

УДК 523.4-52; 573.552

doi 10.26089/NumMet.v16r106

## АЛГОРИТМ ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ ГРАВИТАЦИОННОЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ: КОМБИНАЦИЯ МЕТОДА SPH И СЕТОЧНОГО МЕТОДА ВЫЧИСЛЕНИЯ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОТЕНЦИАЛА

О. П. Стояновская<sup>1</sup>, Н. В. Снытников<sup>2</sup>, В. Н. Снытников<sup>3</sup>

Для решения нестационарных уравнений гравитационной газовой динамики в приближении тонкого диска предложен новый численный алгоритм. Алгоритм основан на комбинации бессеточного метода сглаженных частиц (SPH, Smoothed Particle Hydrodynamics) и метода свертки для решения уравнения Пуассона на декартовой сетке. Данный метод обладает высокой производительностью за счет того, что сеточная функция потенциала вычисляется и хранится только в плоскости диска. Работоспособность алгоритма демонстрируется в численных экспериментах по формированию структур в околозвездном диске. Сравнение результатов, полученных с использованием сеточных методов решения уравнения Пуассона в декартовой и цилиндрической геометрии, показало, что в обоих случаях удается воспроизвести решения с осевой симметрией и формирование уединенных областей повышенной плотности.

**Ключевые слова:** самогравитирующий околозвездный диск, формирование структур, уединенные сгущения, Smoothed-Particle Hydrodynamics (SPH), уравнение Пуассона, гравитационная газовая динамика.

**1. Введение.** В последние годы одной из важных проблем астрофизики стало изучение зарождения звезд вместе с околозвездными дисками и планетными системами. Большой интерес вызывают наблюдения в радиодиапазоне начальных этапов формирования околозвездных дисков новейшим телескопом ALMA (Atacama Large Millimeter/submillimeter Array). Околозвездный диск удивительно круговой структуры с кольцами был обнаружен ALMA на расстояниях 140 парсек (456.6 световых лет) в созвездии Тельца–Возничего [1]. Отклонения от кольцевой структуры могут рассматриваться как индикатор процессов образования планет. Однако за нарушение симметрии в околозвездных дисках ответственны и другие физические факторы, в частности, азимутальные и локальные гравитационные неустойчивости. Поэтому наблюдательные данные необходимо сравнивать с результатами вычислительных экспериментов, в которых решаются прямые нестационарные задачи гравитационной физики для системы из газодинамических уравнений и уравнения Пуассона.

В настоящее время на первый план при численном решении нестационарных задач динамики дисков выходит необходимость точного воспроизведения глобальных нестационарных структур, развивающихся из-за гравитационных неустойчивостей во всем диске. Для массивных холодных дисков (в областях, где значение параметра Тумре  $Q < 1$  на начальной стадии развития радиальной неустойчивости Тумре) — это осесимметричные кольцеобразные структуры. Не менее важно передать распад глобальных структур на множественные локальные особенности типа вихрей и коллапсов. При численном моделировании структур всех видов в решение вносится неконтролируемое возмущение, длина волны которого связана с шагом дискретизации. Геометрическая форма вносимого возмущения зависит от выбора системы координат, в которой решается задача. Проблема возникает в случаях, когда неконтролируемое возмущение нарастает быстрее, чем изучаемые структуры, и приводит к их разрушению. Если для расчетов глобальных структур хорошо подходят сетки в цилиндрической системе координат, то для локальных структур использование декартовых сеток имеет существенные преимущества. В свою очередь, построение адаптивных сеток при множественности возникающих особенностей в течениях околозвездной среды весьма затратно по ресурсам, поэтому необходимо искать новые подходы к решению проблемы сквозного расчета глобальных и локальных структур.

<sup>1</sup> Институт катализа им. Г. К. Борескова СО РАН, просп. Лаврентьева, д. 5, 630090, Новосибирск; науч. сотр., e-mail: stop@catalysis.ru

<sup>2</sup> Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, просп. Лаврентьева, д. 6, 630090, Новосибирск; науч. сотр., e-mail: nik@ssd.sscs.ru

<sup>3</sup> Институт катализа им. Г. К. Борескова СО РАН, просп. М. А. Лаврентьева, д. 5, 630090, Новосибирск; ст. науч. сотр., e-mail: snyt@catalysis.ru

Для нестационарных задач с самогравитацией подходят методы, обладающие азимутальной симметрией. Таким методом является SPH (Smooth Particle Hydrodynamics, метод сглаженных частиц) для уравнений газодинамики и метод решения уравнения Пуассона в цилиндрической геометрии. Вместе с тем при использовании цилиндрической системы координат, которая кажется естественной для моделирования вращающихся дисков в центральном поле, методы решения уравнения Пуассона резко усложняются по сравнению с их аналогами в декартовой системе, и возникают дополнительные трудности в разработке и реализации параллельных алгоритмов [2]. Однако к настоящему моменту благодаря растущей доступности суперкомпьютеров с сотнями процессоров для повседневной эксплуатации ситуация изменилась. Поскольку существует возможность проводить расчеты на сетках с сотнями миллионов и миллиардами узлов, возникает вопрос о целесообразности использования азимутально инвариантной цилиндрической геометрии и, соответственно, более сложных и трудоемких алгоритмов. Другими словами, для нас было принципиально найти ответ, будет ли работоспособной комбинация инвариантного алгоритма SPH для динамики среды и неинвариантного алгоритма для вычисления гравитационного потенциала на декартовой сетке в задачах развития глобальных и локальных гравитационных неустойчивостей. В настоящей статье мы представляем новый численный алгоритм для решения задач гравитационной газовой динамики в применении к моделированию околозвездных дисков, объединяющий метод сглаженных частиц (SPH) и метод вычисления гравитационного потенциала на декартовой сетке методом свертки. Для оценки его работоспособности мы провели серию экспериментов по численному моделированию тонкого околозвездного диска и сделали сравнение результатов с ранее созданным численным методом [3, 4], использующим цилиндрические координаты. Описание этих двух численных моделей и методов решения уравнения Пуассона представлены во втором разделе статьи, обсуждение результатов экспериментов — в третьем.

