полей, приведенных на фрагментах (а) и (б)

Применение метода текстурной визуализации (метод LIC) иллюстрирует рис. 10 (используется векторное поле скорости, соответствующее вращению твердого тела). В текстурном подходе используется два векторных поля, соответствующих белому шуму (рис. 10а) и рассчитанному распределению скорости (рис. 10б). Длина стрелки указывает на величину скорости в данной точке. Каждый пиксель выходного рисунка (рис. 10в) соответствует одной ячейке расчетной сетки. В каждой ячейке производится интегрирование линий тока, используя известное поле скорости. Перебираются все ячейки расчетной сетки.

Пикселям, лежащим на одной линии тока, присваиваются одинаковые интенсивности. Для улучшения качества результирующего изображения применяется фильтрация и раскраска линий тока в соответствии с каким-либо критерием [20].

**6. Применение методов визуализации в прикладных задачах.** Приводятся примеры визуального представления решений ряда задач гидро- и газодинамики, связанных с расчетами вихревых течений в струях, каналах и кавернах, а также отрывных течений, возникающих при обтекании тел различной формы. Для визуализации результатов численных расчетов применяется коммерческий пакет Tecplot и среда графического программирования COVISE, возможности которых расширяются за счет разработки макроопределений и плагинов.

**6.1. Течение в каверне с подвижной стенкой.** Развиваются представления о закономерностях формирования пространственных струйных потоков внутри крупномасштабных вихревых структур в пределах замкнутого пространства кубической каверны [21]. Для исследования вихревой структуры течения используются методы качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений. На основе численных расчетов находятся особые точки вихревого течения жидкости в кубической каверне, определяется их тип и местоположение в зависимости от числа Рейнольдса.

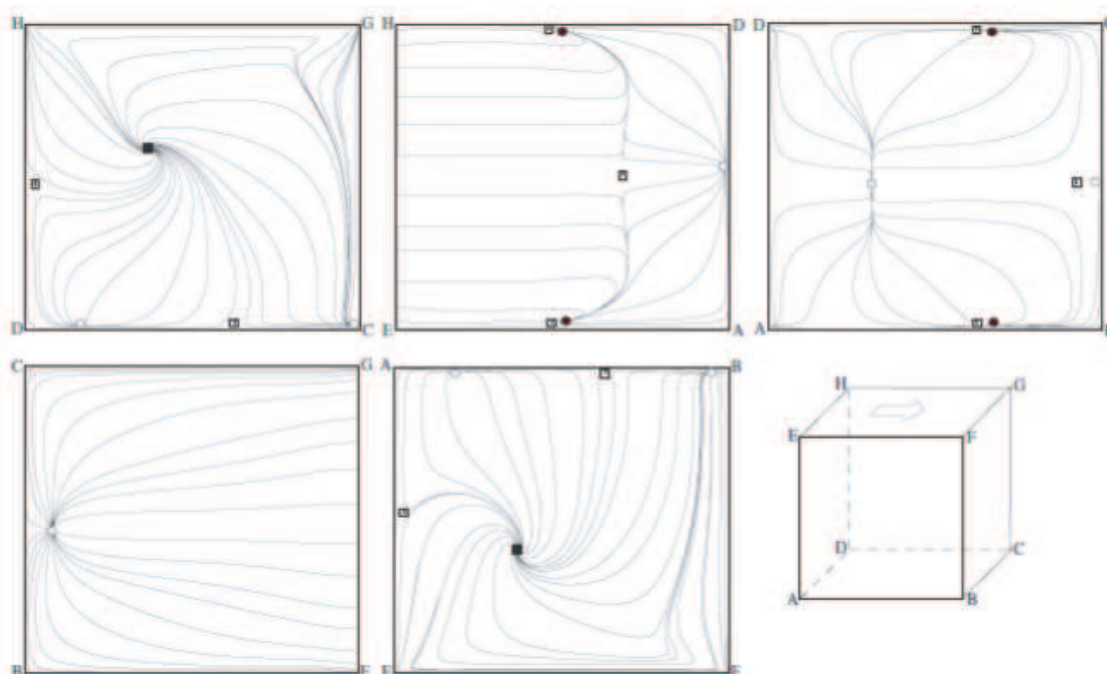


Рис. 11. Картина растекания жидкости по стенкам каверны при  $Re = 1000$  (□ — седловая точка, ● — устойчивый узел, ○ — неустойчивый узел, ■ — устойчивый фокус)

Картини растекания жидкости по стенкам каверны (предельные линии тока), полученные для различных чисел Рейнольдса, показывают наличие особых точек типа фокуса, центра и седла, а также линий стекания и растекания жидкости (рис. 11). Расчеты течения в кубической каверне проводятся на сетке  $81^3$  при помощи конечно-разностного метода и схемы расщепления по физическим процессам [22]. Скорость движения верхней стенки (грань EFGH) выбирается в соответствии с заданным числом Рейнольдса. В соответствии с теоремой Пуанкаре–Бендиксона, имеет место связь между типом и числом особых точек  $\sum N - \sum S = 2$ , где  $N$  соответствует узлу или центру, а  $S$  — седловой точке. В частности,  $\sum S = 10$  и  $\sum N = 12$ , следовательно,  $\sum N = \sum S + 2$ .

