

УДК 519.62

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЙ МЕТОДОМ РЕШЕТОЧНЫХ УРАВНЕНИЙ БОЛЬЦМАНА СО МНОГИМИ ВРЕМЕНАМИ РЕЛАКСАЦИИ

А. М. Захаров¹, Д. С. Сенин², Е. А. Грачев³

Рассмотрено использование метода решеточных уравнений Больцмана со многими временами релаксации для моделирования двумерных течений несжимаемой вязкой ньютоновской жидкости. На основании этого метода разработан программный комплекс, позволяющий моделировать двумерные турбулентные течения в средах с заданной формой препятствий. Проведена верификация созданного комплекса с использованием трех тестовых задач: стационарное течение Пуазейля в плоском канале, течение в квадратной каверне с подвижной верхней стенкой и вторая задача Стокса. Показано совпадение результатов моделирования с теоретическими значениями и результатами предыдущих исследователей. Для второй задачи Стокса проведено исследование зависимости глубины проникновения колебаний от их периода и коэффициента вязкости.

Ключевые слова: вычислительная гидродинамика, метод решеточных уравнений Больцмана со многими временами релаксации, двумерные течения ньютоновской жидкости, турбулентные течения, течение Пуазейля, вторая задача Стокса.

1. Введение. Метод решеточных уравнений Больцмана (Lattice Boltzmann Method, LBM) является методом вычислительной гидродинамики, основанным на численном решении системы дискретизованных кинетических уравнений. В этой системе решение вычисляется относительно дискретизованных функций плотности вероятности нахождения частиц флюида в определенной точке фазового пространства (в дальнейшем — функции распределения). Основные макроскопические параметры течения (например, локальные плотность, давление и скорость) могут быть рассчитаны как моменты определенных порядков от функции распределения.

Метод решеточных уравнений Больцмана (МРУБ) появился как результат осреднения функций состояния узлов в методе решеточного газа [6]. Основными целями данного осреднения было решить проблему шума при расчете макроскопических параметров течения, увеличить предел допустимых физических параметров и облегчить реализацию метода для трехмерного случая. Первоначально оператор интеграла столкновений в правой части эволюционного уравнения был записан в виде однопараметрического релаксационного оператора (Bhatnagar–Gross–Krook оператор, или BGK-оператор) [7–10]. Однопараметрический вариант интеграла столкновений стал самым популярным в силу своей простоты для теоретического анализа и программной реализации. Для увеличения устойчивости решения при больших числах Рейнольдса был предложен многопараметрический вид релаксационного оператора интеграла столкновений [11, 12], который позволяет существенно увеличить значение временного шага. Его активно используют в современных исследованиях с применением МРУБ [13–15].

Метод решеточных уравнений Больцмана применяется для моделирования многофазных систем [24], теплопереноса [28], многокомпонентных течений [16], систем с подвижными границами [17], а также свободных поверхностей [18]. Такой широкий спектр применения объясняется простотой и универсальностью первопринципов, заложенных в метод расчета.

Одной из многих причин популярности метода решеточных уравнений Больцмана является простота его реализации и эффективное масштабирование на массивно-параллельных системах. Такой подход является одним из немногих в вычислительной гидродинамике, которые позволяют получить реальный прирост скорости вычислений при использовании графических ускорителей [3]. В работах [1–5, 22] исследовалась реализация МРУБ с использованием CUDA, OpenCL и Xeon-Phi и был продемонстрирован

¹ Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, физический факультет, Ленинские горы, 119992, Москва; студент, e-mail: lehazakharov@yandex.ru

² Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, физический факультет, Ленинские горы, 119992, Москва; аспирант, e-mail: senin.dmitry@gmail.com

³ Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, физический факультет, Ленинские горы, 119992, Москва; доцент, e-mail: grachevea@gmail.com

близкий к линейному рост производительности расчетного алгоритма от числа используемых вычислительных узлов.

В настоящей статье рассмотрен метод решеточных уравнений Больцмана со многими временами релаксации, проведена его верификация для стационарного и турбулентного течений. Кроме того, с его помощью решена вторая задача Стокса и исследована зависимость полученного решения от периода колебаний пластинки и коэффициента вязкости флюида [20].

2. Метод решеточных уравнений Больцмана.

2.1. Базовая теория. Как известно из курса гидродинамики [20], одним из способов описания движения ньютоновской вязкой жидкости является система уравнений Навье–Стокса. Эта система позволяет определить плотность и скорость жидкости в каждой точке пространства в каждый момент времени в зависимости от начальных и граничных условий:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} (\nabla p + \mu \Delta \vec{v} + \vec{F}), \quad \nabla \cdot \vec{v} = 0.$$

Здесь $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ — векторное поле скоростей, p — давление, ρ — плотность, μ — коэффициент вязкости и \vec{F} — векторное поле внешних сил, действующих на каждую единицу объема жидкости. Через $\nu = \mu/\rho$ будем обозначать кинематическую вязкость,

Другой способ описания движения жидкости — уравнение Больцмана [19, 21]. Оно описывает эволюцию во времени функции распределения плотности вероятности (в дальнейшем будем называть ее функцией распределения), которая, в свою очередь, является функцией координаты, импульса и времени, т. е. $f = f(\vec{r}, \vec{p}, t)$:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} \frac{\vec{p}}{m} + \frac{\partial f}{\partial \vec{p}} \vec{F} = \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{\text{coll}}.$$

Здесь $\vec{F}(\vec{r}, t)$ — поле сил, действующее на псевдочастицы в жидкости, m — масса псевдочастиц, $\Omega = \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{\text{coll}}$ — интеграл столкновений, т.е. величина, которая характеризует изменение числа псевдочастиц в объеме $d\vec{p} d\vec{r}$ за счет их взаимодействия друг с другом.

Функция распределения нормируется согласно следующему условию: $\rho = \int f d\vec{r}$. Аналогично, макроскопическую скорость можно определить как $u = \frac{1}{\rho} \int f d\vec{r}$.

Мысленно выделим в некотором объеме жидкости направление, вдоль которого могут перемещаться псевдочастицы. За некоторый промежуток времени часть псевдочастиц действительно переместится вдоль выбранного направления, в то время как другая их часть изменит направление движения из-за столкновения с другими псевдочастицами, поэтому можно записать соотношение

$$f(\vec{r} + \vec{v} dt, t + dt) d\vec{r} - f(\vec{r}, t) d\vec{r} = dN_{\text{coll}} d\vec{r}. \tag{1}$$

Проще всего можно вычислить интеграл столкновений dN_{coll} , представив его в виде выражения с релаксационным членом (BGK-model [13]). Более подробное обоснование применимости такого представления можно найти в [21]. В настоящей статье мы ограничимся конечным выражением для интеграла столкновений в этом представлении: $dN_{\text{coll}} = -\frac{1}{\tau} (f - f^{\text{eq}})$, где f^{eq} — равновесная функция распределения. Тогда уравнение (1) можно представить в следующем виде:

$$f(\vec{r} + \vec{v} dt, t + dt) - f(\vec{r}, t) = -\frac{f(\vec{r}, t) - f^{\text{eq}}(\vec{r}, t)}{\tau}. \tag{2}$$

Как отмечено выше, в общем случае правая часть выражения (2) является интегралом столкновений $\Omega(\vec{r}, t)$. Основываясь на приближении времени релаксации, можно говорить о зависимости интеграла столкновений от равновесной функции распределения f^{eq} .