**2. Математическая и численная модель массивного газового околозвездного диска.** Модель тонкого околозвездного диска включает в себя уравнения газовой динамики для поверхностной плотности и трехмерное уравнение для самосогласованного гравитационного поля:

$$\sigma = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_{\text{gas}} dz, \quad p^* = \int_{-\infty}^{+\infty} p dz,$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \text{div}(\sigma \mathbf{v}) = 0, \quad \sigma \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \sigma(\mathbf{v}, \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p^* - \sigma \nabla \Phi, \quad \frac{\partial S^*}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla) S^* = 0, \quad p^* = T^* \sigma.$$

Здесь  $\mathbf{v}$  — скорость газа в плоскости диска;  $p^*$  — поверхностное давление газа;  $\gamma^*$  — эффективный показатель политропы для квазитрехмерного случая, связанный с показателем политропы  $\gamma$  соотношением  $\gamma^* = 3 - \frac{2}{\gamma}$ ;  $T^* = \frac{p^*}{\sigma}$  и  $S^* = \ln \frac{T^*}{\sigma^{\gamma^*-1}}$  — производные величины, аналогичные температуре и энтропии газа;  $\mathbf{a} = -\nabla \Phi$ , где  $\mathbf{a}$  — ускорение частиц во внешнем и самосогласованном поле и  $\Phi$  — гравитационный потенциал, который представляет собой сумму потенциала неподвижного центрального тела и потенциала диска:  $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$ ,  $\Phi_1 = -M_c/r$ ,  $M_c$  — масса центрального тела,  $\Phi_2$  — потенциал самосогласованного гравитационного поля, который определяется как решение уравнения Пуассона  $\Delta \Phi_2 = 4\pi \rho_{\text{gas}}$ ,  $\Phi_2 \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$ , что для тонкого диска эквивалентно решению смешанной задачи для уравнения Лапласа:  $\Delta \Phi_2 = 0$ ,  $\Phi_2 \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$ ,

$$\left. \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \right|_{z=0} = 2\pi\sigma.$$

Эти уравнения записаны в безразмерных переменных. Базовыми размерными величинами являются  $G$  — гравитационная постоянная,  $R_0 = 10$  астрономических единиц (АЕ, примерно  $1.5 \times 10^{11}$  м) и  $M_\odot = 2 \times 10^{30}$  кг — характерный размер и масса системы. В начальный момент времени задаются поверхностные температура и плотность диска.

Плотность газа и субдиска первичных тел взята в виде диска Маклорена массы  $M_{\text{gas}}$  и радиуса  $R$ :

$$\sigma(r) = \frac{3M_{\text{gas}}}{2\pi R^2} \sqrt{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2}.$$

Температура газа в начальный момент времени определяется как  $T^*(r) \sim \sigma(r)$  по заданной температуре  $T_0$  в центре диска. Задаваемое начальное распределение плотности и температуры является равновесным, но неустойчивым.

Разработанный численный алгоритм решения системы уравнений общего вида основан на методе дробных шагов с расщеплением по физическим процессам и реализован в виде кода Sombrego, подробное

описание которого приведено в [3, 4]. На каждом временном шаге решается система уравнений газовой динамики и смешанная задача для уравнения Лапласа. Уравнения газовой динамики решаются методом SPH, для которого применялся “operational-based” подход с распараллеливанием процедуры вычисления сумм и пересылкой рассчитанных значений массивов. Для вычисления потенциала необходима интерполяция плотности, определенной в SPH-частицах, на регулярную сетку. Как на декартовой, так и на цилиндрической сетке плотность вычисляется с использованием ядра PIC (Particle-in-Cell).

**2.1. Вычисление гравитационного потенциала на цилиндрической сетке.** Для вычисления потенциала на цилиндрической сетке решается смешанная задача для уравнения Лапласа. Расчетная область представляет собой цилиндр, в нижнем сечении которого расположен газовый диск, представленный SPH-частицами. Радиус расчетной области в два раза превосходит начальный радиус диска. Нулевое значение гравитационного потенциала на бесконечности аппроксимируется на границу расчетной области соотношением

$$\Phi_2(r) = -\frac{M_{\text{gas}}}{r} - \frac{1}{r^3} (I_x + I_y + I_z - 3I_0),$$

где  $I_x, I_y, I_z$  — осевые моменты инерции,  $I_0$  — центральный момент инерции системы,  $M_{\text{gas}}$  — масса диска. Для решения уравнения Лапласа используется итерационный метод, в котором в качестве начального приближения берется значение с предыдущего временного шага. Метод включает в себя быстрое преобразование Фурье по угловой координате и процедуру блочной последовательной верхней релаксации. Параллельная реализация метода осуществляется через распределение по процессорам гармоник потенциала, полученных в результате дискретного преобразования Фурье. Подробное описание метода приведено в [2].