Данные численного моделирования показывают существенное влияние пространственного характера движения жидкости на вихревую структуру потока. Уменьшение влияния вязкости (увеличение числа Рейнольдса) приводит к заметной интенсификации вихревого течения в каверне, перемещению центра крупномасштабного вихря к ее геометрическому центру, а также к увеличению размеров вторичных угловых вихрей. Максимальные скорости возвратного течения оказываются ниже по сравнению с двумерным вариантом расчета вследствие притормаживающего влияния боковых стенок [21]. Структура первичного и вторичного вихрей в срединном сечении кубической каверны носит пространственный характер,

указывая на массоподвод в ее центральной зоне и массоотвод в угловых областях каверны.

На дне каверны (грань ABCD) развитие картины растекания с ростом числа Рейнольдса сопровождается ослаблением влияния боковых стенок и превращением источника жидкости при  $Re = 100$  в линию растекания при  $Re = 1000$ . Указанный источник образуется в результате присоединения отрывного потока в серединной части каверны к ее донной грани. Отрыв придонного потока у передней стенки каверны генерирует дополнительный источник. По мере возрастания числа Рейнольдса (при  $Re > 1000$ ) источник превращается в линию растекания.

Взаимодействие потоков, истекающих от указанных источников вдоль днища каверны, происходит по линии растекания жидкости. Следствием этого взаимодействия является образование двух симметричных периферийных стоков на дне каверны. По мере роста числа Рейнольдса эти стоки перемещаются в окрестности ребер боковых граней.

Начиная с  $Re = 400$  на дне каверны формируется серединная зона квазидвумерного отрывного течения. При  $Re = 1000$  в этой области линии тока являются параллельными почти на половине днища. Дальнейшее возрастание числа Рейнольдса до  $Re = 2000$  приводит к искривлению линий тока в центральной части рассматриваемой грани (линия растекания трансформируется в линию взаимодействия двух источников на ее концах).

Течение жидкости по грани, расположенной выше по потоку (грань ADHE), определяется увлекающим воздействием подвижной стенки. С ростом числа Рейнольдса происходит перестройка течения, которая приводит к преобразованию источников в линии растекания, что свидетельствует о формировании квазидвумерного вихря в угловой зоне.

Движение жидкости по грани, расположенной ниже по потоку (грань BCGF), обуславливается взаимодействием с этой стенкой сдвигового потока, сформировавшегося под влиянием движущейся с постоянной скоростью верхней крышки. Линии тока являются практически параллельными боковым стенкам на большей части рассматриваемой грани в направлении дна каверны. На ребре вблизи днища (ребро BC) возникает источник, индуцированный перетеканием жидкости со дна каверны на заднюю стенку. Взаимодействие этого источника с набегающим сверху потоком происходит по линии растекания, которая с ростом числа Рейнольдса становится параллельной дну. Интересно отметить также возникновение в окрестности боковых стенок (ребра BF и CG) двух стоков, отодвигающихся от дна каверны по мере увеличения числа Рейнольдса.

На боковых стенках каверны (грани ABFE и DCGH) реализуется закрученное течение жидкости со стоком из центральной части вихревой структуры. С ростом числа Рейнольдса вихревая структура перемещается к геометрическому центру боковой грани.

**6.2. Течение около сферы.** Структура течения вязкой несжимаемой жидкости в следе за сферой определяется числом Рейнольдса. При числах Рейнольдса ниже 20 течение около сферы является ламинарным, отрыва потока от поверхности сферы не происходит, а течение около сферы остается симметричным. При  $20 < Re < 210$  реализуется стационарный осесимметричный режим обтекания. Отрыв потока от задней части сферы приводит к генерации осесимметричного вихревого кольца позади сферы. В интервале  $210 < Re < 270$  наблюдается устойчивая и несимметричная спутная струя (двойной спутный след). Течение теряет осевую симметрию, но обладает симметрией в азимутальной плоскости, содержащей вихревые структуры (стационарный плоскосимметричный режим). При  $Re = 270$  двойная спутная струя становится неустойчивой и со сферы начинают сходиться вихревые кольца в форме так называемых шпилькообразных вихрей, которые образуют ламинарный след. При  $270 < Re < 400$  наблюдается нестационарный плоскосимметричный режим обтекания. В нестационарном несимметричном режиме при  $400 < Re < 1000$  плоская симметрия теряется и срыв вихрей с поверхности сферы носит нерегулярную природу. Когда число Рейнольдса возрастает до 800, вихревые петли быстро рассеиваются и спутный поток становится турбулентным. Турбулентный режим реализуется при  $Re > 1000$ . При числах Рейнольдса, больших 1500, с обтекаемого тела сходят кольцевые вихри с осями, параллельными направлению набегающего потока.