Следующим необходимым шагом является дискретизация получившегося уравнения [29]. Представим пространство в виде решетки (кубической, гексагональной и др.), в узлах которой располагаются псевдочастицы. Допустим, что имеется Q возможных направлений движения псевдочастиц в жидкости, тогда, повторяя приведенные выше рассуждения для каждого направления $i, i = 0, \dots, (Q - 1)$, систему дискретных кинетических уравнений Больцмана можно записать в форме

$$f_i(\vec{r} + \vec{v}_i dt, t + dt) - f_i(\vec{r}, t) = \Omega_i(\vec{r}, t). \tag{3}$$

В нашей работе метод решеточных уравнений Больцмана рассматривается на примере двумерных изотермических течений несжимаемой вязкой ньютоновской жидкости. Для моделирования подобных течений удобно использовать модель скоростей D2Q9 [23] (рис. 1).

Вид функции f^{eq} нам фактически известен — равновесным распределением по импульсам в классическом варианте является распределение Максвелла [21]. Для модели D2Q9 равновесная функция распределения имеет следующий вид [19, 30]:

$$f_i^{eq} = \omega_i \rho \left[1 + 3(\vec{e}_i, \vec{v}) + \frac{9}{2} (\vec{e}_i, \vec{v})^2 - \frac{3}{2} v^2 \right],$$

$$\omega_i = \begin{cases} 4/9 & \text{при } i = 0, \\ 1/9 & \text{при } i = 1, 2, 3, 4, \\ 1/36 & \text{при } i = 5, 6, 7, 8. \end{cases}$$

Итак, мы пришли к модели, в которой рассматривается течение среды как динамика ансамбля псевдочастиц. Область течения разбивается решеткой на ячейки квадратной формы. На каждой итерации по времени происходят два процесса, поэтому в методе решеточных уравнений Больцмана принято разбивать уравнение (3) на две следующие составляющие.

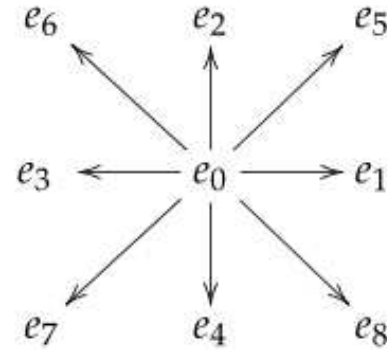


Рис. 1. Модель скоростей D2Q9

1. *Столкновение псевдочастиц.* Происходит локальное взаимодействие псевдочастиц внутри узлов решетки в соответствии с моделью абсолютно упругого столкновения.

Находятся значения функции распределения в результате столкновения псевдочастиц в каждом из узлов решетки: $\tilde{f}_i(\vec{r}, t) = f_i(\vec{r}, t) + \Omega_i(\vec{r}, t)$.

Основной сложностью этого этапа является правильный подход к описанию интеграла столкновений Ω_i . Как мы увидим, для решения этой проблемы существуют несколько основных подходов — SRT (Single Relaxation Time), MRT (Multiple Relaxation Time), TRT (Two-Relaxation Time) и др. В настоящей статье более подробно будет рассмотрен MRT-подход.

2. *Распространение псевдочастиц.* Псевдочастицы без взаимодействия друг с другом перемещаются между узлами решетки.

Каждая i -я функция распределения $\tilde{f}_i(\vec{r}, t)$, вычисленная на этапе столкновения, распространяется вдоль i -го направления скорости между узлами решетки: $f_i(\vec{r} + e_i dt, t + dt) = \tilde{f}_i(\vec{r}, t)$.

При проведении численных расчетов необходимо знать скорость, плотность и давление во всей области моделирования или в ее отдельных частях. Метод решеточных уравнений Больцмана позволяет определять эти величины следующим образом:

- плотность: $\rho(\vec{r}_j) = \sum_{0 \leq i \leq Q-1} f_i(\vec{r}_j)$,
- скорость: $\vec{u}(\vec{r}_j) = \frac{1}{\rho(\vec{r}_j)} \sum_{0 \leq i \leq Q-1} f_i(\vec{r}_j) e_i$,
- давление: $p(\vec{r}_j) = c_s^2 \rho(\vec{r}_j)$, где $c_s = c/\sqrt{3}$ — скорость звука.

2.2. MRT-подход. Как упоминалось выше, интеграл столкновений Ω может быть вычислен на основе из разных подходов. В уже рассмотренном ВГК-приближении $\Omega_i = \frac{1}{\tau} (f_i - f_i^{eq})$. Существует другой подход к расчету интеграла столкновений, который позволяет получить устойчивое решение при моделировании течений с большими числами Рейнольдса — MRT-подход, в котором интеграл столкновений имеет вид

$$\Omega = -S(f - f^{eq}), \tag{4}$$

где S — матрица столкновений. Тогда ВГК-приближение может быть получено из (4) при $S = \frac{1}{\tau} I$, где I — единичная матрица.

Этот подход основан на увеличении числа степеней свободы при моделировании интеграла столкновений. В нашей статье используется метод определения элементов матрицы S , применяемый в [11, 13]. Использование матрицы столкновений S означает переход от фазового пространства к пространству моментов. Применительно к модели скоростей D2Q9 такой подход позволяет ввести девять независимых моментов, которые интерпретируются как гидродинамические величины либо их потоки:

- плотность (момент 0-го порядка): ρ ;
- энергия (момент 2-го порядка): ϵ ;
- квадрат энергии (момент 4-го порядка): ϵ ;
- плотность потока вдоль x - и y -направлений (момент 1-го порядка): j_x и j_y ;
- тепловые потоки вдоль x - и y -направлений (момент 3-го порядка): q_x и q_y ;
- компоненты давления (момент 2-го порядка): p_{xx} и p_{xy} .

Переход от фазового пространства к пространству моментов происходит преобразованием функции распределения \vec{f} к вектору \vec{m} , координатами которого являются девять перечисленных выше моментов: $\vec{m} = (\rho, \epsilon, \epsilon, j_x, q_x, j_y, q_y, p_{xx}, p_{xy})^T$, причем вектор \vec{m} связан с функцией распределения следующим образом:

$$\vec{m} = M\vec{f}, \tag{5}$$

где M — матрица перехода, которая применительно к данной задаче задается в виде

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -4 & -1 & -1 & -1 & -1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 2 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Используя матрицу перехода M , выражение для интеграла столкновений (4) можно переписать в следующей форме: $\Omega_i = -M^{-1}S(\vec{m}_i - \vec{m}_i^{eq})$, где S — матрица столкновений с девятью релаксационными членами на ее диагоналях. Из экспериментов установлено, что эти параметры по абсолютному значению не должны превышать 2. Выбирая $S = \text{diag}(0, -1.1, -1, 0, -1.2, 0, -1.2, -1/\tau, -1/\tau)$ [12, 13], где τ — безразмерное время релаксации, определяющее кинематическую вязкость [22, 24]:

$$\nu = c_s^2 \left(\tau - \frac{1}{2} \right) \delta t. \tag{6}$$

Здесь c_s — скорость звука.

Для нахождения вектора \vec{m}^{eq} , отвечающего равновесной функции распределения, необходимо найти равновесные значения всех вышеперечисленных моментов. Плотность ρ и компоненты плотности потоков j_x и j_y сохраняются с течением времени, поэтому их называют гидродинамическими моментами. В частности, это объясняет выбор $S_0 = S_3 = S_5 = 0$. Остальные моменты изменяют свои значения в процессе столкновения частиц. В [13] найдены выражения для равновесных значений оставшихся моментов:

$$\begin{aligned} \epsilon^{eq} &= -2\rho + 3(j_x^2 + j_y^2), & \epsilon^{eq} &= \rho - 3(j_x^2 + j_y^2), \\ q_x^{eq} &= -j_x, & q_y^{eq} &= -j_y, \\ p_{xx}^{eq} &= j_x^2 - j_y^2, & p_{xy}^{eq} &= j_x j_y. \end{aligned} \tag{7}$$

Итак, сформулируем основные шаги MRT-подхода к моделированию гидродинамики методом решеточных уравнений Больцмана.

