УДК 519.62 doi 10.26089/NumMet.v16r223

ОБ ОДНОМ ПРИБЛИЖЕННОМ АНАЛИТИЧЕСКОМ МЕТОДЕ ИНТЕГРИРОВАНИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

О. Б. Арушанян[1], Н. И. Волченскова[2], С. Ф. Залеткин[3]

Описано использование смещенных рядов Чебышёва для интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Данный подход основан на аппроксимации решения задачи Коши для нормальной системы обыкновенных дифференциальных уравнений и его производной частичными суммами ряда Фурье по смещенным многочленам Чебышёва первого рода. Коэффициенты рядов вычисляются посредством итерационного процесса с применением квадратурной формулы Маркова. Подчеркнуто, что благодаря своим аппроксимационным свойствам частичные суммы рядов Чебышёва стали основой для построения приближенного аналитического метода интегрирования дифференциальных уравнений. Наряду с общими вопросами рассмотрены примеры по применению частичных сумм ряда Чебышёва для приближенного представления решения задачи Коши на заданном отрезке для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: обыкновенные дифференциальные уравнения, приближенные аналитические методы, численные методы, ортогональные разложения, смещенные ряды Чебышёва, квадратурные формулы Маркова.

Рассматривается задача Коши для нормальной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$y' = f(x,y), \qquad y(x_0)=y_0, \qquad x_0 \leqslant x \leqslant x_0+X, \tag{1}$$

при условии, что функция $f(x,y)$ непрерывна в области определения системы вместе с частными производными до некоторого порядка. Предполагается также, что на отрезке $[x_0,\, x_0+X]$ задача Коши (1) имеет единственное решение.

Предлагается следующий приближенный метод решения задачи (1). Метод основан на разложении правой части системы $y'(x)=f\bigl(x,y(x)\bigr)$, взятой на решении $y(x)$, на частичном сегменте $[x_0,\, x_0+h]$, $h \leqslant X$, в ряд Фурье по смещенным многочленам Чебышёва первого рода (далее такой ряд будем называть смещенным рядом Чебышёва):

$$\Phi(\alpha)={\sum_{i=0}^{\infty}}' a_i^*[\Phi]T_i^*(\alpha), \quad a_i^*[\Phi]=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^1 \frac{\Phi(\alpha)T_i^*(\alpha)}{\sqrt{\alpha(1-\alpha)}}\,d\alpha, \qquad \Phi(\alpha)=f\bigl(x_0+\alpha h,\, y(x_0+\alpha h)\bigr), \quad 0\leqslant\alpha\leqslant 1. \tag{2}$$

Если коэффициенты этого разложения (коэффициенты Чебышёва) известны, то решение задачи (1) на отрезке $[x_0,\, x_0+h]$ можно легко получить также в виде смещенного ряда Чебышёва

$$y(x_0+\alpha h)={\sum_{i=0}^{\infty}}' a_i^*[y]T_i^*(\alpha), \qquad a_i^*[y]=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^1 \frac{y(x_0+\alpha h)}{\sqrt{\alpha(1-\alpha)}}\,T_i^*(\alpha)\,d\alpha \tag{3}$$

(штрих у знака суммы означает, что слагаемое с индексом 0 берется с дополнительным множителем $1/2$). Коэффициенты Чебышёва решения связаны с коэффициентами Чебышёва его производной следующими соотношениями:

$$a_i^*\bigl[y(x_0+\alpha h)\bigr]=\frac{h}{4i}\bigl(a_{i-1}^*[\Phi]-a_{i+1}^*[\Phi]\bigr), \qquad i>0, \tag{4}$$

[1] Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Научно-исследовательский вычислительный центр, Ленинские горы, 119992, Москва; зав. лабораторией, e-mail: arush@srcc.msu.ru
[2] Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Научно-исследовательский вычислительный центр, Ленинские горы, 119992, Москва; ст. науч. сотр., e-mail: nad1946@srcc.msu.ru
[3] Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Научно-исследовательский вычислительный центр, Ленинские горы, 119992, Москва; ст. науч. сотр., e-mail: iraz@srcc.msu.ru

$$\frac{1}{2}\,a_0^*\big[y(x_0+\alpha h)\big] = y_0 + \frac{h}{4}\left(a_0^*[\Phi] - \frac{1}{2}\,a_1^*[\Phi]\right) - \frac{h}{2}\sum_{j=2}^{\infty}\frac{(-1)^j}{j^2-1}\,a_j^*[\Phi]. \qquad (5)$$

Из допущения о гладкости правой части в (1) следует равномерная на $[x_0,\, x_0+h]$ сходимость рядов (2) и (3).