Расчеты проводятся на неструктурированных сетках при числах Рейнольдса, соответствующих различным режимам течения около сферы. Для каждого режима течения разрешение сетки в пристеночной области подбирается исходя из значения числа Рейнольдса. Сфера радиусом  $R$  располагается в начале координат. Протяженность расчетной области в продольном направлении равняется  $30R$  ( $10R$  перед сферой и  $20R$  позади нее), а в направлении осей  $y$  и  $z$  —  $12R$ . Полная постановка задачи, а также сравнение некоторых численных и экспериментальных данных дается в работе [23].

Моделирование обтекания твердой сферы при  $Re = 400$  проводится на сетке, содержащей  $2.5 \times 10^5$  узлов. Вихревая картина течения около твердой сферы, обработанная в виде траекторий движения мече-

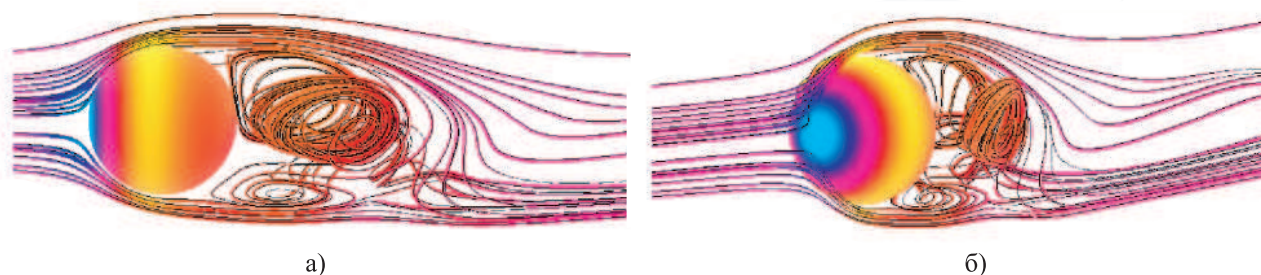


Рис. 12. Визуализация течения около сферы при  $Re = 400$ . Фрагменты (а) и (б) соответствуют различным углам зрения

ных частиц, показана на рис. 12. Рисунок дает представление о структуре трехмерной отрывной зоны за сферой с различных углов зрения.

Для понимания динамики и механизмов отрыва вихревых структур вязкой несжимаемой жидкости в следе за сферой недостаточно интуитивных индикаторов вихрей (минимум давления, линии тока и изоповерхности завихренности). Например, для простейшего случая осесимметричного обтекания сферы при  $Re = 100$  в следе можно выделить две вихревые структуры: кольцо в рециркуляционной области и оболочку вокруг кольца [24]. В то же время, линии тока в системе отсчета, связанной со сферой, визуализируют только кольцо, изолинии завихренности — только оболочку, а изолинии давления не визуализируют ни того, ни другого. Для сложного пространственного течения изоповерхности модуля завихренности показывают не все вихревые структуры течения, а только их часть. Имеются специальные методы визуализации, позволяющие идентифицировать вихри в следе за плохообтекаемым телом [10].

В методе, предложенном в работе [10], фиксируется некоторая точка в поле течения и исследуется поведение линии тока в декартовой системе координат  $\mathbf{x} = (x, y, z)$  с началом в этой точке и движущейся со скоростью этой точки. В окрестности точки  $(0, 0, 0)$  в линейном приближении имеет место соотношение  $\mathbf{v} = d\mathbf{x}/dt = \mathbf{A}\mathbf{x}$ , где  $\mathbf{A}$  — тензор градиента скорости. Для двух комплексно-сопряженных собственных значений тензора выбираются два комплексно-сопряженных собственных вектора, составленных из двух действительных векторов, образующих плоскость, фазовыми траекториями в которой являются либо замкнутые овальные траектории с центром в зафиксированной точке, либо спирали с фокусом в этой точке, что означает наличие вихря в этой точке. Центр вихревого течения определяется как совокупность подобластей течения с комплексно-сопряженными собственными значениями тензора градиента скорости [24].

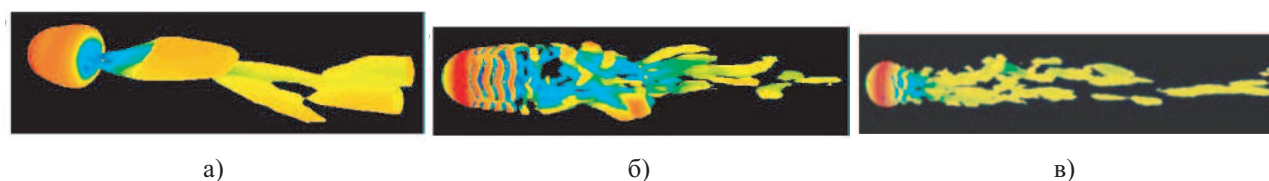


Рис. 13. Визуализация течения около сферы при  $Re = 300$  (а),  $Re = 10^4$  (б) и  $Re = 10^6$  (в)

Для визуализации структуры течения около сферы при различных числах Рейнольдса используются изоповерхности критерия  $Q$ , приведенные на рис. 13. При  $Re = 300$  (вариант 1) расчеты проводятся на неструктурированной сетке, содержащей  $9.6 \times 10^5$  ячеек. При  $Re = 10^4$  (вариант 2) сетка содержит около 2.6 миллиона ячеек (при этом безразмерная пристеночная координата изменяется от 0.2 до 0.7). При  $Re = 10^6$  (вариант 3) используется сетка, содержащая около 3.4 миллиона ячеек (безразмерная пристеночная координата изменяется от 0.3 до 0.9). Вариант 1 соответствует нестационарному плоскосимметричному режиму (картина течения имеет плоскую симметрию), а варианты 2 и 3 — турбулентному режиму течения. Увеличение числа Рейнольдса приводит к тому, что след за сферой становится уже.