**2.2. Вычисление гравитационного потенциала на декартовой сетке.** Для вычисления гравитационного потенциала был реализован метод свертки, который был предложен в [5]. Его суть заключается в том, что вместо задачи Дирихле для уравнения Пуассона в бесконечной области

$$\Delta\Phi_2(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x}), \quad \Phi_2(\mathbf{x})|_{\mathbf{x} \rightarrow \infty} = 0, \quad (1)$$

выполняется быстрое вычисление интеграла, представляющего собой фундаментальное решение уравнения Пуассона:

$$\Phi_2(\mathbf{x}_0) = - \int \frac{\rho(\mathbf{x}) d\mathbf{x}}{|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}|}. \quad (2)$$

В дискретном случае в декартовой системе координат на равномерной сетке с числом узлов  $N_x \times N_y \times N_z$  и сеточными шагами  $h_x, h_y, h_z$  решение записывается в виде

$$\Phi_2(x_0, y_0, z_0) = - \sum_{i=1}^{N_x-1} \sum_{j=1}^{N_y-1} \sum_{k=1}^{N_z-1} \frac{q_{ijk}}{\sqrt{(x_i - x_0)^2 + (y_j - y_0)^2 + (z_k - z_0)^2}}, \quad (3)$$

где  $q_{ijk} = \rho_{ijk} h_x h_y h_z$  — значения зарядов (масс), находящихся в узлах сетки.

Если же требуется вычислить гравитационный потенциал в плоскости диска с поверхностной плотностью  $\sigma$ , лежащего в плоскости  $z = z_0$ , то при  $q_{ijk} = \sigma_{ij} h_x h_y$  формула (3) принимает вид

$$\Phi_2(x_0, y_0) = \sum_{i=1}^{N_x-1} \sum_{j=1}^{N_y-1} \frac{q_{ij}}{\sqrt{(x_i - x_0)^2 + (y_j - y_0)^2}}. \quad (4)$$

Нетрудно видеть, что прямое вычисление этой суммы для всех  $x_0, y_0$ , необходимое для восстановления сеточной функции гравитационного потенциала в плоскости  $z = z_0$ , потребует  $O(N_x^2 N_y^2)$  операций, а для трехмерного случая —  $O(N_x^2 N_y^2 N_z^2)$ . К счастью, трудоемкость вычислений можно существенно сократить, воспользовавшись теоремой о свертке [6] и ее дискретным аналогом. Запишем (2) в виде

$$\Phi_2(\mathbf{x}_0) = - \int \rho(\mathbf{x}) K(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) d\mathbf{x} = -\rho * K, \quad (5)$$

где  $K(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|}$  и  $\rho * K$  обозначает свертку.

Если интеграл в (5) является абсолютно интегрируемым и существуют константы  $C_1$  и  $C_2$ , такие, что

$$\int \rho(\mathbf{x}) d\mathbf{x} < C_1 < \infty, \quad \int K(\mathbf{x}) d\mathbf{x} < C_2 < \infty,$$

то  $FT[\Phi_2](\mathbf{k}) = -FT[\rho](\mathbf{k}) \cdot FT[K](\mathbf{k})$  и  $\Phi_2 = -FT^{-1}[FT[\rho] \cdot FT[K]]$ , где  $FT[\dots]$  обозначает преобразование Фурье.

С практической точки зрения это означает, что, воспользовавшись дискретным аналогом теоремы о свертке и алгоритмом быстрого преобразования Фурье, можно вычислить сумму (3) для трехмерной области за  $O(N_x N_y N_z (\log N_x + \log N_y + \log N_z))$  операций. Если же речь идет о вычислении гравитационного потенциала плоского диска (4), то окажется, что его трудоемкость составляет  $O(N_x N_y (\log N_x + \log N_y))$ , что не только быстрее прямого способа вычисления фундаментального решения уравнения Пуассона, но и быстрее прямых методов решения трехмерного уравнения (1), имеющих по крайней мере кубическую сложность.

Чтобы применить быстрое преобразование Фурье для вычисления потенциала плоского диска с помощью (4), необходимо устранить неопределенность в точке  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$  и определить функции  $K$  и  $\sigma$  так, чтобы они стали периодическими. Первая из этих проблем решается с помощью модификации потенциала на близких расстояниях. Сеточная функция  $K$  задавалась в виде

$$K(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{0.5 \min(hx, hy)}, & \sqrt{x^2 + y^2} = 0, \\ \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \sqrt{x^2 + y^2} > 0. \end{cases}$$

Вторая проблема решается с помощью введения фиктивных дополнительных подобластей, дублирующих область решения по каждому направлению в два раза, и доопределения в них функции  $K$  так, чтобы она стала периодической во всей новой области, а функция  $\sigma$  равной нулю. Аккуратное доказательство корректности метода и того факта, что полученное таким способом решение совпадает с прямым вычислением (3), приведено в статье [7].

Производительность нашего алгоритма свертки фактически определяется производительностью быстрого преобразования Фурье (в реализации метода свертки мы использовали FFTW [8]). Например, для сетки  $1024^2$  время вычисления гравитационного потенциала в однопроцессорных расчетах составляет около одной секунды.

Данный алгоритм также является перспективным с точки зрения использования на суперкомпьютерах: он может быть распараллелен с помощью метода декомпозиции с использованием транспозиции данных, что является стандартным методом параллельной реализации многократного преобразования Фурье [9]. Предварительные эксперименты, проведенные на суперкомпьютере НКС-30Т G6 Сибирского суперкомпьютерного центра ([www2.sccc.ru](http://www2.sccc.ru)), показывают, что производительность метода на сетке  $16384^2$  при использовании 256 процессоров составляет около полутора секунд.

