УДК 519.6 doi 10.26089/NumMet.v16r229

# ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ПОСТРОЕНИЮ ОДНОТОЧЕЧНЫХ ИТЕРАЦИОННЫХ МЕТОДОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ОДНОГО ПЕРЕМЕННОГО

**А. Н. Громов**[1]

Предложен подход к построению одноточечных итерационных методов для решения нелинейных уравнений одного переменного. Подход основан на использовании понятия полюса в качестве особой точки и на применении критерия сходимости Коши. Показано, что такой подход приводит к новым итерационным процессам высшего порядка, которые имеют более широкую область сходимости по сравнению с известными методами. Доказаны теоремы сходимости и получены оценки скорости сходимости. Для многочленов, имеющих только действительные корни, итерационный процесс сходится для любого начального приближения. В общем случае для действительных корней трансцендентных уравнений сходимость имеет место при выборе начального приближения в окрестности корня.

**Ключевые слова:** итерационные процессы, метод Ньютона, логарифмическая производная, простой полюс, сжатое отображение, метод третьего порядка, особая точка, трансцендентные уравнения.

Классический способ построения итерационных формул для численного решения скалярных уравнений вида $f(x) = 0$ был предложен Ньютоном, затем последовали многочисленные модификации и усовершенствования метода Ньютона. Этим вопросам посвящена обширная литература, из которой отметим работы [1–11]. Сравнительный обзор, посвященный методу Ньютона и его обобщениям, можно найти в книге [12].

В настоящей статье предложен новый подход к построению одноточечных итерационных функций, который приводит к новому классу итерационных процессов с различной скоростью сходимости, обладающих свойством нелокальной сходимости для многочленов, имеющих только действительные корни.

Пусть точка $z^*$ — простой нуль аналитической функции $f(z)$, которая в некоторой окрестности $G = \{z \mid |z - z^*| < \rho\}$ комплексной плоскости является однозначной и не имеет в $G$ других нулей и особых точек. Иными словами, если $\Gamma \subset G$ — контур, а $N$ и $P$ являются соответственно числом корней и полюсов, лежащих внутри $\Gamma$, то

$$N = 1, \quad P = 0. \tag{1}$$

Известно [13], что логарифмическая производная $f'(z)/f(z)$ в точке $z^*$ имеет простой полюс, а логарифмический вычет функции $f(z)$ относительно контура $\Gamma$ определяется равенством

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = N - P. \tag{2}$$

Из формул (1) и (2) следует, что разложение Лорана логарифмической производной в окрестности точки $z^*$ имеет вид

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{a_{-1}}{z - z^*} + \tilde{g}(z),$$

где $a_{-1} = 1$ и $\tilde{g}(z)$ — функция, аналитическая в $G$. Следовательно, в $G$ имеем представление

$$-\frac{f'(z)}{f(z)} = -\frac{1}{z - z^*} + g(z). \tag{3}$$

Пусть $\{z^m\}$ — некоторая последовательность, сходящаяся к корню $z^*$. Известно [13], что последовательность $\{z^m\}$ является фундаментальной, т.е.

$$\lim_{m\to\infty}\left(z^{m+p} - z^m\right) = 0 \tag{4}$$

[1] Одинцовский гуманитарный университет, факультет управления, ул. Ново-Спортивная, д. 3, 143 000, г. Одинцово; доцент, e-mail: an_gromov@rambler.ru

© Научно-исследовательский вычислительный центр МГУ им. М. В. Ломоносова

при любом натуральном $p$. Имея в виду соотношение (4) и то, что в формуле (3) $z^m - z^* \underset{m\to\infty}{\to} 0$, потребуем от членов последовательности $\{z^m\}$ выполнения следующего равенства:

$$\left[-\frac{1}{z^m - z^*} + g\left(z^m\right)\right]\left(z^{m+1} - z^m\right) = 1. \tag{5}$$

В силу (3) это равносильно

$$-\frac{f'\left(z^m\right)}{f\left(z^m\right)}\left(z^{m+1} - z^m\right) = 1. \tag{6}$$

Решив (6) относительно $z^{m+1}$, получаем приведенную в [1] формулу классического метода Ньютона, что указывает на разумность такого подхода. Однако главное заключается в том, что формула (5) допускает простое и широкое обобщение.