1. Переход от функции распределения к вектору \vec{m} по формуле (5): $\vec{m} = M\vec{f}$.
2. Вычисление значений равновесного вектора \vec{m}^{eq} по формулам (7).
3. Столкновение псевдочастиц в пространстве моментов: $\Delta\vec{m} = S(\vec{m} - \vec{m}^{eq})$.
4. Обратное преобразование к фазовому пространству: $\Delta\vec{f} = M^{-1}\Delta\vec{m}$.
5. Распространение псевдочастиц вдоль заданных направлений: $f_i(r + e_i dt, t + dt) - f_i(r, t) = -\Delta\vec{f}$.

3. Программная реализация. В реализованной модели решеточных уравнений Больцмана область моделирования течения представлялась в виде квадратной сетки с N_x числом узлов вдоль оси Ox и N_y вдоль оси Oy .

При таком разбиении каждая ячейка является либо внутренней, либо граничной. Для граничных ячеек на каждой итерации применялись граничные условия, соответствующие поставленной задаче. В рассмотренных ниже задачах использовались следующие типы граничных условий (ГУ).

1. *Периодические ГУ*. Это простейший тип ГУ, при котором каждая из Q компонент функции распределения ячейки при достижении границы области моделирования перемещается на противоположную границу [32]. Для выбранной модели скоростей (рис. 1) тип ГУ вдоль оси Ox : $f_i(0 + e_i dt, t + dt) = f_i(N_x - 1, t)$, $i = 1, 5, 8$; вдоль оси Oy [31]: $f_i(0 + e_i dt, t + dt) = f_i(N_y - 1, t)$, $i = 2, 5, 6$.
2. *ГУ типа отскока*. Это ГУ, когда при достижении границы области моделирования каждая из Q компонент функции распределения заменяется на противоположную [32]. Тип ГУ представим в виде: $f_i(r + e_i dt, t + dt) - f_{i^-}(r, t) = 0$, $i = 1, \dots, Q$, где r — координата границы области моделирования, индекс i^- — индекс функции распределения с противоположно направленной скоростью, т.е. $e_i = -e_{i^-}$.
3. *ГУ фон Неймана*. При этом типе ГУ поддерживается постоянная скорость псевдочастиц вдоль заданной границы области моделирования [32].

Кроме того, необходимо отметить, что в реализованной модели применяются смешанные ГУ, задающие перечисленные выше ГУ на разных границах области моделирования.

Комплекс программ реализован на языке программирования C++. Для моделирования течений методом решеточных уравнений Больцмана авторами был создан класс с полями, задающими размер области моделирования N_x и N_y . В структуре выделяется память под необходимые для расчетов физические величины. Макроскопические параметры ρ , v задаются в виде двумерных массивов размером $N_x \times N_y$, хранящие значения плотности и скорости для каждого из узлов сетки. Функции распределения f_i задаются в виде трехмерных массивов размером $N_x \times N_y \times Q$, хранящих каждую из своих компонент для каждого из узлов сетки.

Методы класса:

1. задают начальные условия (инициализация начальных значений для скорости и плотности для всех узлов сетки и присваивание начальным потокам плотности их равновесных значений);
2. производят сам процесс моделирования течения (распространение псевдочастиц, применение ГУ, столкновение псевдочастиц, пересчет макроскопических параметров).

Таким образом, в разработанном комплексе программ моделирование течений методом решеточных уравнений Больцмана выполняется по блок-схеме, представленной на рис. 2.

4. Верификация.

4.1. Течение Пуазейля. Рассмотрим простейший случай движения вязкой несжимаемой жидкости. Пусть жидкость заключена между двумя параллельными плоскостями. Направим оси Ox и Oy так, как показано на рис. 3. При этих условиях в [20] показано, что x -компонента скорости распределена вдоль сечения трубы по параболическому закону

$$v_x = \frac{\Delta p}{4\eta L} (R^2 - r^2), \quad (8)$$

где $\eta = \rho\nu$ — динамическая вязкость и R — радиус трубы.

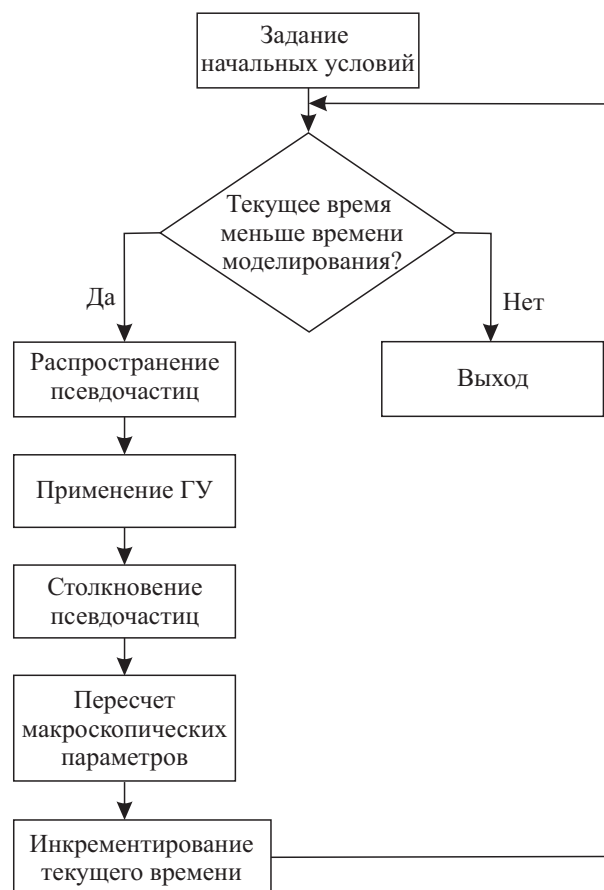


Рис. 2. Блок-схема реализованного программного комплекса

Для решения данной задачи методом решеточных уравнений Больцмана разбиваем область моделирования на ячейки квадратной формы. На верхней и нижней границе заданы ГУ типа отскока, на правой и левой стенке — периодические ГУ. Число узлов вдоль оси x : $N_x = 1000$, вдоль оси y : $N_y = 30$, количество итераций по времени $N_{iter} = 1000$. Давление соответствовало плотности $\rho|_{x=0} = 1.001$, $\rho|_{x=N_x} = 1.0$; число Рейнольдса $Re = 150$; время релаксации $\tau = 1.0$. Тогда для выбранной модели теоретическое решение (8) примет вид [22]

$$v_x = \frac{p|_{x=0} - p|_{x=N_x}}{4\eta N_x} \left(\left(\frac{N_y}{2} \right)^2 - \left(y_i - \frac{N_y}{2} \right)^2 \right).$$

При моделировании установлено, что скорость распределена вдоль сечения трубы по параболическому закону, причем профиль скорости показывает хорошее соответствие теоретическому решению, полученному в [20] (рис. 4) и результатам публикаций [22, 30, 31].