**3. Вычислительные эксперименты — результаты и обсуждение.** В среде околозвездного диска могут развиваться неустойчивости разных типов (гидродинамические, гравитационные и др.) и формироваться структуры разного масштаба [10]. Среди глобальных структур, формирование которых связывают с влиянием собственного гравитационного поля диска, выделяют два типа объектов. Первый — нелокальные осесимметричные структуры типа колец, которые могут возникать и развиваться во вращающемся газе на начальной линейной стадии. Эти кольца могут разрушаться на нелинейной стадии при взаимодействии друг с другом или при развитии азимутальных возмущений. Второй — структуры типа спиральных волн, которые в некоторых случаях генерируют ударные волны в среде диска (воспроизведены в работах [11] и др.). На нелинейных стадиях возмущения плотности могут порождать в газе структуры более мелкого масштаба: вихревые волны — сгустки плотности (воспроизведены в работах [12–15] и др.). При надлежащем показателе адиабаты для газа сгустки могут перейти в режим коллапса со взрывным ростом плотности. Режим коллапса представляет большой интерес для околозвездных дисков, поскольку множественные коллапсы позволяют создавать многокилометровые тела и даже зародыши планет, которые собирают вещество на себя путем гравитационной аккумуляции с формированием вторичных дисков типа колец около внешних планет гигантов Солнечной системы со своими спутниками (например, [16]).

В приводимых тестовых расчетах мы покажем, что несмотря на несогласованность формы возмущения и сетки (декартова сетка с вращением газа вокруг центрального тела, цилиндрическая сетка с вращением газа вокруг локального максимума плотности, а не центра координат) комбинацией методов SPH и сеточным методом решения уравнения Пуассона можно воспроизводить

- а) нарастание амплитуды осесимметричных возмущений и порог их развала на отдельные сгущения,
- б) структуру течения газа в локальной сформировавшейся области.

Сравним результаты моделирования кольцевых возмущений плотности и их развал на отдельные сгущения, полученные с использованием методов расчета гравитационного потенциала. Для этого воспроиз-

ведем динамику нескольких оборотов диска массы  $M_{\text{gas}} = 0.5$  и радиуса  $R = 2 = 20$  АЕ, вращающегося вокруг центрального тела массы  $M_c = 0.5$ . Температура газа на радиусе 1 АЕ составляет 0.01 безразмерных единиц, или 270 К. Используется эффективный показатель адиабаты  $\gamma^* = 1.667$ . В начальный момент времени на исходный профиль плотности в виде диска Маклорена накладываются три кольцевых возмущения с амплитудой 0.005 при ширине кольца 0.1.