Если в формуле (5), например путем дифференцирования, повысить кратность полюса первого множителя, то для сохранения равенства соответствующим образом следует изменить порядок малости второго множителя. Эта процедура порождает целый класс итерационных процессов вида

$$\frac{1}{s!}\left(-\frac{f'\left(z^m\right)}{f\left(z^m\right)}\right)^{(s)}\left(z^{m+1} - z^m\right)^{s+1} = 1. \tag{7}$$

Ограничимся далее случаем действительных значений аргумента. Например, при $s = 1$ из формулы (7) находим

$$x^{m+1} = x^m \pm \frac{1}{\sqrt{\left(-\frac{f'(x^m)}{f(x^m)}\right)'}}. \tag{8}$$

Рассматривая (8) в малой окрестности корня $x^*$, получаем, в частности, обобщение формулы Ньютона из работ [2, 3] и метод третьего порядка Чебышева, приведенный в [1]. Действительно, так как

$$\left(-\frac{f'\left(x\right)}{f\left(x\right)}\right)' = \frac{f'^2\left(x\right) - f\left(x\right)f''\left(x\right)}{f^2\left(x\right)}, \tag{9}$$

то, считая $f'\left(x^*\right) \neq 0$ и опуская для краткости аргумент, шаг итерации можем представить следующим образом:

$$\Delta_1 = \frac{1}{\sqrt{\left(-\frac{f'}{f}\right)'}} = \frac{|f|}{\sqrt{f'^2 - f\cdot f''}} = \frac{|f\cdot f'|}{f'^2\sqrt{1 - \frac{f\cdot f''}{f'^2}}}.$$

Из знаков в формуле (8) выбираем плюс, если начальное приближение $x^0$ лежит левее корня, и минус в противном случае. Поскольку $f\left(x\right)f'\left(x\right) < 0$ при $x < x^*$ и $f\left(x\right)f'\left(x\right) > 0$ при $x > x^*$, то итерации (8) можно записать в виде

$$x^{m+1} = x^m - \frac{f\left(x^m\right)\cdot f'\left(x^m\right)}{f'^2\left(x^m\right)\sqrt{1 - \frac{f(x^m)\cdot f''(x^m)}{f'^2(x^m)}}}.$$

Преобразуем подкоренное выражение, считая окрестность корня настолько малой, что выполняется неравенство $\left|f\left(x\right)f''\left(x\right)/f'^2\left(x\right)\right| < 1$. Тогда

$$\sqrt{1 - \frac{f\left(x^m\right)\cdot f''\left(x^m\right)}{f'^2\left(x^m\right)}} \approx 1 - \frac{1}{2}\frac{f\left(x^m\right)\cdot f''\left(x^m\right)}{f'^2\left(x^m\right)}$$

и получаем формулу

$$x^{m+1} = x^m - \frac{2f\left(x^m\right)\cdot f'\left(x^m\right)}{2f'^2\left(x^m\right) - f\left(x^m\right)\cdot f''\left(x^m\right)},$$

которая (с точностью до обозначений) совпадает с полученной в работе [2] формулой (11) и с формулой (3) работы [3].

Если же корень не сохранять в знаменателе, а представить в виде

$$1\Bigg/\sqrt{1 - \frac{f\left(x^m\right)\cdot f''\left(x^m\right)}{f'^2\left(x^m\right)}} = \left(1 - \frac{f\left(x^m\right)\cdot f''\left(x^m\right)}{f'^2\left(x^m\right)}\right)^{-1/2} \approx 1 + \frac{1}{2}\frac{f\left(x^m\right)\cdot f''\left(x^m\right)}{f'^2\left(x^m\right)},$$

приходим к методу Чебышева 3-го порядка

$$x^{m+1} = x^m - \frac{f\left(x^m\right)}{f'\left(x^m\right)} - \frac{f^2\left(x^m\right) \cdot f''\left(x^m\right)}{2f'^3\left(x^m\right)},$$

который приведен в работе [1], формула (11).

Рассмотрим нелокальное поведение итераций (7) в задаче отыскания корней алгебраического уравнения.