Использование топологического подхода позволяет визуализировать предельные линии тока на поверхности сферы (рис. 14). Фрагменты (а) и (б) соответствуют различным ориентациям сферы: вдоль оси  $y$  (рис. 14а) и вдоль оси  $z$  (рис. 14б).

**6.3. Обтекание профиля.** Рассматривается обтекание профиля NASA-0012 потоком вязкой сжимаемой жидкости под углом атаки  $\alpha = 9.25^\circ$ . Числам Рейнольдса и Маха присваиваются значения  $Re = 5 \times 10^4$  и  $M = 0.4$ . Протяженность расчетной области в направлении оси  $x$  составляет  $L_x = 8L$ , а в направлении оси  $y - L_y = 15L$ , где  $L$  — хорда профиля. В направлении оси  $z$  протяженность расчет-

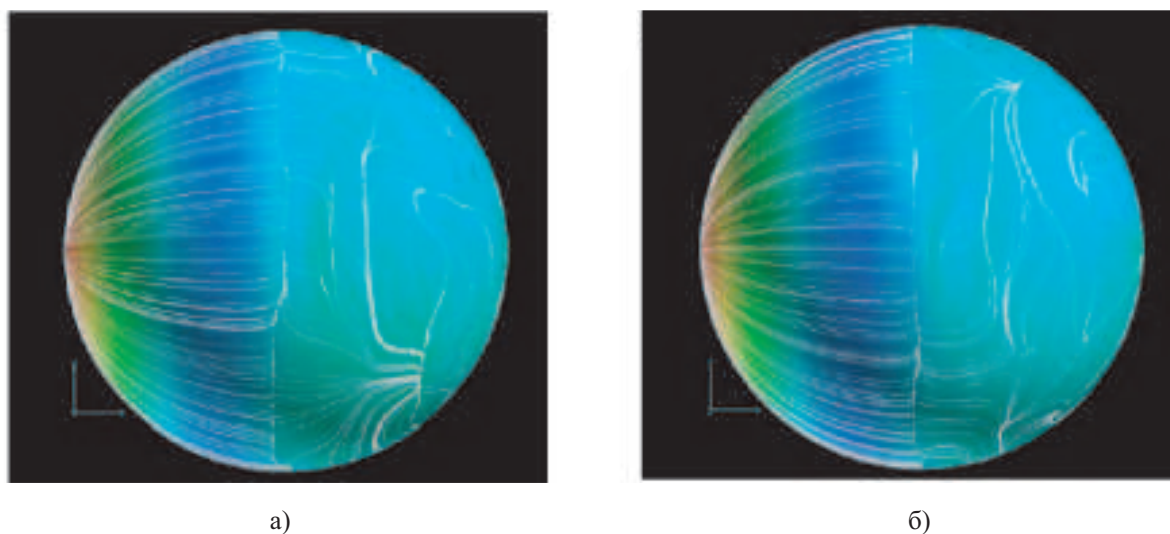


Рис. 14. Предельные линии тока на поверхности сферы при  $Re = 10^4$

ной области полагается равной  $L_z = 0.2L$  (вариант 1, узкая область) и  $L_z = 0.5L$  (вариант 2, широкая область). Шаг по времени равняется  $\Delta t = 1.55 \times 10^{-4}$  с. Для получения статистически достоверной осредненной картины течения делается  $10^4$  шагов по времени. Расчеты проводятся на сетке, содержащей  $640 \times 320 \times 80$  узлов. На всей поверхности профиля  $y^+ < 1$ , а в области  $y^+ < 10$  размещается около 8 узлов сетки. При этом  $\Delta x^+ \leq 12$  и  $\Delta z^+ \leq 18$  для заданных параметров задачи и числа узлов сетки. Подробная постановка задачи приводится в работе [25].