Замена рядов (2) и (3) частичными суммами k-го и $(k+1)$-го порядков:

$$\Phi(\alpha) \approx {\sum_{i=0}^{k}}{}' a_i^*[\Phi]T_i^*(\alpha), \qquad y(x_0+\alpha h) \approx {\sum_{i=0}^{k+1}}{}' a_i^*[y]T_i^*(\alpha) \qquad (6)$$

с последующим применением формулы численного интегрирования Маркова [1–5] для вычисления коэффициентов $a_i^*[\Phi]$ Чебышёва правой части $\Phi(\alpha)$ в (2) и использованием равенств (4) и (5) приводит к системе уравнений для приближенных значений коэффициентов Чебышёва правой части (1). Эта система имеет единственное решение, которое может быть найдено методом последовательных приближений. Итерационная схема решения системы, доказательство ее сходимости, способы выбора начального приближения для $a_i^*[\Phi]$, условия окончания итерационного процесса, оценки погрешности приближенных коэффициентов Чебышёва вместе с оценкой погрешности приближенного решения, а также некоторые свойства частичных сумм рядов Чебышёва с приближенными коэффициентами приведены в [6–15].

Частичная сумма ряда Чебышёва для функции не только является ее многочленом наилучшего квадратичного приближения на $[x_0,\, x_0+h]$, но и дает для этой функции достаточно точное равномерное приближение. Иными словами, в предлагаемом подходе интегрирование дифференциальных уравнений (1) выполняется с помощью многочленов (6), близких к многочленам наилучшего равномерного приближения. В этом заключается существенное отличие нашего подхода от традиционных численных методов, которые строятся с использованием степенных разложений по h на основе формулы Тейлора, применяемых при малых h. Поэтому аппроксимация дифференциальных уравнений, основанная на частичных суммах ряда Чебышёва (6), позволяет существенно повысить точность его интегрирования по сравнению с традиционными численными методами и при этом значительно увеличить длину h частичного сегмента.

В работах [7, 9–17] предлагаемый метод сравнивался с традиционными численными методами на различных классах обыкновенных дифференциальных уравнений. При этом сопоставлялись такие показатели, как достигаемая точность решения задачи в конце промежутка интегрирования, число выполненных шагов интегрирования и количество обращений к правой части дифференциального уравнения. Полученные результаты свидетельствуют о том, что применение данного метода позволяет решать задачу Коши с более высокой точностью, с более крупным шагом дискретизации h и меньшим количеством обращений к правой части по сравнению с традиционными численными методами на одной и той же разрядной сетке.

В настоящей статье отмечается такое свойство описываемого метода, как его способность находить приближенное решение задачи Коши (1) в аналитической форме, а именно в виде частичной суммы ряда Чебышёва (6). Эта возможность наглядно иллюстрируется применением метода к интегрированию дифференциальных уравнений, решения которых имеют известные разложения в смещенные ряды Чебышёва. Эти ряды используются для оценки абсолютных погрешностей приближенных коэффициентов Чебышёва, вычисленных с помощью предложенного аналитического метода. Описываемый ниже круг примеров включает в себя уравнения с решениями в виде некоторых элементарных и простейших специальных функций. Во всех задачах приближенное решение строится в виде частичной суммы (6) на заданном промежутке интегрирования. Вычисления проводились с 15–16 значащими цифрами.

Пример 1. Интегрируется нелинейное дифференциальное уравнение

$$y'(x) = \big(T_n^*(x)\big)' + \big(y(x) - T_n^*(x)\big)\,\frac{\ln\big(y(x)-T_n^*(x)\big)}{1+x}\,, \qquad y(0)=0, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1, \qquad (7)$$