Приведем несколько формул для логарифмической производной, когда функция $f\left(x\right)$ является многочленом. Известно [14], что

$$\frac{f'\left(x\right)}{f\left(x\right)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x - x_i}, \tag{10}$$

где $x_i$ — корни многочлена. Из (10) находим

$$\left(-\frac{f'\left(x\right)}{f\left(x\right)}\right)^{(2l-1)} = (2l-1)! \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\left(x - x_i\right)^{2l}}, \quad l = 1,\ 2, \ldots\ . \tag{11}$$

Если многочлен имеет только действительные корни, то из формулы (11) следует, что для любого действительного $x$ справедливо неравенство

$$\left(-\frac{f'\left(x\right)}{f\left(x\right)}\right)^{(2l-1)} > 0, \quad l = 1,\ 2, \ldots\ . \tag{12}$$

Неравенство (12) лежит в основе наших рассуждений.

Рассмотрим многочлен

$$f\left(x\right) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^{n-i} = a_0 \prod_{i=1}^{n} \left(x - x_i\right) \tag{13}$$

с действительными корнями. Без ограничения общности можно считать, что коэффициент $a_0 = 1$ и $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n$.

Положим

$$a = \max\left\{\,|a_1|\,,\ |a_2|\,, \ldots,\ |a_n|\right\}, \quad R = 1 + a.$$

Известно [1], что все корни многочлена (13) расположены в круге

$$|z|\ \leqslant\ R. \tag{14}$$

Из неравенства (14) следует, что если выбрать начальное приближение $x^0 \leqslant -R$, то корни многочлена (13) лежат правее точки $x^0$.

Имея в виду формулы (7) и (8), введем обозначения

$$L\left(x\right) = \frac{1}{(2l-1)!} \left(-\frac{f'\left(x\right)}{f\left(x\right)}\right)^{(2l-1)}, \quad l = 1,\ 2, \ldots\ , \tag{15}$$

$$\Delta_{2l-1}\left(x\right) = \frac{1}{\sqrt[2l]{L\left(x\right)}}. \tag{16}$$

**Теорема 1.** *Пусть начальное приближение $x^0$ таково, что $x^0 \neq x_i$, $i = 1, \ldots, n$, и правее точки $x^0$ лежит хотя бы один корень многочлена* (13)*. Тогда последовательность $\{x^m\}$, вычисляемая по формуле*

$$x^{m+1} = \Phi\left(x^m\right), \quad m = 0, 1, \ldots, \tag{17}$$

*где $\Phi\left(x\right) = x + \Delta_{2l-1}\left(x\right)$ — итерационная функция и $\Delta_{2l-1}\left(x\right)$ — шаг итерации, определяемый формулами* (15), (16)*, сходится к ближайшему справа от $x^0$ корню, т.е. обладает нелокальной сходимостью.*

**Замечание.** Форма записи итерационного процесса (15), (16) удобна для теоретических исследований, однако имеет устранимую особенность в нулях функции $f(x)$. Поэтому при практической реализации алгоритма целесообразно вычислить входящие в (15) производные отношения $f'\left(x\right)/f\left(x\right)$ и, подставив результат в (16), перевернуть полученную дробь. Соответствующие примеры приведены далее (см. (40) и (41)).

**Доказательство.** Рассмотрим случай $x^0 \leqslant -R$. Будем считать, что искомый корень $x_1$ имеет кратность $k$, т.е. $x_1 = x_2 = \dots = x_k$. В силу соотношения (11) для многочленов функцию (15) можем представить в виде

$$L(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(x-x_i)^{2l}}, \tag{18}$$

а шаг итерации (16) записать следующим образом:

$$\Delta_{2l-1}(x) = \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(x-x_i)^{2l}}\right]^{-1/(2l)} = |x-x_1|\,\alpha(x). \tag{19}$$

Здесь

$$\alpha(x) = \frac{1}{\sqrt[2l]{k}}\left(1 + \frac{1}{k}\sum_{j\geqslant k+1}\left(\frac{x-x_1}{x-x_j}\right)^{2l}\right)^{-1/(2l)}. \tag{20}$$

Из формулы (20) имеем оценку

$$0 < \alpha(x) \leqslant \frac{1}{\sqrt[2l]{k}}. \tag{21}$$

Согласно (17), (19) и (20) можно записать

$$x^{m+1} = x^m + |x^m - x_1|\,\alpha(x^m). \tag{22}$$

Из соотношений (21), (22) следует, что если $x^m < x_1$, то и $x^{m+1} \leqslant x_1$. Поскольку это неравенство выполнено для начального приближения, то последовательность $\{x^m\}$ является монотонно возрастающей, ограничена сверху значением $x_1$ и имеет $x_1$ своим пределом. Классическое доказательство сходимости дает и асимптотику скорости.