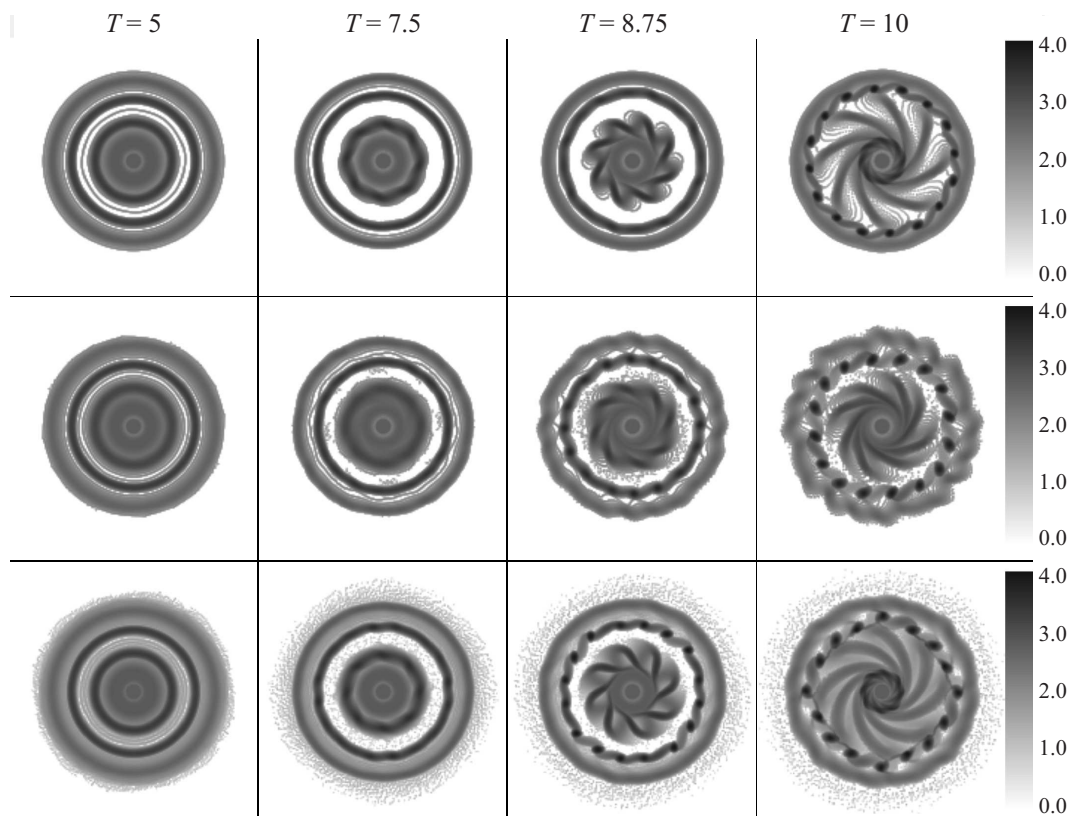


Рис. 1. Логарифм поверхностной плотности газа при  $T = 5; 7.5; 8.75; 10$

На рис. 1 приведены логарифмы распределения плотности газа для четырех моментов времени ( $T = 5$ ;  $T = 7.5$ ;  $T = 8.75$ ;  $T = 10$ , полный оборот периферии диска происходит за 12.5 единиц времени). Первый ряд — расчет на цилиндрической сетке с  $h_r = 0.02$ ,  $h_\phi = 2\pi/256$ ; второй ряд — расчет на декартовой сетке с  $h = 0.016$ ; третий ряд — расчет на декартовой сетке с  $h = 0.008$ . Расчет на цилиндрической сетке с  $h_r = 0.02$  и декартовой с  $h = 0.016$  проведен с использованием 160 000 SPH-частиц. Такое количество частиц обеспечивало характерный радиус сглаживания  $h_{\text{SPH}} = 0.015\text{--}0.03$  для начального распределения плотности, т.е. шаг дискретизации для расчета давления газа был близок к шагу дискретизации для расчета гравитационных сил. Аналогичное соотношение достигалось для декартовой сетки с  $h = 0.008$ , где использовалось 640 000 SPH-частиц с характерным радиусом сглаживания  $h_{\text{SPH}} = 0.007\text{--}0.015$ .

В современной литературе представлен ряд требований к численному разрешению модели для воспроизведения волн плотности в гравитирующей среде [17]. Величиной, на основе которой записаны такие критерии, является локальная джинсовская длина, определяемая для квазитрехмерной модели соотношением  $\Lambda_{\text{Jeans}} = \frac{c_s^2}{G\sigma}$ . Эта величина характеризует минимальный размер возмущения, которое в гравитирующей газовой среде будет нарастать под действием собственного гравитационного поля. В начальный момент времени длина Джинса для этих параметров диска составляет  $\Lambda_{\text{Jeans}} = 0.17$ ; таким образом, в расчетах на нее приходится от 8 до 20 ячеек сетки.

Для всех расчетов к моменту времени  $T = 5$  видны четко сформировавшиеся кольца плотности, симметричные относительно оси вращения. Эти кольца плотности возникают из-за коллективной неустойчивости и соответствуют динамике всего диска как единой гравитирующей системы. В момент времени  $T = 7.5$  кольца продолжают собирать массу, увеличиваясь по амплитуде и расширяя провалы в плотности между кольцами. В момент времени  $T = 8.75$  на внутреннем кольце плотности начинают формироваться спиральные структуры, а два внешних кольца оказались промодулированы азимутальными возмущениями.

ми плотности. Эти возмущения к моменту времени  $T = 10$  превратились в сгустки плотности. Во внешнем кольце на границе с вакуумом развиваются волны, схожие со спиральными структурами. Во внутренней области сформировался диск с 8-рукавной спиральной структурой. В целом результаты расчета на декартовой и цилиндрической сетке близки между собой. Видно, что даже на декартовой сетке кольца сохраняют правильную осесимметричную форму до момента развала их на отдельные сгущения. Основные различия в численных решениях можно ожидать в центральной области, где имеет место сгущение цилиндрической сетки, и на периферии, где ячейка цилиндрической сетки становится сильно вытянутой в угловом направлении.

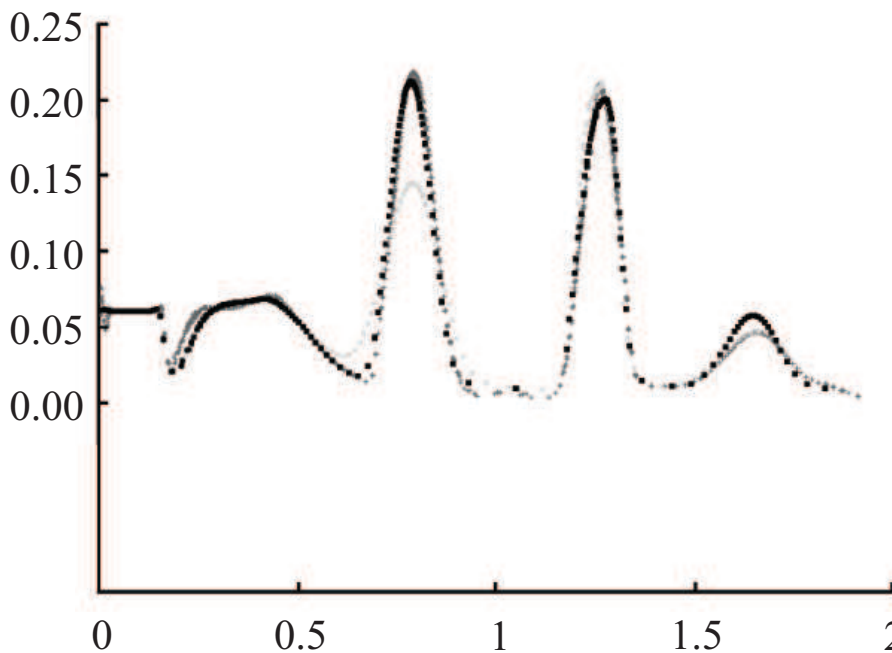


Рис. 2. Поверхностная плотность газа в зависимости от радиуса в момент времени  $T = 5$ . Черный — расчет потенциала на цилиндрической сетке, серый — на декартовой с  $h = 0.008$ , светло-серый — на декартовой с  $h = 0.016$

На рис. 2 показана амплитуда возмущений плотности в момент времени  $T = 5$ . Действительно, сравнивая расчет на цилиндрической и декартовой сетке с близким размером ячейки, видим, что на цилиндрической сетке, где в центральной области обеспечивается более высокое разрешение, амплитуда внутреннего кольцевого возмущения нарастает быстрее. При измельчении шага декартовой сетки в 2 раза различия в амплитуде к  $T = 5$  становятся малозначительными.