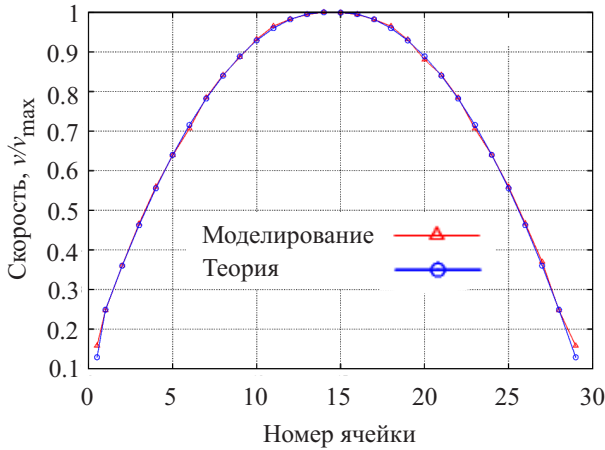


Рис. 4. График распределения x -компоненты скорости вдоль поперечного сечения трубы для теоретического решения и решения, полученного при моделировании

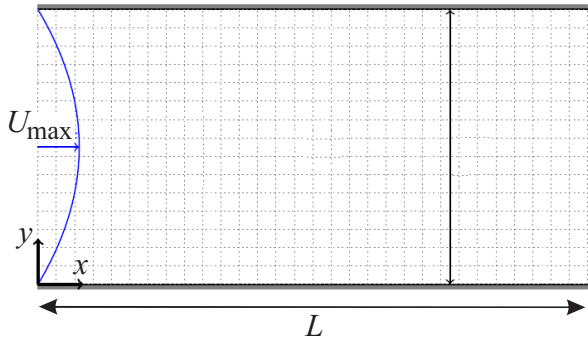


Рис. 3. Модель течения в задаче Пуазейля

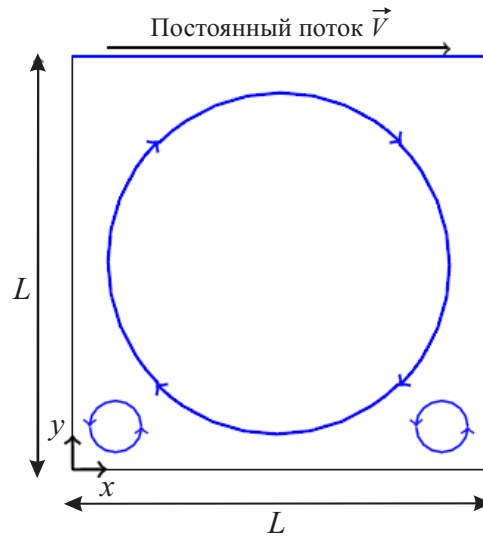


Рис. 5. Модель течения в каверне с движущейся верхней стенкой при больших числах Рейнольдса

4.2. Течение в каверне с движущейся верхней стенкой. Следующий тест, позволяющий проверить устойчивость MRT-подхода, — это течение в каверне с движущейся верхней стенкой. Рассматривается квадратная каверна, заполненная жидкостью, стенки которой параллельны декартовым осям координат. На верхней стенке задается ГУ фон Неймана с постоянной величиной скорости вдоль направления, совпадающего с осью Ox . На остальных стенках заданы ГУ типа отскока. В результате в каверне образуется первичный вихрь, вращающийся по часовой стрелке. Кроме того, по прошествии некоторого времени возникают вторичные вихри в углах каверны либо в других местах, которые вращаются против часовой стрелки (рис. 5). Интенсивность вихрей зависит от числа Рейнольдса Re , которое задается в виде $Re = \frac{vL}{\nu}$, где v — характерная скорость, L — характерный линейный размер области, в которой происходит течение, и ν — кинематический коэффициент вязкости. При решении задачи о течении в каверне в качестве L будем рассматривать длину каверны, а в качестве v — скорость горизонтального потока вдоль верхней границы.

Для моделирования течения каверна представлялась в виде сетки $[0, N_x] \times [0, N_y]$, где N_i — число узлов решетки вдоль i -го направления. На верхней стенке применяются ГУ фон Неймана вдоль направления, совпадающего с осью Ox , на остальных стенках используются ГУ типа отскока. Моделирование проводится при различных числах Рейнольдса $Re = 1, 60, 100, 300$, число узлов решетки $N_x = N_y = 100$,

количество итераций по времени $N_{\text{iter}} = 1000$. Изменение числа Рейнольдса обусловлено изменением времени релаксации (см. уравнение (6)).

В ходе моделирования получены графики распределения x - и y -компонент скорости вдоль каверны при различных числах Рейнольдса Re (рис.7–9). На рис. 6 приводится сравнение результатов, полученных при моделировании (синяя и красная ломаные), с результатами статьи [23] (черная ломаная) при $v = 0.01$, $N_x = N_y = 50$ и $Re = 1$. Видно что приведенные ниже графики хорошо соотносятся с результатами, полученными в публикациях [13, 14, 23, 35].

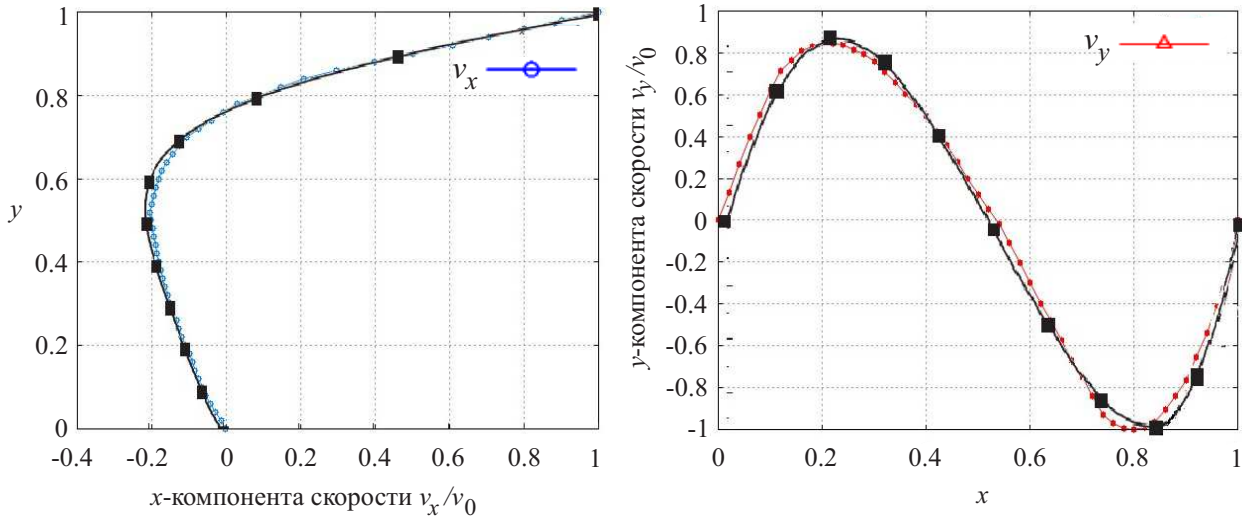


Рис. 6. Сравнение полученных аналитически графиков компонент x (слева) и y (справа) вектора скорости (синяя и красная ломаные) с результатами [23] (черная ломаная) для $Re = 1$

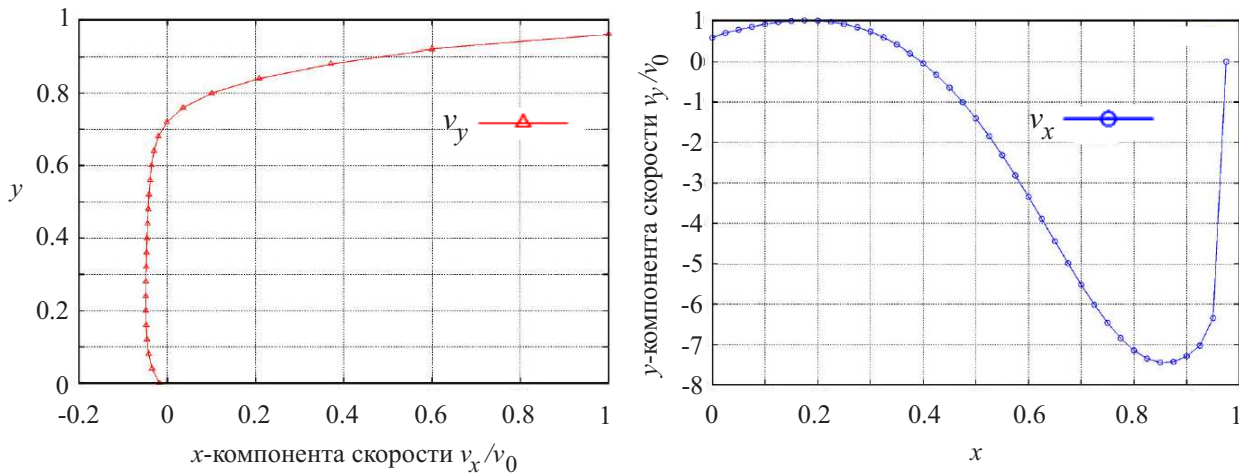


Рис. 7. Графики компонент x (слева) и y (справа) вектора скорости для $Re = 60$

4.3. Вторая задача Стокса. Изучение движения, возникающего в вязкой жидкости при колебаниях погруженных в нее тел, удобно начать с типичного примера — задачи, получившей название второй задачи Стокса. Пусть несжимаемая жидкость соприкасается с неограниченной плоской поверхностью, совершающей в своей плоскости гармоническое колебательное движение с частотой ω . Необходимо определить возникающее при этом в жидкости движение.