Так как

$$0 \leqslant \left|\frac{x^m - x_1}{x^m - x_j}\right| < 1,$$

то из (20), (21) находим

$$\frac{1}{\sqrt[2l]{n}} \leqslant \alpha(x^m) \leqslant \frac{1}{\sqrt[2l]{k}}, \tag{23}$$

где $n$ — степень многочлена и $k$ — кратность искомого корня.

Для многочленов вида $f(x) = (x-x_1)^n$, когда кратность корня совпадает со степенью многочлена, в формуле (20) отсутствуют слагаемые с индексами $j \geqslant k+1$, и для таких многочленов $\alpha(x) \equiv 1/\sqrt[2l]{n}$.

Формулы (22), (23) дают

$$\left|x^{m+1} - x_1\right| = |x^m - x_1|\,(1 - \alpha(x^m)). \tag{24}$$

Исключая $x^m$ из правых частей (24) и используя неравенство (23), получаем

$$\left|x^{m+1} - x_1\right| = \left|x^0 - x_1\right| \prod_{i=0}^{m}\left(1 - \alpha\left(x^i\right)\right) \leqslant \left|x^0 - x_1\right|\left(1 - \frac{1}{\sqrt[2l]{n}}\right)^{m+1}. \tag{25}$$

Из неравенства (25) следует, что последовательность $\{x^m\}$ сходится к $x_1$ со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем $1 - 1/\sqrt[2l]{n}$.

Рассмотрим случай, когда начальное приближение выбрано из промежутка между двумя корнями, т.е. $x_s < x^0 < x_{s+1}$ и корень $x_{s+1}$ имеет кратность $k$, т.е. $x_{s+1} = x_{s+2} = \ldots = x_{s+k}$. Из (16), (18) для $\Delta_{2l-1}(x)$ можем записать

$$\Delta_{2l-1}(x) = |x - x_{s+1}|\,\alpha(x), \tag{26}$$

где

$$\alpha(x) = \frac{1}{\sqrt[2l]{k}}\left(1 + \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{s}\left(\frac{x-x_{s+1}}{x-x_i}\right)^{2l} + \frac{1}{k}\sum_{j=s+k+1}^{n}\left(\frac{x-x_{s+1}}{x-x_j}\right)^{2l}\right)^{-1/(2l)}. \tag{27}$$

Из (17), (26) имеем

$$x^{m+1} = x^m + |x^m - x_{s+1}|\,\alpha(x^m), \tag{28}$$

где функция $\alpha(x)$ определена выше.

Так как для функции (27) сохраняется оценка (21), то последовательность $\{x^m\}$, вычисляемая по формуле (28), является монотонно возрастающей и ограниченной сверху значением $x_{s+1}$ и имеет $x_{s+1}$ своим пределом. В рассматриваемом случае не работает оценка (23), так как из (27) следует равенство $\lim\limits_{x\to x_s} \alpha(x) = 0$. Покажем, что функция (27) является монотонно возрастающей в промежутке $(x_s,\, x_{s+1})$. Сумма по $i$ с ростом $x$ убывает, так как разности $(x - x_{s+1})^{2l}$ в числителе уменьшаются, а знаменатели $(x - x_i)^{2l}$ возрастают. Исследуем поведение второй суммы. Пусть

$$S(x) = \sum_{j=s+k+1}^{n} \left(\frac{x - x_{s+1}}{x - x_j}\right)^{2l}.$$

Вычисляем производную $S'(x)$:

$$\begin{aligned} S'(x) &= \frac{d}{dx}\left[(x - x_{s+1})^{2l} \sum_{j=s+k+1}^{n} \frac{1}{(x - x_j)^{2l}}\right] = \\ &= 2l\,(x - x_{s+1})^{2l-1} \sum_{j=s+k+1}^{n} \frac{1}{(x - x_j)^{2l}} + (x - x_{s+1})^{2l} \sum_{j=s+k+1}^{n} \frac{-2l}{(x - x_j)^{2l+1}} = \\ &= 2l\,(x - x_{s+1})^{2l-1} \sum_{j=s+k+1}^{n} \frac{1}{(x - x_j)^{2l}} \left(1 - \frac{x - x_{s+1}}{x - x_j}\right). \end{aligned}$$

Так как $(x - x_{s+1})^{2l-1} < 0$, а $0 \leqslant (x - x_{s+1})/(x - x_j) < 1$, то $\left(1 - \dfrac{x - x_{s+1}}{x - x_j}\right) > 0$ и $S'(x) < 0$. Следовательно, $S(x)$ также монотонно убывает.