где $T_n^*(x)$ — смещенный многочлен Чебышёва первого рода n-го порядка, $n=5$. На заданном интервале решение и его производная представляются в виде частичных сумм (6) рядов Чебышёва при $k=8$. Вычисленные коэффициенты решения $\dfrac{1}{2}\,a_0^*[y]$ и $a_5^*[y]$ равняются соответственно $0,9999999999999991\times 10^0$ и $0,1000000000000000\times 10^1$. Остальные коэффициенты $a_1^*[y], \ldots, a_4^*[y]$, $a_6^*[y], \ldots, a_9^*[y]$ имеют десятичные порядки 10^{-15}, 10^{-16}, 10^{-17} или равны нулю. Таким образом, с точностью до ошибок округления найденное методом рядов решение задачи (7) имеет вид $y(x) = 1 + T_5^*(x)$. Все коэффициенты Чебышёва для производной $y'(x)$ решения, кроме нулевого, второго и четвертого, с точностью до ошибок округления равны нулю. Нулевой $\dfrac{1}{2}\,a_0^*[y']$ (с точностью до ошибки округления), второй $a_2^*[y']$ и четвертый $a_4^*[y']$ коэффициенты равны соответственно 10, 20 и 20. Таким образом, вычисленная методом рядов производная решения представляется в виде

$$y'(x) = 10T_0^*(x) + 20T_2^*(x) + 20T_4^*(x).$$

Последнее равенство совпадает с выражением производной смещенных многочленов Чебышёва первого рода в виде линейной комбинации этих же многочленов при $n = 5$:

$$\big(T_n^*(x)\big)' = 4n \sum_{j=0}^{\left[(n-1)/2\right]} T_{n-1-2j}^*(x).$$

Здесь $[\cdot]$ означает целую часть, а в сумме слагаемое, содержащее многочлен $T_0^*(x)$, делится пополам. Заметим, что решение $y(x)$ задачи (7) имеет на отрезке $[0,1]$ колебательный характер и большую по модулю производную.

Пример 2. Интегрируется нелинейное дифференциальное уравнение

$$y' = -2q\sin q(2x-1) + \big(y - \cos q(2x-1)\big)\frac{\ln\big(y - \cos q(2x-1)\big)}{x+1}, \quad y(0) = \cos q + 1, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \tag{8}$$

где q — произвольное действительное число. Точным решением задачи (8) является функция $y(x) = 1 + \cos q(2x-1)$. Она разлагается на $[0,1]$ в смещенный ряд Чебышёва, коэффициенты которого выражаются через специальные (цилиндрические) функции:

$$y(x) = 1 + \cos q(2x-1) = 1 + J_0(q) + 2\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^i J_{2i}(q)T_{2i}^*(x).$$

Здесь $J_m(q)$ — функция Бесселя первого рода порядка m. Решение раскладывается в ряд по смещенным многочленам Чебышёва с четными номерами. Как уже отмечалось, этот ряд позволяет определить абсолютные погрешности приближенных коэффициентов Чебышёва решения из (6). На заданном интервале приближенное решение и его производная представляются в виде частичных сумм (6) при $k = 15$ для $q = 1/2$. Коэффициент $a_1^*[y]$ этой суммы в (6) имеет десятичный порядок 10^{-16}, остальные коэффициенты этой суммы с нечетными номерами $a_3^*[y], \ldots, a_{15}^*[y]$ имеют порядки 10^{-17}, 10^{-18} или равны нулю. Абсолютные погрешности коэффициентов с четными номерами в (6) $a_0^*[y], \ldots, a_{16}^*[y]$ имеют десятичные порядки 10^{-17}, 10^{-18}, 10^{-19} или равны нулю (с точностью до ошибки округления).

Пример 3. Интегрируется нелинейное дифференциальное уравнение

$$y' = 2q\cos q(2x-1) + \big(y - \sin q(2x-1)\big)\frac{\ln\big(y - \sin q(2x-1)\big)}{x+1}, \quad y(0) = -\sin q + 1, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \tag{9}$$

где q — произвольное действительное число. Точным решением задачи (9) является функция $y(x) = 1 + \sin q(2x-1)$. Она разлагается на $[0,1]$ в смещенный ряд Чебышёва, коэффициенты которого выражаются через специальные (цилиндрические) функции:

$$y(x) = 1 + \sin q(2x-1) = 1 + 2\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i J_{2i+1}(q)T_{2i+1}^*(x).$$