Отметим, что уже на сетках с характерным шагом  $h/R = 0.01$ , где  $R$  — радиус диска, как в цилиндрической, так и в декартовой геометрии близким образом воспроизводится течение газа в отдельном сгущении, линейный размер которого, отнесенный к радиусу диска, составляет 0.05–0.075. На рис. 3 приведена поверхностная плотность, поле скоростей и зависимость азимутальной скорости от радиуса сгустков, полученных в расчете на декартовой и цилиндрической сетке. Видно, что в обоих случаях отдельный сгусток представляет собой антициклонный вихрь с твердотельным вращением газа вокруг максимума плотности.

Приведенные результаты показывают, что для режимов, в которых происходит быстрое формирование плотных колец, а затем их фрагментация на отдельные сгущения, нарастание амплитуды плотности колец и течение газа в отдельных сгущениях воспроизводится как на декартовой, так и на цилиндрической сетке. Поэтому в случае комбинации с бессеточным методом решения уравнений газовой динамики выбор системы координат для расчета потенциала на сетке может быть обусловлен производительностью алгоритма, его эффективностью при распараллеливании и масштабируемостью на большое количество процессоров, а также простотой программной реализации.

Отметим также, что в итерационных методах фактическое время расчета гравитационного потенциала зависит от того, насколько начальное приближение близко к решению. В случае медленного изменения решения на каждый временной шаг достаточно одной итерации, а при моделировании динамики

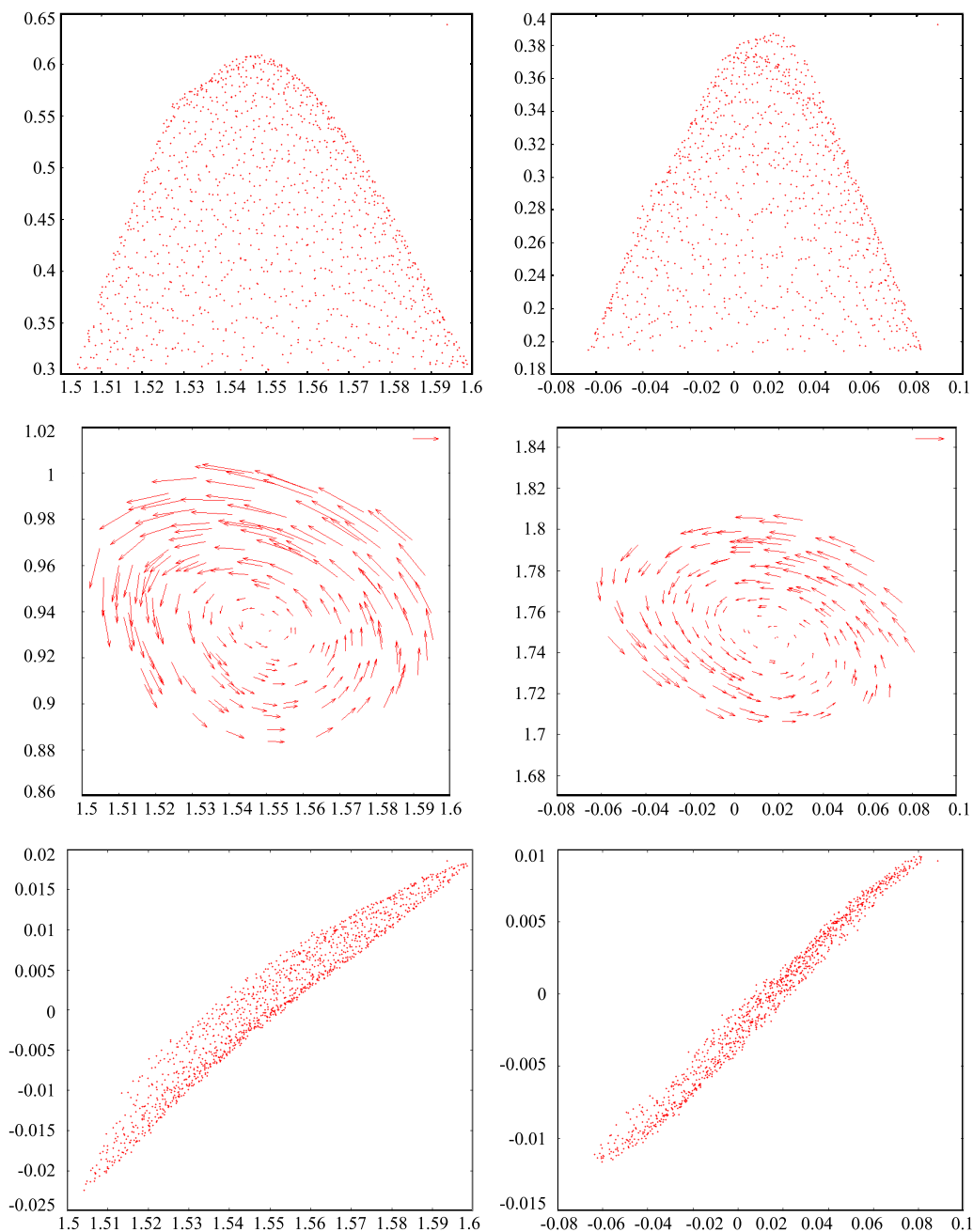


Рис. 3. Структура отдельного сгустка плотности, полученная на цилиндрической (слева) и декартовой (справа) сетке. Поверхностная плотность газа, поле скоростей и азимутальная скорость в зависимости от радиуса

множественных областей повышенной плотности требуемое количество итераций возрастает до 10–15. Для прямого метода время вычисления потенциала одинаково для любой скорости изменения плотности диска.