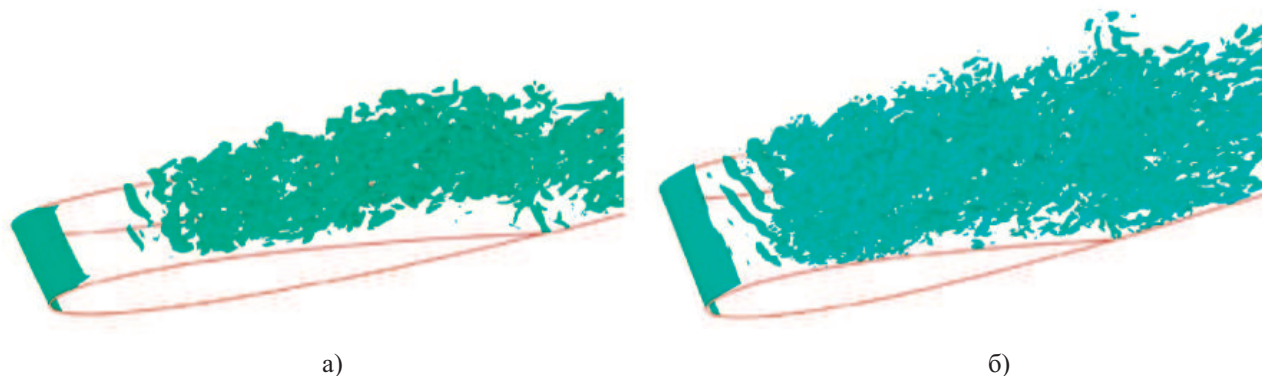


Рис. 15. Изоповерхности критерия  $Q$  при обтекании профиля под ненулевым углом атаки для варианта 1 (а) и варианта 2 (б)

Результаты моделирования крупных вихрей течения около профиля, обработанные в виде поверхностей равного уровня критерия  $Q$ , приводятся на рис. 15. Критерий  $Q$  определяет баланс между локальной завихренностью и сдвиговыми напряжениями в турбулентном потоке. Изоповерхности критерия  $Q$  позволяют выделить крупномасштабную структуру турбулентности и провести анализ вихрей разных масштабов. Хорошо видны вихри, срываемые с верхней поверхности профиля, где формируются зоны наибольшей завихренности течения. Имеется различие в размере и ориентации вихревых структур, рассчитанных в узкой (вариант 1) и в широкой (вариант 2) области. Узкая расчетная область не позволяет воспроизвести весь спектр размеров вихревых структур. Полученная картина течения согласуется в качественном отношении с данными прямого численного моделирования, приведенными в работе [26].

**6.4. Течение в струе.** Проводится моделирование крупных вихрей течения в свободной неизотермической струе. Полная постановка задачи, а также сравнение численных и экспериментальных данных дается в работах [27]. Параметры на срезе сопла соответствуют числу Рейнольдса  $Re = 1.2 \times 10^5$ . Сетка содержит  $350 \times 150 \times 150$  ячеек. Расчеты проводятся в области, длина которой составляет  $L_x = 100r_a$ , а ширина и высота во входном и выходном сечении —  $L_y = L_z = 10r_a$  и  $L_y = L_z = 40r_a$ , где  $r_a$  — радиус выходного сечения сопла. На начальном участке струи шаг по переменной  $x$  полагается постоянным до сечения  $x \sim 10r_a$ , а затем постепенно увеличивается по закону геометрической прогрессии. В поперечном сечении сетка сгущается к краям сопла.



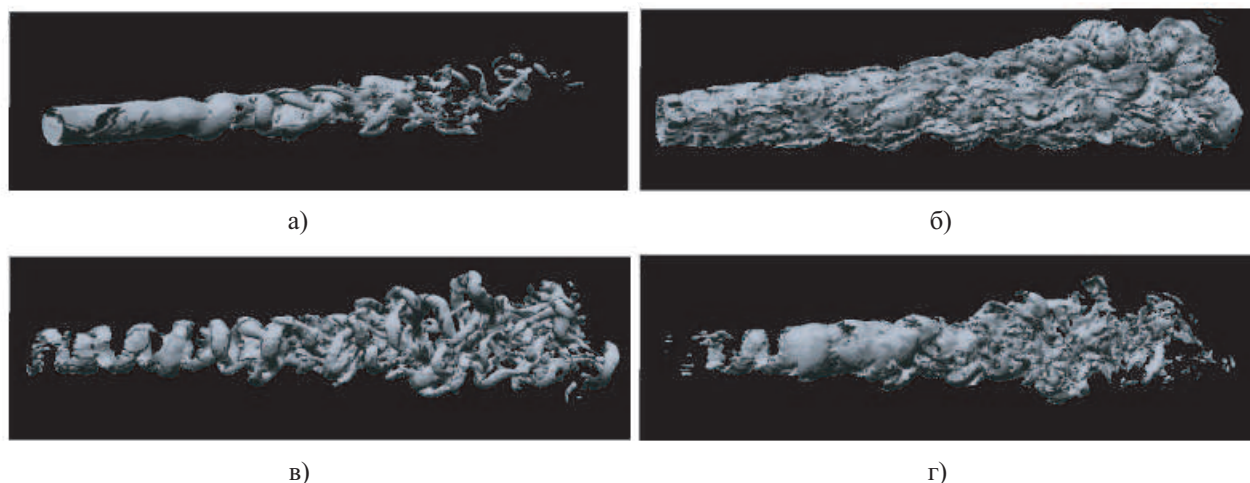


Рис. 16. Визуализация вихревого течения в струе на основе изоповерхностей максимальной завихренности (а), спиральности (б), критерия  $Q$  (в) и критерия  $\lambda_2$  (г)

Вихревую структуру струи иллюстрирует рис. 16. В сдвиговом слое струи присутствуют крупномасштабные вихревые структуры в форме тороидальных осесимметричных вихрей, зарождающихся на некотором расстоянии от среза сопла (порядка одного-двух его диаметров). В области начального участка характерный размер вихревых структур является достаточно малым. Вниз по потоку от начального участка характерный размер вихревых структур увеличивается, а обмен количеством движения между струей и окружающей жидкостью интенсифицируется. Контуры когерентной структуры представляют собой эллипсы, что означает анизотропию турбулентных пульсаций. Генерация вихрей связана с неустойчивостью типа Кельвина–Гельмгольца сдвигового слоя. Максимумы и минимумы завихренности приблизительно соответствуют центрам вихрей.