Здесь $J_m(q)$ — функция Бесселя первого рода порядка m. Решение раскладывается в ряд по смещенным многочленам Чебышёва с нечетными номерами. Как уже отмечалось, этот ряд позволяет оценить абсолютные погрешности приближенных коэффициентов Чебышёва решения в (6). На заданном интервале приближенное решение и его производная представляются в виде частичных сумм (6) при $k = 15$ для $q = 1/2$. Коэффициент $a_2^*[y]$ в этой сумме имеет десятичный порядок 10^{-16}, остальные коэффициенты этой суммы с четными номерами $a_4^*[y], \ldots, a_{16}^*[y]$ имеют десятичные порядки 10^{-17}, 10^{-18} или равны нулю. Коэффициент $\dfrac{1}{2}\,a_0^*[y]$ в (6) равен 1. Абсолютная погрешность коэффициента $a_1^*[y]$ из (6) имеет порядок 10^{-15}, абсолютные погрешности остальных коэффициентов решения с нечетными номерами $a_3^*[y], \ldots, a_{15}^*[y]$ имеют порядки 10^{-17}, 10^{-19} или равны нулю.

Пример 4. Интегрируется нелинейное дифференциальное уравнение

$$y' = \frac{y\ln y}{x+1}, \quad y(0) = e^q, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \tag{10}$$

где q — произвольное действительное число. Точным решением задачи (10) является показательная функция $y(x) = e^{q(1+x)}$. Она разлагается на $[0,1]$ в смещенный ряд Чебышёва, коэффициенты которого выражаются через специальные функции следующим образом:

$$e^{q(1+x)} = 2e^{3/2q} {\sum_{i=0}^{\infty}}' I_i\left(\frac{q}{2}\right) T_i^*(x).$$

Здесь $I_i(t)$ — модифицированная функция Бесселя первого рода порядка i, или функция Инфельда. Этот ряд позволяет определить абсолютные погрешности приближенных коэффициентов Чебышёва решения из (6), вычисленных изложенным выше приближенным аналитическим методом. На заданном интервале приближенное решение и его производная представляются в виде частичных сумм (6) при $k = 25$ для $q = 4$. Коэффициенты $a_0^*[y], \ldots, a_6^*[y]$ в этой сумме имеют десятичные порядки от 10^4 до 10^1, а их абсолютные погрешности — порядки 10^{-12}, 10^{-13}, 10^{-14}. Абсолютные погрешности остальных коэффициентов $a_7^*[y], \ldots, a_{26}^*[y]$ имеют порядки 10^{-14}, 10^{-15}. Заметим, что функция $y(x)$ задачи (10) имеет на $[0,1]$ большую производную.

Пример 5. Интегрируется нелинейное дифференциальное уравнение

$$y' = \frac{4p}{\big[(1+p)^2 - 4px\big]^2} + \left(y - \frac{1}{(1+p)^2 - 4px}\right) \frac{\ln\left(y - \dfrac{1}{(1+p)^2 - 4px}\right)}{x+1}, \qquad (11)$$
$$y(0) = \frac{1}{(1+p)^2} + 1, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

где p — произвольное действительное число, $|p| < 1$. Точным решением задачи (11) является рациональная функция

$$y(x) = 1 + \frac{1}{(1+p)^2 - 4px}.$$

Она разлагается на $[0,1]$ в смещенный ряд Чебышёва

$$y(x) = 1 + \frac{1}{(1+p)^2 - 4px} = 1 + \frac{1}{1-p^2} + \frac{2}{1-p^2} \sum_{i=1}^{\infty} p^i T_i^*(x).$$

Этот ряд позволяет оценить абсолютные погрешности приближенных коэффициентов Чебышёва решения из (6), вычисленных приближенным аналитическим методом. На заданном интервале приближенное решение и его производная представляются в виде частичных сумм (6) при $k = 15$ для $p = 1/8$. Абсолютная погрешность коэффициента $a_{14}^*[y]$ имеет порядок 10^{-14}, а погрешности остальных коэффициентов имеют порядки от 10^{-15} до 10^{-19} либо равны нулю с точностью до ошибки округления.

Пример 6. Интегрируется система дифференциальных уравнений

$$y_1' = -2qy_2(x), \quad y_2' = q\big(y_1(x) - J_2(x)\big), \quad y_1(0) = J_0(q), \quad y_2(0) = -J_1(q), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \qquad (12)$$

где q — произвольное действительное число, отличное от 0, $J_m(x)$ — функция Бесселя первого рода m-го порядка. Решение системы (12) выражается через функции Бесселя первого рода нулевого и первого порядков: $y_1(x) = J_0\big(q(2x-1)\big)$, $y_2(x) = J_1\big(q(2x-1)\big)$. Компоненты вектора решения раскладываются на $[0,1]$ в смещенные ряды Чебышёва следующим образом:

$$y_1(x) = J_0\big(q(2x-1)\big) = 2{\sum_{i=0}^{\infty}}'(-1)^i J_i^2(p) T_{2i}^*(x), \qquad (13)$$

$$y_2(x) = J_1\big(q(2x-1)\big) = 2{\sum_{i=0}^{\infty}}'(-1)^i J_i(p) J_{i+1}(p) T_{2i+1}^*(x), \quad p = \frac{q}{2}. \qquad (14)$$