Таким образом, в промежутке между двумя корнями $(x_s,\, x_{s+1})$ функция $\alpha(x)$ является монотонно возрастающей и

$$0 < \alpha\left(x^0\right) \leqslant \alpha\left(x^m\right) \leqslant \frac{1}{\sqrt[2l]{k}}. \tag{29}$$

Равенство (24) заменяется на

$$\left|x^{m+1} - x_{s+1}\right| = \left|x^m - x_{s+1}\right| \left(1 - \alpha\left(x^m\right)\right). \tag{30}$$

В силу (29), (30) оценка (25) принимает вид

$$\left|x^{m+1} - x_{s+1}\right| \leqslant \left|x^0 - x_{s+1}\right| \left(1 - \alpha\left(x^0\right)\right)^{m+1}.$$

Иными словами, выбрав любое $x_s < x^0 < x_{s+1}$, итерациями (17) находим корень $x_{s+1}$, что доказывает теорему и *нелокальный характер сходимости* рассматриваемого метода.

**Замечание.** Теорема 1 указывает на возможность (для многочленов с действительными корнями) найти все корни один за другим, не прибегая к процедуре отделения корней. Это подтвердили проведенные численные эксперименты. Оценка скорости сходимости итерационного процесса дается ниже теоремой 3.

Если начальное приближение $x^0 \geqslant R$ и корни многочлена занумерованы так, что $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_n$, то итерационную функцию следует взять в виде $\Phi(x) = x - \Delta_{2l-1}(x)$. Тогда приведенные выше рассуждения с соответствующими изменениями сохраняют силу.

Формулы (3)–(7) записаны для случая, когда $z^*$ — простой корень. Доказательство теоремы 1 показывает, что наличие кратных корней у многочленов замедляет сходимость. Свидетельством этому являются верхние границы в оценках (23), (29). В связи с кратностью корня представляет интерес следующее утверждение.

**Теорема 2.** *Пусть многочлен* $f(x) = (x - x_{s+1})^k\, \psi(x)$ *и* $\psi(x_{s+1}) \neq 0$ *(значение* $s$ *любое от* 0 *до* $n-1$*), т.е.* $x_{s+1}$ *является корнем кратности* $k$*, а* $\{x^m\}$ *— последовательность, построенная для этого многочлена по формуле* (17) *и имеющая* $x_{s+1}$ *своим пределом. Тогда*

$$\lim_{m\to\infty} \frac{f\left(x^{m+1}\right)}{f\left(x^m\right)} = \left(1 - \frac{1}{\sqrt[2l]{k}}\right)^k,$$

*где* $2l-1$ *— порядок производной в формуле* (15).

**Доказательство.** Имеем очевидное равенство

$$\frac{f\left(x^{m+1}\right)}{f\left(x^{m}\right)}=\frac{\left(x^{m+1}-x_{s+1}\right)^{k}\psi\left(x^{m+1}\right)}{\left(x^{m}-x_{s+1}\right)^{k}\psi\left(x^{m}\right)}.$$

Так как по условию теоремы $\psi\left(x_{s+1}\right)\neq 0$, то $\lim\limits_{m\to\infty}\left(\psi\left(x^{m+1}\right)/\psi\left(x^{m}\right)\right)=1$. Следовательно,

$$\lim_{m\to\infty}\frac{f\left(x^{m+1}\right)}{f\left(x^{m}\right)}=\lim_{m\to\infty}\left(\frac{x^{m+1}-x_{s+1}}{x^{m}-x_{s+1}}\right)^{k}.$$

Разности в числителе и знаменателе правой части этого равенства имеют одинаковые знаки, поэтому из формул (24), (30) следует

$$\lim_{m\to\infty}\frac{f\left(x^{m+1}\right)}{f\left(x^{m}\right)}=\lim_{m\to\infty}\left(1-\alpha\left(x^{m}\right)\right)^{k}.$$

Из (20), (27) имеем

$$\lim_{m\to\infty}\alpha\left(x^{m}\right)=\alpha\left(x_{s+1}\right)=\frac{1}{\sqrt[2l]{k}}.$$

Объединяя два последних равенства, получаем утверждение теоремы.