Пусть колебательное движение совершает плоскость Oy , движение жидкости происходит в области $x > 0$. Ось y выберем вдоль направления колебания поверхности. Скорость колеблющейся плоскости представим в виде $v = V_0 \cos(\omega t)$ (рис. 10).

Из курса гидродинамики [20] известно, что при такой постановке задачи в жидкости возникают поперечные волны, причем y -компонента скорости v_y , перпендикулярная распространению волны, опреде-

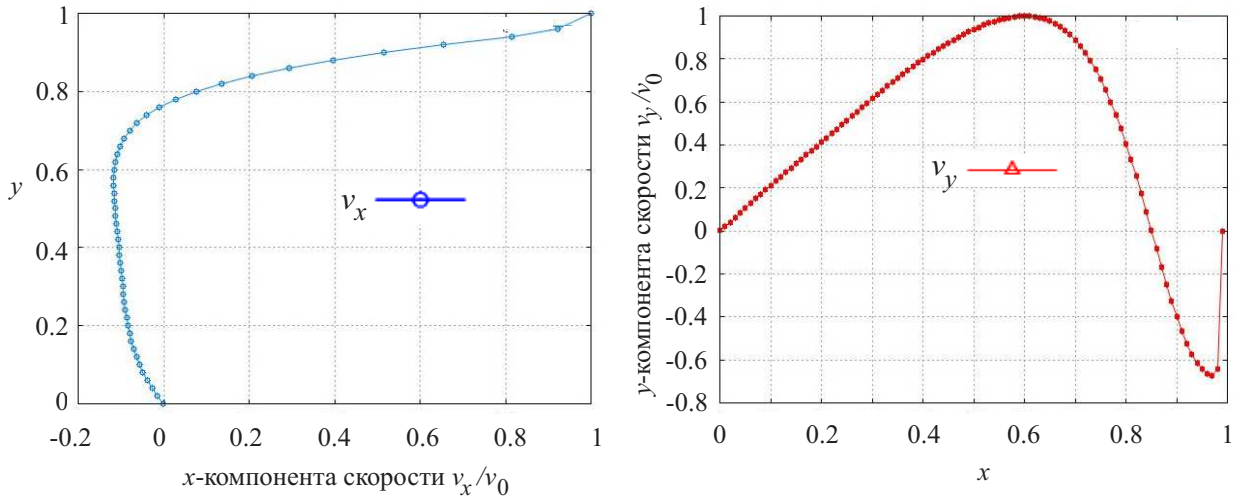


Рис. 8. Графики компонент x (слева) и y (справа) вектора скорости для $Re = 100$

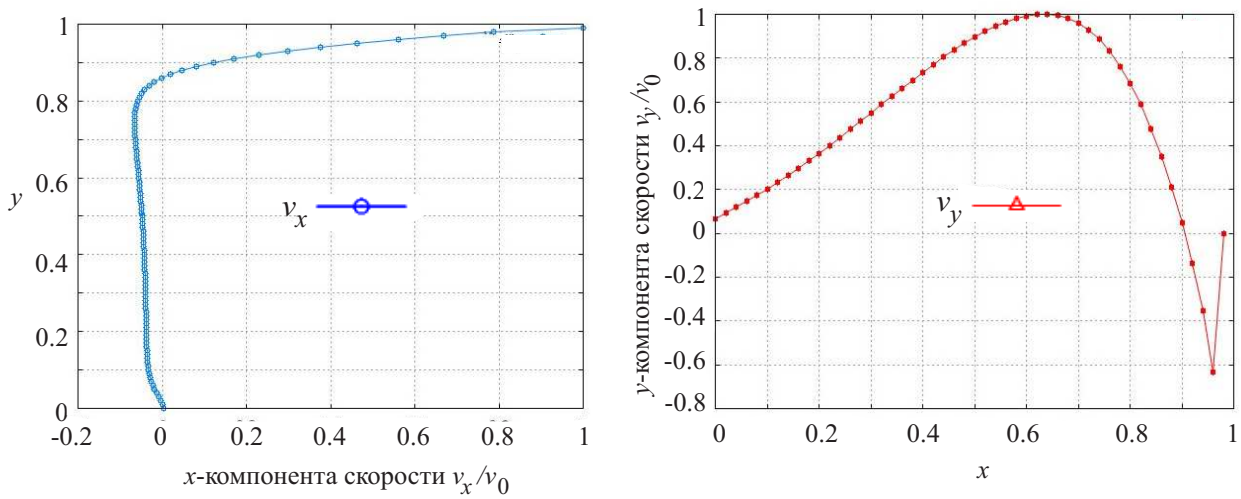


Рис. 9. Графики компонент x (слева) и y (справа) вектора скорости для $Re = 300$

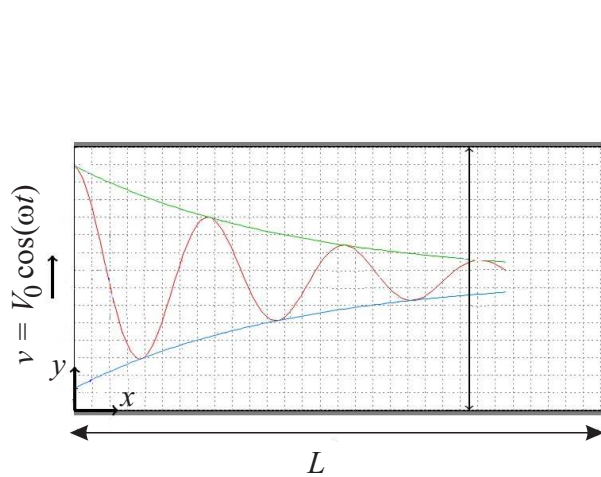


Рис. 10. Модель течения жидкости во второй задаче Стокса

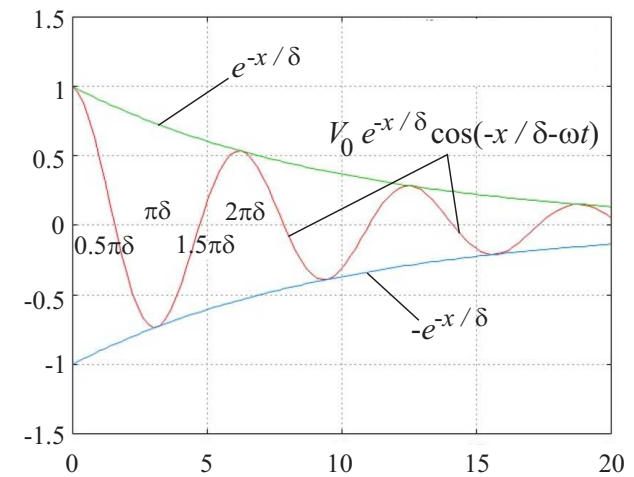


Рис. 11. График зависимости y -компоненты скорости от x координаты

ляется следующим образом:

$$v_y = V_0 e^{-x/\delta} e^{i(x/\delta - \omega t)}, \quad i\omega = \nu k^2, \quad k = \frac{1+i}{\delta}, \quad \delta = \sqrt{\frac{2\nu}{\omega}}. \quad (9)$$

Считая, что величина скорости определяется вещественной частью выражения (9), рассмотрим зависимость распределения y -компоненты скорости в некоторый момент времени $t = t_0 = \frac{2\pi n}{\omega}$ от координаты x (рис. 11).