Эти ряды позволяют оценить абсолютные погрешности приближенных коэффициентов Чебышёва обеих компонент решения из (6), вычисленных приближенным аналитическим методом. На заданном интервале приближенное решение и его производная представляются в виде частичных сумм (6) при $k = 11$ для $q = 1/2$.

Как следует из (13), первая компонента решения $y_1(x)$ раскладывается в ряд по многочленам Чебышёва с четными номерами. Для компоненты $y_1(x)$ коэффициент $a_1^*[y_1]$ из частичной суммы (6) имеет десятичный порядок 10^{-15}, остальные коэффициенты с нечетными номерами имеют порядки 10^{-16}, 10^{-17} и 10^{-18}. Абсолютные погрешности коэффициентов с четными номерами в (6) имеют порядки 10^{-15}, 10^{-16}, 10^{-17}, 10^{-18} и 10^{-19}.

Как видно из (14), вторая компонента решения $y_2(x)$ раскладывается в ряд по смещенным многочленам Чебышёва с нечетными номерами. Для компоненты $y_2(x)$ коэффициент $a_0^*[y_2]$ из частичной суммы (6) имеет десятичный порядок 10^{-14}, остальные коэффициенты с четными номерами $a_2^*[y_2], \ldots, a_{12}^*[y_2]$ имеют порядки 10^{-16} и 10^{-17}. Абсолютные погрешности коэффициентов с нечетными номерами в (6) имеют порядки 10^{-15}, 10^{-17} и 10^{-18}.

Пример 7. Интегрируется дифференциальное уравнение

$$y' = 2q\frac{I_1\bigl(q(2x-1)\bigr)}{I_0\bigl(q(2x-1)\bigr)}\,y, \qquad y(0) = I_0(q), \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1, \tag{15}$$

где q — произвольное действительное число, отличное от 0, $I_m(t)$ — модифицированная функция Бесселя первого рода m-го порядка, или функция Инфельда. Решением задачи (15) является функция $y(x) = I_0\bigl(q(2x-1)\bigr)$. Она разлагается на $[0,1]$ в ряд по смещенным многочленам Чебышёва с четными номерами следующим образом:

$$y(x) = I_0\bigl(q(2x-1)\bigr) = 2\sum_{i=0}^{\infty} I_i^2(p) T_{2i}^*(x), \qquad p = \frac{q}{2}.$$

Этот ряд позволяет оценить абсолютные погрешности приближенных коэффициентов Чебышёва решения (6), вычисленных приближенным аналитическим методом. На заданном промежутке приближенное решение и его производная представляются в виде частичных сумм (6) при $k = 11$ для $q = 1/2$. Коэффициенты с нечетными номерами $a_1^*[y], \ldots, a_{11}^*[y]$ этой суммы имеют десятичные порядки 10^{-16} и 10^{-17}. Коэффициент $a_0^*[y]$ имеет порядок 10^1, а его абсолютная погрешность — 10^{-12}. Абсолютные погрешности остальных коэффициентов с четными номерами $a_2^*[y], \ldots, a_{12}^*[y]$ имеют порядки 10^{-15}, 10^{-16} и 10^{-17}.