Полученные данные достаточно точно описывают физику турбулентного струйного течения, включая зарождение кольцевых вихрей и их взаимодействие. Наблюдается развитие когерентных структур — крупномасштабных периодических вихревых образований, развивающихся и взаимодействующих друг с другом на фоне мелкомасштабной турбулентности [3].

**7. Заключение.** Частичная замена натурального эксперимента численным сопряжена со значительным усложнением задачи за счет внедрения нестационарных пространственных моделей, заданных в контрольных объемах со сложной геометрией. Феноменологический анализ результатов решения подобных задач представляется затруднительным без проведения параллельно с численным расчетом процесса непрерывной визуализации. Визуальное представление численных решений зависит не только от возможностей вычислительных ресурсов, но и от уровня решаемых задач математического моделирования и используемых при этом численных методов. Трехмерность моделируемого нестационарного процесса создает существенные трудности для визуального представления результатов, особенно при использовании неструктурированных сеток.

Комбинированный подход к созданию иллюстраций в вычислительной газовой динамике с привлечением методов, разработанных в традиционной иллюстративной графике, обладает большим потенциалом для придания графической выразительности сценам визуализации. Для выявления вихревых структур производится поиск областей течения с пониженным давлением или повышенным уровнем завихренности и применяются различные подходы к идентификации вихревых зон потока. На основе производных скалярных и векторных полей создаются геометрические объекты (изоповерхности, связанные с другими векторными и скалярными величинами), дающие представление о вихревой структуре потока.

Возможности различных методов научной визуализации демонстрируются на примерах численного моделирования течений в струях, каналах и кавернах, а также течений около цилиндра, сферы и крылового профиля.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ (проект 13–07–12079).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. The visualization handbook / Edited by C.D. Hansen, C.R. Johnson. Burlington: Elsevier, 2005.

2. *Бондарев А.Е., Галактионов В.А., Четкин В.М.* Анализ развития концепций и методов визуального представления данных в задачах вычислительной физики // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2011. **51**, № 4. 669–683.
3. *Волков К.Н., Емельянов В.Н.* Моделирование крупных вихрей в расчетах турбулентных течений. М.: Физматлит, 2008.
4. *Jeong J., Hussain F.* On the identification of a vortex // Journal of Fluid Mechanics. 1995. **285**. 69–94.
5. *Hunt J.C.R., Wray A.A., Moin P.* Eddies, stream, and convergence zones in turbulent flows // Technical Report № CTR-S88. Palo Alto: Center for Turbulent Research, 1988. 193–208.
6. *Haller G.* An objective definition of a vortex // Journal of Fluid Mechanics. 2005. **525**. 1–26.
7. *Jiang M., Machiraju R., Thompson D.* Detection and visualization of vortices // The Visualization Handbook. Orlando: Academic Press, 2005. 287–301.
8. *Levy Y., Degani D., Seginer A.* Graphical visualization of vortical flows by means of helicity // AIAA Journal. 1990. **28**, N 8. 1347–1352.
9. *Berdahl C.H., Thompson D.S.* Eduction of swirling structure using the velocity gradient tensor // AIAA Journal. 1993. **31**, N 1. 97–103.
10. *Chong M.S., Perry A.E., Cantwell B.J.* A general classification of three-dimensional flow fields // Physics of Fluids. A. 1990. **2**, N 5. 765–777.
11. *Tabor M., Klapper I.* Stretching and alignment in chaotic and turbulent flows // Chaos, Solitons and Fractals. 1994. **4**, N 6. 1031–1055.
12. *Banks D.C., Singer B.A.* A predictor–corrector technique for visualizing unsteady flow // IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics. 1995. **1**, N 2. 151–163.
13. *Sujudi D., Haimes R.* Identification of swirling flow in 3D vector fields // AIAA Paper. 1995. N 95-1715.
14. *Roth M., Peikert R.* A higher-order method for finding vortex core lines // Proceedings of the IEEE Conference on Visualization, 18–23 October 1998, Research Triangle Park, NC, USA. Los Alamos: IEEE Press, 1998. 143–150.
15. *Straun R.C., Kenwright D.N., Ahmad J.* Computer visualization of vortex wake systems // AIAA Journal. 1999. **37**, N 4. 511–512.
16. *Sadarjoen I.A., Post F.H., Ma B., Banks D.C., Pagendarm H.-G.* Selective visualization of vortices in hydrodynamic flows // Proceedings of the IEEE Conference on Visualization, 18–23 October 1998, Research Triangle Park, NC, USA. Los Alamos: IEEE Press, 1998. 419–422.
17. *Jiang M., Machiraju R., Thompson D.* A novel approach to vortex core region detection // Proceedings of the 4th Joint Eurographics/IEEE TCVG Symposium on Visualization (VisSym-02), 27–29 May, Barcelona, Spain. Aire-la-Ville: Eurographics Association, 2002. 217–225.
18. *Kida S., Miura H.* Identification and analysis of vortical structures // European Journal of Mechanics. B/Fluids. 1998. **17**, N 4. 471–488.
19. *Dubief Y., Delcayre F.* On coherent-vortex identification in turbulence // Journal of Turbulence. 2000. **1**, N 1. 1–22.
20. *Knowles R.D., Finnis M.V., Saddington A.J., Knowles K.* Planar visualization of vortical flows // Proc. of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering. 2006. **220**, N 6. 619–627. doi 10.1243/09544100JAERO75
21. *Волков К.Н.* Топология течения вязкой несжимаемой жидкости в кубической камере с подвижной крышкой // Инженерно-физический журнал. 2006. **79**, № 2. 86–91.
22. *Волков К.Н.* Реализация схемы расщепления на разнесенной сетке для расчета нестационарных течений вязкой несжимаемой жидкости // Вычислительные методы и программирование. 2005. **6**. 269–282.
23. *Volkov K.N.* Combustion of single aluminium droplet in two-phase flow // Heterogeneous Combustion. New York: Nova Science, 2010. 191–260.
24. *Gushchin V.A., Kostomarov A.V., Matyushin P.V.* 3D visualization of the separated fluid flows // Journal of Visualization. 2004. **7**, N 2. 143–150.
25. *Volkov K., Mitchell S., Handsaker S.* Aerodynamics and performance of wind turbines integrated in the existing infrastructure // Advances in Energy Research and Developments. Little Rock: ORIC Publ., 2014. 129–188.
26. *Jones L.E., Sandberg R.D., Sandham N.D.* Direct numerical simulations of forced and unforced separation bubbles on an airfoil at incidence // Journal of Fluid Mechanics. 2008. **602**. 175–207.
27. *Volkov K.N.* Large-eddy simulation of turbulence-induced aero-optical effects in free shear and wall bounded flows // Turbulent Flows: Prediction, Modeling and Analysis. New York: Nova Science, 2013. 27–69.