**4. Заключение.** Мы показали, что инвариантный относительно поворота метод решения газодинамических уравнений SPH в сочетании с методом решения уравнения Пуассона на декартовой сетке позволяет рассчитывать формирование и динамику глобальных осесимметричных структур в газовой среде с собственным гравитационным полем. При таком подходе сохраняются основные преимущества использования декартовых сеток:

- 1) однородное пространственное разрешение, удобное для моделирования решений с множественными областями повышенной плотности,
- 2) простота уравнений, методов и программной реализации,

3) возможность масштабирования на большое количество процессоров.

По сравнению с итерационными методами представленный в статье прямой алгоритм решения уравнения Пуассона обладает практически значимым преимуществом в производительности при расчете формирования и динамики множественных областей повышенной плотности.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты 14-01-31516 и 14-01-31088), программ Президиума РАН № 28 и № 21 и Интеграционного проекта СО РАН № 130. Работа поддержана Министерством образования и науки РФ. Расчеты проведены с использованием ресурсов Сибирского суперкомпьютерного центра (Новосибирск).

Соавторы статьи Стояновская О.П. и Снытников В.Н. работают по совместительству в Новосибирском государственном университете, 630090, г. Новосибирск, ул. Пирогова, д. 2.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ruge J.P., Wolf S., Uribe A.L., Klahr H.H.* Tracing planets in circumstellar discs. Observability of large-scale disc structures with ALMA // EPJ Web of Conferences. 2013. **46** (doi 10.1051/epjconf/20134602003).
2. *Вшивков В.А., Снытников А.В.* Построение эффективного параллельного метода решения уравнения Пуассона для моделирования эволюции протопланетного диска // Вычислительные методы и программирование. 2009. **10**. 116–122.
3. *Стояновская О.П., Снытников В.Н.* Особенности SPH-метода решения газодинамических уравнений для моделирования нелинейных волн в двухфазной гравитирующей среде // Математическое моделирование. 2010. **22**, № 5. 29–44.
4. *Стояновская О.П., Снытников В.Н.* Численное моделирование образования уединенных вихрей повышенной плотности в околозвездном диске // Вычислительные методы и программирование. 2012. **13**. 377–383.
5. *Hockney R.W., Eastwood J.W.* Computer simulation using particles. New York: McGraw-Hill, 1981.
6. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1989.
7. *Eastwood J.W., Brownrigg D.R.K.* Remarks on the solution of Poisson's equation for isolated systems // Journal of Computational Physics. 1979. **32**, N 1. 24–38.
8. *Frigo M., Johnson S.G.* The design and implementation of FFTW3 // Proceedings of the IEEE. 2005. **93**, N 2. 216–231.
9. *Ayala O., Wang L.-P.* Parallel implementation and scalability analysis of 3D Fast Fourier Transform using 2D domain decomposition // Parallel Computing. 2013. **39**, N 1. 58–77.
10. *Barge P., Jorda L.* Instabilities and structures in proto-planetary disks // EPJ Web of Conferences. 2013. **46** (doi 10.1051/epjconf/20134600001).
11. *Rice W.K.M., Lodato G., Pringle J.E., Armitage P.J., Bonnell I.A.* Planetesimal formation via fragmentation in self-gravitating protoplanetary discs // Mon. Not. R. Astron. Soc. 2006. **372**. 9–13.
12. *Boley A.C., Hayfield T., Mayer L., Durisen R.H.* Clumps in the outer disk by disk instability: why they are initially gas giants and the legacy of disruption // Icarus. 2010. **207**, N 2. 509–516.
13. *Vorobyov E.I., Basu S.* Formation and survivability of giant planets on wide orbits // The Astrophysical J. Letters. 2010. **714**, N 1. 133–138.
14. *Meru F., Bate M.R.* On the convergence of the critical cooling time-scale for the fragmentation of self-gravitating discs // Mon. Not. R. Astron. Soc. 2012. **427**, N 3. 2022–2046.
15. *Snytnikov V.N., Stoyanovskaya O.P.* Clump formation due to the gravitational instability of a multiphase medium in a massive protoplanetary disc // Mon. Not. R. Astron. Soc. 2013. **428**, N 1. 2–12.
16. *Nayakshin S., Helled R., Boley A.C.* Core-assisted gas capture instability: a new mode of giant planet formation by gravitationally unstable discs // Mon. Not. R. Astron. Soc. 2014. **440**, N 4. 3797–3808.
17. *Lodato G., Clarke C.* Resolution requirements for smoothed particle hydrodynamics simulations of self-gravitating accretion discs // Mon. Not. R. Astron. Soc. 2011. **413**, N 4. 2735–2740.