Покажем возможность использования итераций (7) и для решения трансцендентных уравнений, а также оценим скорость сходимости, исследуя итерации с традиционных позиций метода сжатых отображений. Однако предварительно сделаем следующее замечание. Наличие у многочлена комплексных корней может приводить к тому, что в окрестности искомого корня $x^*$ будем иметь $\alpha\left(x\right)>1$ (см. (20), (27)) для $x\neq x^*$, что влечет расходимость итерационного процесса (17), поскольку итерационная функция не учитывает необходимость перемены знака для шага итерации. В предлагаемой ниже теореме перемена знака учитывается.

**Теорема 3.** *Пусть* $x^*$ *— простой нуль функции* $f\left(x\right)$*, для которой в некоторой окрестности точки* $x^*$

1. *существует логарифмическая производная* $f'\left(x\right)/f\left(x\right)$*,*
2. *справедливо представление* (3)*,*
3. *функция* $g\left(x\right)$ *имеет непрерывные производные до порядка* $4l-1$*,* $(l=1,\ 2,\ldots)$ *включительно.*

*Определим итерационную функцию формулой*

$$\Phi\left(x\right)=x+\delta\left(x\right)\Delta_{2l-1}\left(x\right),\quad l=1,\,2,\ldots,\tag{31}$$

*где* $\Delta_{2l-1}\left(x\right)$ *— шаг итерации* (16) *и* $\delta\left(x\right)=-\operatorname{sign}\left[f'\left(x\right)/f\left(x\right)\right]$*. Тогда функция* $\Phi\left(x\right)$ *обладает свойствами*

$$\Phi\left(x^*\right)=x^*,\quad \Phi^{(s)}\left(x^*\right)=0\tag{32}$$

*при* $s=1,\,2,\,\ldots,\,2l$*. Иными словами, в некоторой окрестности точки* $x^*$ *отображение* $y=\Phi\left(x\right)$ *является сжимающим, а соответствующий итерационный процесс имеет порядок сходимости* $2l+1$*.*

**Доказательство.** Исходя из представления (3), для функции (15) находим

$$L\left(x\right)=\frac{1}{\left(x-x^*\right)^{2l}}+h\left(x\right),\tag{33}$$

где $h\left(x\right)=g^{(2l-1)}\left(x\right)\big/(2l-1)!$. Используя (33), представим знаменатель формулы (16) в виде

$$\left(L\left(x\right)\right)^{1/(2l)}=\left(\frac{1}{\left(x-x^*\right)^{2l}}\left(1+\left(x-x^*\right)^{2l}h\left(x\right)\right)\right)^{1/(2l)}=\frac{1}{\left|x-x^*\right|}\left(1+\left(x-x^*\right)^{2l}h\left(x\right)\right)^{1/(2l)}.\tag{34}$$

В силу представления (3) и ограниченности функции $g\left(x\right)$ в достаточно малой окрестности корня $x^*$ справедливо равенство

$$-\operatorname{sign}\left[f'\left(x\right)/f\left(x\right)\right]=\delta\left(x\right)=-\operatorname{sign}\left(x-x^*\right).\tag{35}$$

Из формул (16), (34), (35) следует, что для любого $x$ из рассматриваемой окрестности имеем представление

$$\delta(x)\,\Delta_{2l-1}(x) = -\frac{(x-x^*)}{\sqrt[2l]{1+(x-x^*)^{2l}\,h(x)}}. \tag{36}$$

Пусть $\tau = -1/(2l)$, $u(x) = (x-x^*)^{2l}\,h(x)$ и окрестность корня $x^*$ такова, что $|u(x)| < 1$. Тогда справедливо разложение

$$(1+u)^{\tau} = 1 + u\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\tau(\tau-1)\dots(\tau-k+1)}{k!}\,u^{k-1},$$