Поступила в редакцию  
24.01.2016

---

### Methods and Concepts of Vortex Flow Visualization in the Problems of Computational Fluid Dynamics

K. N. Volkov<sup>1</sup>, V. N. Emelyanov<sup>2</sup>, I. V. Teterina<sup>3</sup>, and M. S. Yakovchuk<sup>4</sup>

<sup>1</sup> *Ustinov Baltic State Technical University, Faculty of Rocket and Space Engineering; ulitsa Pervaya Krasnoarmeiskaya 1, St. Petersburg, 190005, Russia; Dr. Sci., Leading Scientist, e-mail: dsci@mail.ru*

<sup>2</sup> *Ustinov Baltic State Technical University, Faculty of Rocket and Space Engineering; ulitsa Pervaya Krasnoarmeiskaya 1, St. Petersburg, 190005, Russia; Dr. Sci., Professor, e-mail: vlademelyanov@gmail.com*

<sup>3</sup> *Ustinov Baltic State Technical University, Faculty of Rocket and Space Engineering; ulitsa Pervaya Krasnoarmeiskaya 1, St. Petersburg, 190005, Russia; Ph.D., Associate Professor, e-mail: yaiv@mail.ru*

<sup>4</sup> *Ustinov Baltic State Technical University, Faculty of Rocket and Space Engineering; ulitsa Pervaya Krasnoarmeiskaya 1, St. Petersburg, 190005, Russia; Ph.D., Associate Professor, e-mail: mihailiyakovchuk@gmail.com*

Received January 24, 2016

**Abstract:** A number of concepts and methods for the visual representation of numerical results obtained when solving fluid and gas dynamics problems related to the simulation of vortex flows are considered. Approaches to the visualization of vortex flows based on the use of various definitions and criteria of vortex identification are discussed. Examples of visual representation of the solutions to some fluid and gas dynamics problems requiring the calculation of vortex flows in jets, channels and cavities as well as separated flows arising from the flow over bodies of different shapes are given. Visualization of the results obtained with the vortex resolved methods for turbulence simulations is also discussed.

**Keywords:** scientific visualization, computational fluid dynamics, fluid flow, vortex, vector field, tensor field, jet, cavity, channel.