Поступила в редакцию  
10.12.2014

---

### An Algorithm for Solving Transient Problems of Gravitational Gas Dynamics: a Combination of the SPH Method with a Grid Method of Gravitational Potential Computation

O. P. Stoyanovskaya<sup>1</sup>, N. V. Snytnikov<sup>2</sup>, and V. N. Snytnikov<sup>3</sup>

<sup>1</sup> *Boreskov Institute of Catalysis, Siberian Branch of Russian Academy of Sciences; prospekt Lavrentyeva 5, Novosibirsk, 630090, Russia; Ph.D., Scientist, e-mail: stop@catalysis.ru*



<sup>2</sup> *Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics, Siberian Branch of Russian Academy of Sciences; prospekt Lavrentyeva 6, Novosibirsk, 630090, Russia; Ph.D., Scientist, e-mail: nik@ssd.sccc.ru*

<sup>3</sup> *Boreskov Institute of Catalysis, Siberian Branch of Russian Academy of Sciences; prospekt Lavrentyeva 5, Novosibirsk, 630090, Russia; Ph.D., Senior Scientist, e-mail: snyt@catalysis.ru*

Received December 10, 2014

**Abstract:** A new numerical algorithm to solve the unsteady equations of gravitational gas dynamics in the thin disk approximation is proposed. This algorithm is based on a combination of the meshless SPH (Smoothed Particle Hydrodynamics) method for gas dynamics and the convolution method for solving Poisson's equation on a Cartesian grid. This convolution method is of high performance due to the fact that the grid potential function is computed and stored only in the plane of the disk. The efficiency of the algorithm is demonstrated by numerical experiments on the formation of structures in a circumstellar disk. We compare the results obtained by using the grid method for solving Poisson's equation in Cartesian and cylindrical geometry and show that in both these cases it is possible to reproduce the solutions with axial symmetry and to illustrate the formation of solitary regions of enhanced density.

**Keywords:** self-gravitating circumstellar disk, structure formation, solitary clumps, Smoothed-Particle Hydrodynamics (SPH), Poisson's equation, gravitational gas dynamics.

### References

1. J. P. Ruge, S. Wolf, A. L. Uribe, and H. H. Klahr, "Tracing Planets in Circumstellar Discs. Observability of Large-Scale Disc Structures with ALMA," *Eur. Phys. J. Web Conf.* **46** (2013). doi 10.1051/epjconf/20134602003
2. V. A. Vshivkov and A. V. Snytnikov, "Development of an Efficient Parallel Poisson Equation Solver for the Simulation of Protoplanetary Disk Evolution," *Vychisl. Metody Programm.* **10**, 116–122 (2009).
3. O. P. Stoyanovskaya and V. N. Snytnikov, "Features of SPH Gas Dynamics for Modeling of Nonlinear Gravitational Waves in Multiphase Medium," *Mat. Model.* **22** (5), 29–44 (2010).
4. V. A. Vshivkov and A. V. Snytnikov, "Numerical Modeling of Formation of High Density Solitary Vortices in a Circumstellar Disk," *Vychisl. Metody Programm.* **13**, 377–383 (2012).
5. R. W. Hockney and J. W. Eastwood, *Computer Simulation Using Particles* (McGraw-Hill, New York, 1981).
6. A. N. Kolmogorov and S. V. Fomin, *Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis* (Nauka, Moscow, 1989; Dover Publ., Mineola, 1999).
7. J. W. Eastwood and D. R. K. Brownrigg, "Remarks on the Solution of Poisson's Equation for Isolated Systems," *J. Comput. Phys.* **32** (1), 24–38 (1979).
8. M. Frigo and S. G. Johnson, "The Design and Implementation of FFTW3," *Proc. IEEE* **93** (2), 216–231 (2005).
9. O. Ayala and L.-P. Wang, "Parallel Implementation and Scalability Analysis of 3D Fast Fourier Transform Using 2D Domain Decomposition," *Parallel Comput.* **39** (1), 58–77 (2013).
10. P. Barge and L. Jorda, "Instabilities and Structures in Proto-Planetary Disks," *Eur. Phys. J. Web Conf.* **46** (2013). doi 10.1051/epjconf/20134600001
11. W. K. M. Rice, G. Lodato, J. E. Pringle, et al., "Planetesimal Formation via Fragmentation in Self-Gravitating Protoplanetary Discs," *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **372**, 9–13 (2006).
12. A. C. Boley, T. Hayfield, L. Mayer, and R. H. Durisen, "Clumps in the Outer Disk by Disk Instability: Why They are Initially Gas Giants and the Legacy of Disruption," *Icarus* **207** (2), 509–516 (2010).
13. E. I. Vorobyov and S. Basu, "Formation and Survivability of Giant Planets on Wide Orbits," *Astrophys. J. Lett.* **714** (1), 133–137 (2010).
14. F. Meru and M. R. Bate, "On the Convergence of the Critical Cooling Time-Scale for the Fragmentation of Self-Gravitating Discs," *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **427** (3), 2022–2046 (2012).
15. V. N. Snytnikov and O. P. Stoyanovskaya, "Clump Formation due to the Gravitational Instability of a Multiphase Medium in a Massive Protoplanetary Disc," *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **428** (1), 2–12 (2013).
16. S. Nayakshin, R. Helled, and A. C. Boley, "Core-Assisted Gas Capture Instability: a New Mode of Giant Planet Formation by Gravitationally Unstable Discs," *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **440** (4), 3797–3808 (2014).
17. G. Lodato and C. J. Clarke, "Resolution Requirements for Smoothed Particle Hydrodynamics Simulations of Self-Gravitating Accretion Discs," *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **413** (4), 2735–2740 (2011).