Из этого графика следует, что мгновенное значение y -компоненты скорости является периодической функцией координаты x , амплитуда которой убывает экспоненциально с ростом x , причем характерной длиной, на которой амплитуда убывает в e раз, является величина δ , получившая название глубины проникновения.

Для решения поставленной задачи методом решеточных уравнений Больцмана разобьем область течения жидкости $x > 0$ на ячейки квадратной формы. На верхней и нижней границах используем периодические ГУ, на правой границе задаем ГУ типа отскока, а на левой — ГУ фон Неймана со скоростью вдоль оси Oy , изменяющейся по гармоническому закону с частотой ω . В эксперименте $N_x = 2000$ — число узлов решетки вдоль оси Ox , $N_y = 40$ — число узлов по оси Oy . Амплитуда скорости колеблющейся плоскости $V_0 = 0.02$. Выбор достаточно большого N_x обусловлен условием удаленности правой стенки от колеблющейся поверхности для того, чтобы стенка не вносила искажений в полученные результаты. Проводится моделирование для $N_{\text{iter}} = 3000$ шагов по времени с временами релаксации $\tau = 0.8, 1.0$ и периодами колебания $T = 50, 100$.

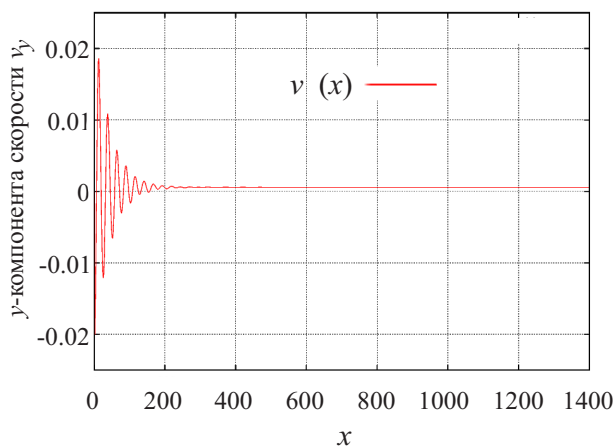


Рис. 12. График зависимости y -компоненты скорости от x координаты при $T = 50$ и $\tau = 0.8$

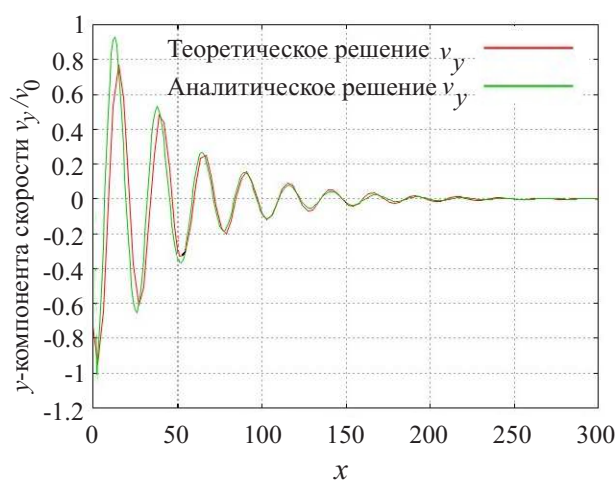


Рис. 13. Графики зависимости аналитического (зеленая ломаная) и теоретического (красная ломаная) решения для y -компоненты скорости от x координаты при $T = 50$ и $\tau = 0.8$

Рассмотрим подробнее эксперимент для $\tau = 0.8$ и $T = 50$. Как видно из графика (рис. 12), y -компонента скорости убывает экспоненциально по гармоническому закону с ростом x , причем достаточно быстро. На рис. 13 приведено сравнение аналитического (красная ломаная) и теоретического решения (зеленая ломаная) при данных параметрах, из которого видно, что решения достаточно близки.

Большой интерес представляет изучение поведения жидкости при различных ν и T , поскольку именно они определяют величину глубины проникновения. Рассмотрим, как меняется δ при изменении периода колебаний T . На следующем графике (рис. 14) приведены зависимости y -компоненты скорости от координаты x для периодов колебаний соответственно $T = 50, 100$. Из графиков следует, что $\delta|_{T=50} < \delta|_{T=100}$ и с уменьшением периода колебаний глубина проникновения падает.

Из следующих графиков (рис. 15, 16) следует, что при $T = 50$ и $T = 100$ имеем $\delta|_{\tau=0.8} < \delta|_{\tau=1.0}$ и глубина проникновения растет при увеличении вязкости ν .

Итак, методом решеточных уравнений Больцмана решена вторая задача Стокса. Исследована зависимость полученного решения от параметров, таких как период колебаний неподвижной плоскости и времени релаксации. В ходе исследования установлено полное соответствие полученных результатов теоретическому решению [20] (см. формулу (9)):

- 1) амплитуда скорости, перпендикулярной направлению распространения волны, затухает с глубиной проникновения δ (рис. 12, 14–16);
- 2) установлена зависимость глубины проникновения δ от частоты колебания неподвижной плоскости ω

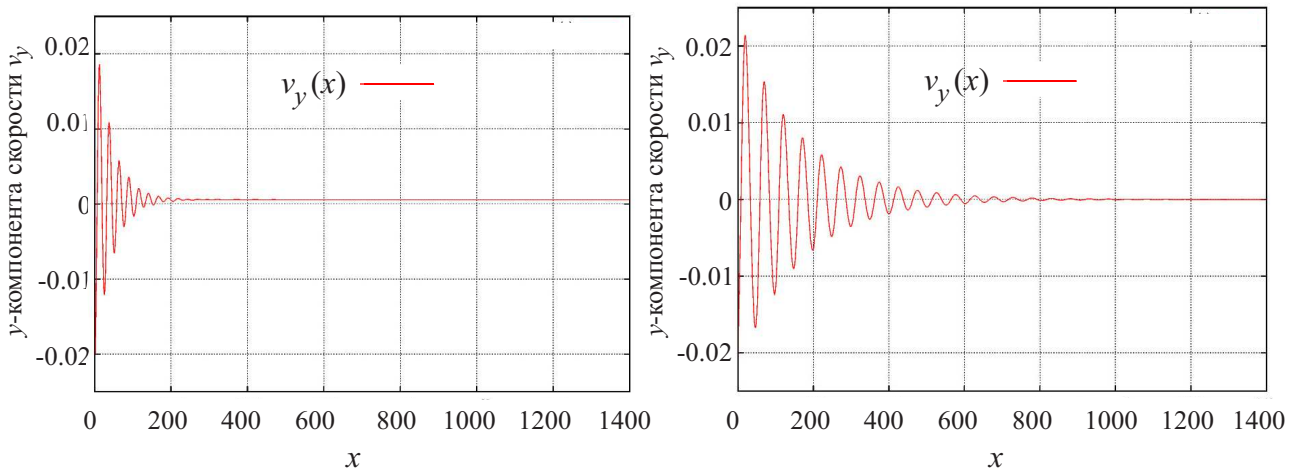


Рис. 14. График зависимости y -компоненты скорости от x -координаты при $\tau = 1.0$ и $T = 50$ (слева) и $T = 100$ (справа)