### References

1. C. D. Hansen and C. R. Johnson (Eds.), *The Visualization Handbook* (Elsevier, Burlington, 2005).
2. A. E. Bondarev, V. A. Galaktionov, and V. M. Chechetkin, "Analysis of the Development Concepts and Methods of Visual Data Representation in Computational Physics," *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.* **51** (4), 669–683 (2011) [*Comput. Math. Math. Phys.* **51** (4), 624–636 (2011)].
3. K. N. Volkov and V. N. Emel'yanov, *Large Eddy Simulation in Calculations of Turbulent Flows* (Fizmatlit, Moscow, 2008) [in Russian].
4. J. Jeong and F. Hussain, "On the Identification of a Vortex," *J. Fluid Mech.* **285**, 69–94 (1995).
5. J. C. R. Hunt, A. A. Wray, and P. Moin, *Eddies, Stream, and Convergence Zones in Turbulent Flows*, Report CTR-S88 (Center for Turbulent Research, Palo Alto, 1988), pp. 193–208.
6. G. Haller, "An Objective Definition of a Vortex," *J. Fluid Mech.* **525**, 1–26 (2005).
7. M. Jiang, R. Machiraju, and D. Thompson, "Detection and Visualization of Vortices," in *The Visualization Handbook* (Orlando, Academic, 2005), pp. 287–301.
8. Y. Levy, D. Degani, and A. Seginer, "Graphical Visualization of Vortical Flows by Means of Helicity," *AIAA J.* **28** (8), 1347–1352 (1990).
9. C. H. Berdahl and D. S. Thompson, "Eduction of Swirling Structure Using the Velocity Gradient Tensor," *AIAA J.* **31** (1), 97–103 (1993).
10. M. S. Chong, A. E. Perry, and B. J. Cantwell, "A General Classification of Three-Dimensional Flow Fields," *Phys. Fluids A* **2** (5), 765–777 (1990).
11. M. Tabor and I. Klapper, "Stretching and Alignment in Chaotic and Turbulent Flows," *Chaos Solitons Fract.* **4** (6), 1031–1055 (1994).
12. D. C. Banks and B. A. Singer, "A Predictor–Corrector Technique for Visualizing Unsteady Flow," *IEEE Trans. Vis. Comput. Graph.* **1** (2), 151–163 (1995).
13. D. Sujudi and R. Haines, "Identification of Swirling Flow in 3D Vector Fields," *AIAA Paper 95-1715* (1995).
14. M. Roth and R. Peikert, "A Higher-Order Method for Finding Vortex Core Lines," in *Proc. IEEE Conf. on Visualization, Research Triangle Park, USA, October 18–23, 1998* (IEEE Press, Los Alamos, 1998), pp. 143–150.
15. R. C. Strawn, D. N. Kenwright, and J. Ahmad, "Computer Visualization of Vortex Wake Systems," *AIAA J.* **37** (4), 511–512 (1999).

16. I. A. Sadarjoen, F. H. Post, B. Ma, et al., "Selective Visualization of Vortices in Hydrodynamic Flows," in *Proc. IEEE Conf. on Visualization, Research Triangle Park, USA, October 18–23, 1998* (IEEE Press, Los Alamos, 1998), pp. 419–422.
17. M. Jiang, R. Machiraju, and D. Thompson, "A Novel Approach to Vortex Core Region Detection," in *Proc. 4th Joint Eurographics/IEEE TCVG Symp. on Visualization (VisSym-02), Barcelona, Spain, 27–29 May 27–29, 2002* (Eurographics Association, Aire-la-Ville, 2002), pp. 217–225.
18. S. Kida and H. Miura, "Identification and Analysis of Vortical Structures," *Eur. J. Mech. B Fluids* **17** (4), 471–488 (1998).
19. Y. Dubief and F. Delcayre, "On Coherent-Vortex Identification in Turbulence," *J. Turbul.* **1** (1), 1–22 (2000).
20. R. D. Knowles, M. V. Finnis, A. J. Saddington, and K. Knowles, "Planar Visualization of Vortical Flows," *Proc. of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering* **220** (6), 619–627 (2006). doi 10.1243/09544100JAERO75
21. K. N. Volkov, "Topology of an Incompressible Viscous-Fluid Flow in a Cubic Cavity with a Moving Cover," *Inzh. Fiz. Zh.* **79** (2), 86–71 (2006) [*J. Eng. Phys. Thermophys.* **79** (2), 295–300 (2006)].
22. K. N. Volkov, "An Implementation of the Splitting Scheme on Staggered Grids for Computing Nonstationary Flows of Viscous Incompressible Fluid," *Vychisl. Metody Programm.* **6**, 269–282 (2005).
23. K. N. Volkov, "Combustion of Single Aluminium Droplet in Two-Phase Flow," in *Heterogeneous Combustion* (Nova Science, New York, 2011), pp. 191–260.
24. V. A. Gushchin, A. V. Kostomarov, and P. V. Matyushin, "3D Visualization of the Separated Fluid Flows," *J. Vis.* **7** (2), 143–150 (2004).
25. K. Volkov, S. Mitchell, and S. Handsaker, "Aerodynamics and Performance of Wind Turbines Integrated in the Existing Infrastructure," in *Advances in Energy Research and Developments* (ORIC Publ., Little Rock, 2014), pp. 129–188.
26. L. E. Jones, R. D. Sandberg, and N. D. Sandham, "Direct Numerical Simulations of Forced and Unforced Separation Bubbles on an Airfoil at Incidence," *J. Fluid Mech.* **602**, 175–207 (2008).
27. K. N. Volkov, "Large-Eddy Simulation of Turbulence-Induced Aero-Optical Effects in Free Shear and Wall Bounded Flows," in *Turbulent Flows: Prediction, Modeling and Analysis* (Nova Science, New York, 2013), pp. 27–69.