или

$$(1+u(x))^{\tau} = 1 - (x-x^*)^{2l}\,H(x), \tag{37}$$

где

$$H(x) = -h(x)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\tau(\tau-1)\dots(\tau-k+1)}{k!}\left[(x-x^*)^{2l}\,h(x)\right]^{k-1}.$$

Так как в силу условий теоремы функция, стоящая в левой части равенства (37), имеет производные до порядка $2l$ включительно, то и функция $H(x)$ имеет производные до порядка $2l$ включительно. Из (36), (37) находим, что в рассматриваемой окрестности корня справедлива формула

$$\delta(x)\,\Delta_{2l-1}(x) = -(x-x^*) + (x-x^*)^{2l+1}\,H(x).$$

Подставив это выражение в (31), получаем итерационную функцию

$$\Phi(x) = x^* + (x-x^*)^{2l+1}\,H(x). \tag{38}$$

Из (38) находим $\Phi(x^*) = x^*$, а по формуле Лейбница имеем

$$[\Phi(x)]^{(s)} = \sum_{i=0}^{s} C_s^i\,[H(x)]^{(s-i)}\left[(x-x^*)^{2l+1}\right]^{(i)}, \quad s = 1, 2, \dots, 2l. \tag{39}$$

Поскольку существуют производные $[H(x)]^{(s-i)}$, то из (39) следует, что $\Phi^{(s)}(x^*) = 0$ для любой производной до порядка $2l$ включительно. Теорема доказана.

**Следствие.** Формула (8) определяет итерационный процесс третьего порядка сходимости, так как $l = 1$.

Для $l = 2$ имеем итерации пятого порядка с шагом, который вычисляем по формулам (15), (16):

$$\Delta_3(x) = \frac{|f(x)|}{\sqrt[4]{\left(f^{(1)}\right)^4 + \frac{2}{3}f^2 f^{(1)}\,f^{(3)} - 2f\,\left(f^{(1)}\right)^2 f^{(2)} + \frac{1}{2}f^2\left(f^{(2)}\right)^2 - \frac{1}{6}f^3 f^{(4)}}} \tag{40}$$

(в знаменателе опущен аргумент $x$).

Проведенные численные эксперименты полностью согласуются с теоретическими оценками. Например, для многочлена $f(x) = (x-2.83)(x-4.1)(x-5.37)$ корень $x_2 = 4.1$ можно найти методом Ньютона, когда начальное приближение $x^0 \in (3.55;\ 4.65)$. Если же, например, $x^0 = 3.52$ или $x^0 = 4.67$, то ньютоновские итерации сходятся к $x_1 = 2.83$. Для сходимости метода Чебышева третьего порядка к корню $x_2 = 4.1$ требуется еще более точная его локализация. Напротив, формула (8), которую в силу равенства (9) можно записать в виде

$$x^{m+1} = x^m + \frac{|f(x^m)|}{\sqrt{f'^2(x^m) - f(x^m)\,f''(x^m)}}, \tag{41}$$

обеспечивает сходимость к $x_2 = 4.1$ при $x^0 = x_1 + h$ для любого значения $0 < h < x_2 - x_1$. Однако чем меньше шаг $h$, тем медленнее итерации “уходят” от корня $x_1$, что является платой за возможность не привлекать процедур отделения корней. Оценка скорости “ухода” следует из представления (38) в окрестности корня.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Березин И.С., Жидков Н.П.* Методы вычислений. Т. 1. М.: Наука, 1966.
2. *Доморяд А.П.* Численные и графические методы решения уравнений // Энциклопедия элементарной математики. Алгебра. М.; Л.: ГИТТЛ, 1951. 312–417.
3. *Gerlach J.* Accelerated convergence in Newton's method // SIAM Rev. 1994. **36**, N 2. 272–276.
4. *Ford W.F., Pennline J.A.* Accelerated convergence in Newton's method // SIAM Rev. 1996. **38**, N 4. 658–659.
5. *Ортега Дж., Рейнболдт В.* Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. М.: Мир, 1975.
6. *Stoer J., Bulirsch R.* Introduction to numerical analysis. New York: Springer, 1993.
7. *Трауб Дж.* Итерационные методы решения уравнений. М.: Мир, 1985.
8. *Жанлав Т., Чулуунбаатар О.* Сходимость непрерывного аналога метода Ньютона для решения нелинейных уравнений // Вычислительные методы и программирование. 2009. **10**. 402–407.
9. *Zafar F., Mir N.A.* A generalized family of quadrature based iterative methods // General Mathematics. 2010. **18**, N 4. 43–51.
10. *Baghmisheh M., Mahmoudi Y., Jahangirirad M.* A new modification of Newton's method by Gauss integration formula // Life Science Journal. 2013. **10**. 288–291.
11. *Omran H.H.* Modified third order iterative method for solving nonlinear equations // Journal of AI-Nahrain University. 2013. **16**, N 3. 239–245.
12. *Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копченова Н.В.* Вычислительные методы для инженеров. М.: Высшая школа, 1994.
13. *Маркушевич А.И.* Теория аналитических функций. Т. 1. М.: Наука, 1967.
14. *Прасолов В.В.* Многочлены. М.: МЦНМО, 2003.