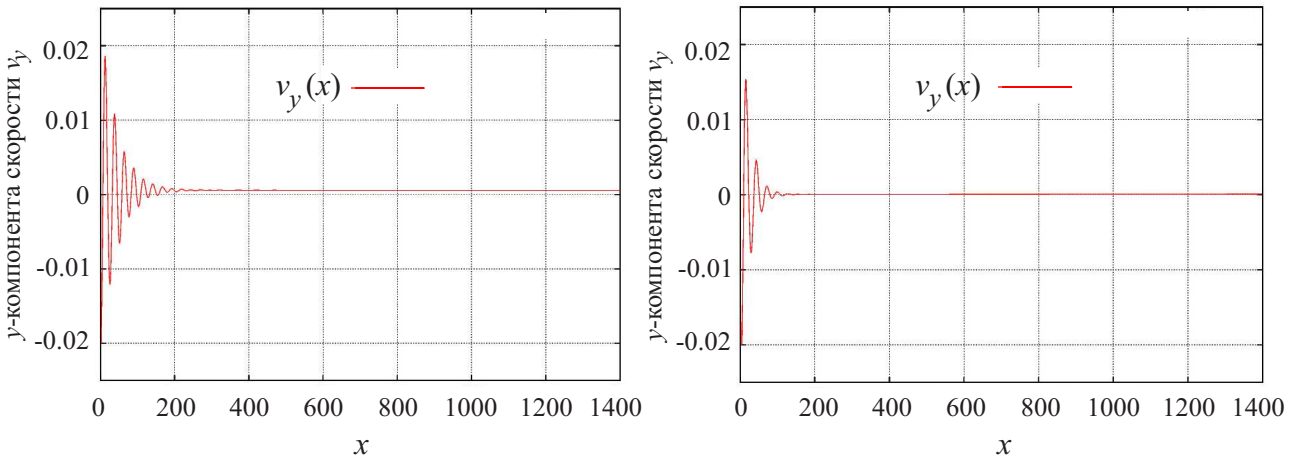


Рис. 15. График зависимости y -компоненты скорости от x -координаты при $T = 50$, $\tau = 1.0$ (слева), $\tau = 0.8$ (справа)

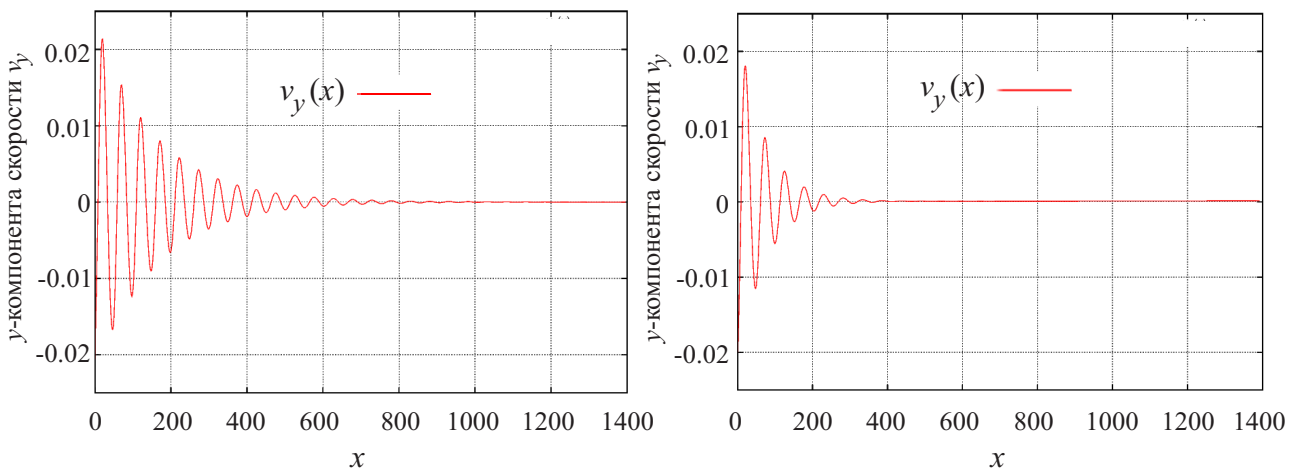


Рис. 16. График зависимости y -компоненты скорости от x -координаты при $T = 100$, $\tau = 1.0$ (слева), $\tau = 0.8$ (справа)

и коэффициента вязкости ν , а именно: глубина проникновения падает с увеличением частоты волны и растет с увеличением вязкости жидкости.

5. Выводы. В настоящей статье рассмотрен метод решеточных уравнений Больцмана для моделирования течений несжимаемой вязкой ньютоновской жидкости. Продемонстрирован подход, основанный на использовании многих времен релаксации для моделирования течений с различными числами Рейнольдса.

На основе данного метода разработан программный комплекс и проведена его верификация. Верификация проводилась на двух типах течений: стационарное течение Пуазейля в плоском канале и течение в квадратной каверне с подвижной верхней стенкой. Показано, что результаты численного моделирования согласуются с теоретическими значениями и результатами предшествующих исследователей.

Выполнено решение второй задачи Стокса и исследована зависимость полученного решения от коэффициента вязкости ν и частоты колебаний ω . В ходе моделирования выявлены следующие характерные особенности данного типа течения, которые совпадают с выводами, сделанными при теоретическом решении данной задачи:

- 1) амплитуда скорости, перпендикулярной распространению волны вдоль этого направления, имеет вид затухающих гармонических колебаний;
- 2) решение зависит от глубины проникновения δ ;
- 3) глубина проникновения δ падает с увеличением частоты ω колебания плоскости;
- 4) глубина проникновения δ растет с увеличением вязкости ν жидкости.

В дальнейших планах рассматривается исследование устойчивости полученного алгоритма, дополнительная оптимизация и его распараллеливание. Кроме того, представляется важным переход к граничным условиям повышенной точности и моделирование течений с подвижными границами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Calore E., Schifano S.F., Tripicciono R.* A portable OpenCL lattice Boltzmann code for multi- and many-core processor architectures // *Procedia Computer Science*. 2014. **29**. 40–49.
2. *Januszewski M., Kostur M.* Sailfish: a flexible multi-GPU implementation of the lattice Boltzmann method // *Computer Physics Communications*. 2014. **185**, N 9. 2350–2368.
3. *Habich J., Feichtinger C., Köstler H., Hager G., Wellein G.* Performance engineering for the lattice Boltzmann method on GPGPUs: architectural requirements and performance results // *Computers & Fluids*. 2013. **80**. 276–282.
4. *Crimi G., Mantovani F., Pivanti M., Schifano S.F., Tripicciono R.* Early experience on porting and running a lattice Boltzmann code on the Xeon-phi co-processor // *Procedia Computer Science*. 2013. **18**. 551–560.
5. *Delbosc N., Summers J.L., Khan A.I., Kapur N., Noakes C.J.* Optimized implementation of the lattice Boltzmann method on a graphics processing unit towards real-time fluid simulation // *Computers & Mathematics with Applications*. 2014. **67**, N 2. 462–475.
6. *McNamara G.R., Zanetti G.* Use of the Boltzmann equation to simulate lattice-gas automata // *Phys. Rev. Lett.* 1988. **61**, N 20. 2332–2335.
7. *Bhatnagar P.L., Gross E.P., Krook M.* A model for collision processes in gases. I. Small amplitude processes in charged and neutral one-component systems // *Phys. Rev.* 1954. **94**, N 3. 511–525.
8. *Qian Y.H., d’Humières D., Lallemand P.* Lattice BGK models for Navier–Stokes equation // *Europhys. Lett.* 1992. **17**, N 6. 479–484.
9. *Chen H., Chen S., Matthaeus W.H.* Recovery of the Navier–Stokes equations using a lattice-gas Boltzmann method // *Phys. Rev. A*. 1992. **45**, N 8. R5339–R5342.
10. *Behrend O., Harris R., Warren P.B.* Hydrodynamic behavior of lattice Boltzmann and lattice Bhatnagar–Gross–Krook models // *Phys. Rev. E*. 1994. **50**, N 6. 4586–4595.
11. *d’Humières D.* Generalized lattice Boltzmann equations // *Rarefied Gas Dynamics: Theory and Simulations*. Reston: Amer. Inst. Aeronaut. Astronaut., 1994. 450–458.
12. *d’Humières D., Ginzburg I., Krafczyk M., Lallemand P., Luo L.-S.* Multiple-relaxation-time lattice Boltzmann models in three dimensions // *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*. 2002. **360**. 437–451.
13. *Rettinger C.* Fluid flow simulations using the lattice Boltzmann method with multiple relaxation times. Erlangen: Friedrich-Alexander-Universität Erlangen–Nürnberg, 2013.
14. *Razzaghian M., Pourtousi M., Darus N.* Simulation of flow in lid driven cavity by MRT and SRT // *Proc. Int. Conf. on Mechanical and Robotics Engineering (ICMRE’2012)*, Phuket, Thailand, May 16–27, 2012. Johannesburg: Planetary Scientific Research Center, 94–97.
15. *Zhen-Hua C., Bao-Chang S., Lin Z.* Simulating high Reynolds number flow in two-dimensional lid-driven cavity by multi-relaxation-time lattice Boltzmann method. *Chinese Phys.* 2006. **15**, N. 8. 1855–1863.
16. *Leclaire S., Pellerin N., Reggio M., Trépanier J.-Y.* Enhanced equilibrium distribution functions for simulating immiscible multiphase flows with variable density ratios in a class of lattice Boltzmann models // *International Journal of Multiphase Flow*. 2013. **57**. 159–168.