Приведенные примеры показывают, что изложенный здесь метод интегрирования дает достаточно точное приближение для коэффициентов Чебышёва искомых функций — решений дифференциальных уравнений. Следовательно, его можно рассматривать как приближенный аналитический метод интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений, позволяющий получать решения уравнений непосредственно в виде частичных сумм ряда Чебышёва.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (код проекта 13–01–00096-а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бабенко К.И.* Основы численного анализа. М: Наука, 1986.
2. *Мысовских И.П.* Лекции по методам вычислений. СПб.: Изд-во С.-Петербург. ун-та, 1998.
3. *Ильин В.П., Кузнецов Ю.И.* Алгебраические основы численного анализа. Новосибирск: Наука, 1986.
4. *Арушанян О.Б., Залеткин С.Ф.* О применении формулы численного интегрирования Маркова в ортогональных разложениях // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика и механика. 2009. № 6. 18–22.
5. *Залеткин С.Ф.* Формула численного интегрирования Маркова с двумя фиксированными узлами и ее применение в ортогональных разложениях // Вычислительные методы и программирование. 2005. **6**. 1–17.
6. *Арушанян О.Б., Волченскова Н.И., Залеткин С.Ф.* О некоторых свойствах частичных сумм рядов Чебышева // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2009. **13**, № 3. 26–34.
7. *Арушанян О.Б., Волченскова Н.И., Залеткин С.Ф.* Приближенное интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений на основе ортогональных разложений // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2009. **13**, № 4. 59–68.
8. *Залеткин С.Ф.* Численное интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений с использованием ортогональных разложений // Математическое моделирование. 2010. **22**, № 1. 69–85.
9. *Арушанян О.Б., Волченскова Н.И., Залеткин С.Ф.* Приближенное решение обыкновенных дифференциальных уравнений с использованием рядов Чебышева // Сибирские электронные математические известия. 2010. **7**. 122–131.
10. *Арушанян О.Б., Волченскова Н.И., Залеткин С.Ф.* О применении ортогональных разложений для приближенного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика и механика. 2010. № 4. 40–43.

11. *Арушанян О.Б., Волченскова Н.И., Залеткин С.Ф.* О вычислении коэффициентов рядов Чебышёва для решений обыкновенных дифференциальных уравнений // Сибирские электронные математические известия. 2011. **8**. 273–283.
12. *Арушанян О.Б., Волченскова Н.И., Залеткин С.Ф.* О вычислении коэффициентов ортогональных разложений решений обыкновенных дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2011. **15**, № 2. 41–47.
13. *Арушанян О.Б., Волченскова Н.И., Залеткин С.Ф.* Вычисление коэффициентов разложения решения задачи Коши в ряд по многочленам Чебышева // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика и механика. 2012. № 5. 24–30.
14. *Арушанян О.Б., Волченскова Н.И., Залеткин С.Ф.* Метод решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений с использованием рядов Чебышёва // Вычислительные методы и программирование. 2013. **14**. 203–214.
15. *Арушанян О.Б., Волченскова Н.И., Залеткин С.Ф.* Применение рядов Чебышева для интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений // Сибирские электронные математические известия. 2014. **11**. 517–531.
16. *Арушанян О.Б., Волченскова Н.И., Залеткин С.Ф.* Об одном приближенном методе интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика и механика. 2013. № 6. 43–46.
17. *Арушанян О.Б., Волченскова Н.И., Залеткин С.Ф.* Об одном подходе к интегрированию обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью рядов // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика и механика. 2014. № 6. 57–60.

Поступила в редакцию
11.03.2015

On an Approximate Analytical Method of Solving Ordinary Differential Equations

O. B. Arushanyan [1], N. I. Volchenskova [2], and S. F. Zaletkin [3]

[1] *Research Computing Center, Lomonosov Moscow State University; Leninskie Gory, Moscow, 119992, Russia; Dr. Sci., Professor, Head of Laboratory, e-mail: arush@srcc.msu.ru*

[2] *Research Computing Center, Lomonosov Moscow State University; Leninskie Gory, Moscow, 119992, Russia; Ph.D., Senior Scientist, e-mail: nad1946@srcc.msu.ru*

[3] *Research Computing Center, Lomonosov Moscow State University; Leninskie Gory, Moscow, 119992, Russia; Ph.D., Senior Scientist, e-mail: iraz@srcc.msu.ru*

Received March 11, 2015

Abstract: The application of shifted Chebyshev series for solving ordinary differential equations is described. This approach is based on the approximation of the solution to the Cauchy problem for a normal system of ordinary differential equations and its derivatives by partial sums of Fourier series in the Chebyshev polynomials of the first kind. The coefficients of the series are determined by an iterative process with the use of Markov's quadrature formulas. The approximation properties of shifted Chebyshev series allow us to propose an approximate analytical method for ordinary differential equations. A number of examples are considered to illustrate the application of partial sums of Chebyshev series for approximate representations of the solutions to the Cauchy problems for ordinary differential equations.

Keywords: ordinary differential equations, approximate analytical methods, numerical methods, orthogonal expansions, shifted Chebyshev series, Markov's quadrature formulas.