Поступила в редакцию
10.02.2015

---

## An Approach for Constructing One-Point Iterative Methods for Solving Nonlinear Equations of One Variable

**A. N. Gromov** [1]

[1] *Odintsovo Humanitarian University, Faculty of Management; ulitsa Novo-Sportivnaya 3, Odintsovo, Moscow Region, 143000, Russia; Associate Professor, e-mail: an_gromov@rambler.ru*

Received February 10, 2015

**Abstract:** An approach for constructing one-point iterative methods for solving nonlinear equations of one variable is proposed. This approach is based on the concept of a pole as a singular point and on using Cauchy's convergence criterion. It is shown that such an approach leads to new iterative processes of higher order with larger convergence domains compared to the known iterative methods. Convergence theorems are proved and convergence rate estimates are obtained. For polynomials having only real roots, the iterative process converges for any initial approximation to the sought root. Generally, in the case of real roots of transcendental equations, the convergence takes place when an initial approximation is chosen near the sought root.

**Keywords:** iterative processes, Newton's method, logarithmic derivative, simple pole, contracted mapping, third order method, singular point, transcendental equations.

### References


1. I. S. Berezin and N. P. Zhidkov, *Computing Methods* (Nauka, Moscow, 1966; Oxford, Pergamon, 1965).
2. A. P. Domoryad, "Numerical and Graphical Methods for Solving Equations," in *Encyclopaedia of Elementary Mathematics* (Gostekhizdat, Moscow, 1951), pp. 312–417.
3. J. Gerlach, "Accelerated Convergence in Newton's Method," SIAM Rev. **36** (2), 272–276 (1994).
4. W. F. Ford and J. A. Pennline, "Accelerated Convergence in Newton's Method," SIAM Rev. **38** (4), 658–659 (1996).
5. J. M. Ortega and W. C. Rheinboldt, *Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables* (Academic, New York, 1970; Mir, Moscow, 1975).

6. J. Stoer and R. Bulirsch, *Introduction to Numerical Analysis* (Springer, New York, 1993).

7. J. F. Traub, *Iterative Methods for the Solution of Equations* (Chelsea, New York, 1982; Mir, Moscow, 1985).

8. T. Zhanlav and O. Chuluunbaatar, "Convergence of a Continuous Analog of Newton's Method for Solving Nonlinear Equations," Vychisl. Metody Programm. **10**, 402–407 (2009).

9. F. Zafar and N. A. Mir, "A Generalized Family of Quadrature Based Iterative Methods," General Math. **18** (4), 43–51 (2010).

10. M. Baghmisheh, Y. Mahmoudi, and M. Jahangirirad, "A New Modification of Newton's Method by Gauss Integration Formula," Life Sci. J. **10**, 288–291 (2013).

11. H. H. Omran, "Modified Third Order Iterative Method for Solving Nonlinear Equations," J. AI-Nahrain Univ. **16** (3), 239–245 (2013).

12. A. A. Amosov, Yu. A. Dubinskii, and N. V. Kopchenova, *Computational Methods for Engineers* (Vysshaya Shkola, Moscow, 1994) [in Russian].

13. A. I. Markushevich, *The Theory of Analytic Functions* (Nauka, Moscow, 1967; Chelsea, New York, 1977).

14. V. V. Prasolov, *Polynomials* (Moscow Tsentr Mat. Obrazov., Moscow, 2003; Springer, Berlin, 2004).