References

1. K. I. Babenko, *Fundamentals of Numerical Analysis* (Nauka, Moscow, 1986) [in Russian].
2. I. P. Mysovskikh, *Lectures on Numerical Methods* (St. Petersburg Univ., St. Petersburg, 1998) [in Russian].
3. V. P. Il'in and Yu. A. Kuznetsov, *Algebraic Foundations of Numerical Analysis* (Nauka, Novosibirsk, 1986) [in Russian].
4. O. B. Arushanyan and S. F. Zaletkin, "Application of Markov's Quadrature in Orthogonal Expansions," Vestn. Mosk. Univ., Ser. 1: Mat. Mekh., No. 6, 18–22 (2009) [Moscow Univ. Math. Bull. **64** (6), 244–248 (2009)].

5. S. F. Zaletkin, "Markov's Formula with Two Fixed Nodes for Numerical Integration and Its Application in Orthogonal Expansions," Vychisl. Metody Programm. **6**, 1–17 (2005).

6. O. B. Arushanyan, N. I. Volchenskova, and S. F. Zaletkin, "On Some Properties of Partial Sums for Chebyshev Series," Differen. Uravn. Protsessy Upravl. **13** (3), 26–34 (2009).

7. O. B. Arushanyan, N. I. Volchenskova, and S. F. Zaletkin, "Approximate Integration of Ordinary Differential Equations on the Basis of Orthogonal Expansions," Differen. Uravn. Protsessy Upravl. **13** (4), 59–68 (2009).

8. S. F. Zaletkin, "Numerical Integration of Ordinary Differential Equations Using Orthogonal Expansions," Mat. Model. **22** (1), 69–85 (2010).

9. O. B. Arushanyan, N. I. Volchenskova, and S. F. Zaletkin, "Approximate Solution of Ordinary Differential Equations Using Chebyshev Series," Sib. Elektron. Mat. Izv. **7**, 122–131 (2010).

10. O. B. Arushanyan, N. I. Volchenskova, and S. F. Zaletkin, "Application of Orthogonal Expansions for Approximate Integration of Ordinary Differential Equations," Vestn. Mosk. Univ., Ser. 1: Mat. Mekh., No. 4, 40–43 (2010) [Moscow Univ. Math. Bull. **65** (4), 172–175 (2010)].

11. O. B. Arushanyan, N. I. Volchenskova, and S. F. Zaletkin, "On Calculation of Chebyshev Series Coefficients for the Solutions to Ordinary Differential Equations," Sib. Elektron. Mat. Izv. **8**, 273–283 (2011).

12. O. B. Arushanyan, N. I. Volchenskova, and S. F. Zaletkin, "Calculation of the Coefficients of Orthogonal Expansions for the Solutions to Ordinary Differential Equations," Differen. Uravn. Protsessy Upravl. **15** (2), 41–47 (2011).

13. O. B. Arushanyan, N. I. Volchenskova, and S. F. Zaletkin, "Calculation of Expansion Coefficients of Series in Chebyshev Polynomials for a Solution to a Cauchy Problem," Vestn. Mosk. Univ., Ser. 1: Mat. Mekh., No. 5, 24–30 (2012) [Moscow Univ. Math. Bull. **67** (5–6), 211–216 (2012)].

14. O. B. Arushanyan, N. I. Volchenskova, and S. F. Zaletkin, "A Method of Solving the Cauchy Problem for Ordinary Differential Equations Using Chebyshev Series," Vychisl. Metody Programm. **14**, 203–214 (2013).

15. O. B. Arushanyan, N. I. Volchenskova, and S. F. Zaletkin, "Application of Chebyshev Series for the Integration of Ordinary Differential Equations," Sib. Elektron. Mat. Izv. **11**, 517–531 (2014).

16. O. B. Arushanyan, N. I. Volchenskova, and S. F. Zaletkin , "An Approximate Method for Integration of Ordinary Differential Equations," Vestn. Mosk. Univ., Ser. 1: Mat. Mekh., No. 6, 43–46 (2013) [Moscow Univ. Math. Bull. **68** (6), 292–294 (2013)].

17. O. B. Arushanyan, N. I. Volchenskova, and S. F. Zaletkin, "On an Approach to Integration of Ordinary Differential Equations with the Use of Series," Vestn. Mosk. Univ., Ser. 1: Mat. Mekh., No. 6, 57–60 (2014) [Moscow Univ. Math. Bull. **69** (6), 272–274 (2014)].