17. *Favier J., Revell A., Pinelli A.* A lattice Boltzmann-immersed boundary method to simulate the fluid interaction with moving and slender flexible objects // *Journal of Computational Physics*. 2014. **261**. 145–161.
18. *Anderl D., Bogner S., Rauh C., Rüde U., Delgado A.* Free surface lattice Boltzmann with enhanced bubble model // *Computers & Mathematics with Applications*. 2014. **67**, N 2. 331–339.
19. *Елизарова Т.Г.* Квазигазодинамические уравнения и методы расчета вязких течений. Лекции по математическим моделям и численным методам в динамике газа и жидкости. М.: Научный Мир, 2007.
20. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. М.: Наука, 1980.
21. *Квасников И.А.* Теория неравновесных систем. М.: Изд-во МГУ, 2003.
22. *Бижулов Д.А., Сенин Д.С., Демин Д.С., Дмитриев А.В., Грачев Н.Е.* Реализация метода решеточных уравнений Больцмана для расчетов на GPU-кластере // *Вычислительные методы и программирование*. 2012. **13**. 13–19.
23. *Кривовичев Г.В.* О расчете течений вязкой жидкости методом решеточных уравнений Больцмана // *Компьютерные исследования и моделирование*. 2013. **5**, № 2. 165–178.
24. *Куперштох А.Л.* Трехмерное моделирование двухфазных систем типа жидкость–пар методом решеточных уравнений Больцмана на GPU // *Вычислительные методы и программирование*. 2012. **13**. 130–138.
25. *Кривовичев Г.В.* Об устойчивости конечно-разностных решеточных схем Больцмана // *Вычислительные методы и программирование*. 2013. **14**. 1–8.
26. *Кривовичев Г.В.* О применении интегро-интерполяционного метода к построению одношаговых решеточных кинетических схем Больцмана // *Вычислительные методы и программирование*. 2012. **13**. 19–27.
27. *Куперштох А.Л.* Трехмерное моделирование методом LBE на гибридных GPU-кластерах распада бинарной смеси жидкого диэлектрика с растворенным газом на систему парогазовых каналов // *Вычислительные методы и программирование*. 2012. **13**. 384–390.
28. *Grazyna K.* The numerical solution of the transient heat conduction problem using the lattice Boltzmann method // *Scientific Research of the Institute of Mathematics and Computer Science*. 2006. N 11. 23–30.
29. *Latt J.* Choice of units in lattice Boltzmann simulations. [Электронный ресурс]. (<http://wiki.palabos.org/>).
30. *Wolf-Gladrow D.A.* Lattice-gas cellular automata and lattice Boltzmann models: an introduction. Berlin: Springer, 2000.
31. *Mattila K.* Implementation techniques for the lattice Boltzmann method. Jyväskylä: Univ. of Jyväskylä, 2010.
32. *Sukop M.C., Thorne D.T.* Lattice Boltzmann modeling: an introduction for geoscientists and engineers. New York: Springer, 2006.
33. *Zou Q., He X.* On pressure and velocity boundary conditions for the lattice Boltzmann BGK model // *Phys. of Fluids*. 1997. **9**, N 6. 1591–1599.
34. *Narváez A., Harting J.* Evaluation of pressure boundary conditions for permeability calculations using the lattice-Boltzmann method // *Advances in Applied Mathematics and Mechanics*. 2010. **2**, N 5. 685–700.
35. *Chen S., Martinez D., Mei R.* On boundary conditions in lattice Boltzmann methods // *Phys. of Fluids*. 1996. **8**, N 9. 2527–2536.
36. *Raabe D.* Overview of the lattice Boltzmann method for nano- and microscale fluid dynamics in materials science and engineering // *Modelling Simul. Mater. Sci. Eng.* 2004. **12**, N 6. R13–R46.
37. *Boyd J., Buick J., Green S.* A second-order accurate lattice Boltzmann non-Newtonian flow model // *J. Phys. A.: Mathematical and General*. 2006. N 39, N 46. 14241–14247.

Поступила в редакцию
30.09.2014

Flow Simulation by the Lattice Boltzmann Method with Multiple-Relaxation Times

E. A. Zakharov¹, D. S. Senin², and E. A. Grachev³

¹ *Lomonosov Moscow State University, Faculty of Physics; Leninskie Gory, Moscow, 119992, Russia; Student, e-mail: lezhakharov@yandex.ru*

² *Lomonosov Moscow State University, Faculty of Physics; Leninskie Gory, Moscow, 119992, Russia; Graduate Student, e-mail: senin.dmitry@gmail.com*

³ *Lomonosov Moscow State University, Faculty of Physics; Leninskie Gory, Moscow, 119992, Russia; Ph.D., Associate Professor, e-mail: grachevea@gmail.com*

Received September 30, 2014

Abstract: The lattice Boltzmann method with a multirelaxation collision integral is considered to simulate two-dimensional flows of an incompressible viscous Newtonian fluid. On the basis of this method, a software

package that allows one to simulate two-dimensional turbulent flows in a medium with a given shape of obstacles is developed. This package is verified using the following three test problems: a steady Poiseuille flow in a plane channel, a flow in a square cavity with a moving top wall, and the second Stokes problem. The numerical results are in good agreement with the theoretical results and with the results of previous studies. For the second Stokes problem, the dependence of the penetration depth of oscillations on their period and the viscosity coefficient is studied.

Keywords: computational fluid dynamics, lattice Boltzmann method, multiple-relaxation time, two-dimensional flows of Newtonian fluid, turbulent flows, Poiseuille flow, second Stokes problem.

References

1. E. Calore, S. F. Schifano, and R. Tripicciono, "A Portable OpenCL Lattice Boltzmann Code for Multi- and Many-core Processor Architectures," *Procedia Comput. Sci.* **29**, 40–49 (2014).
2. M. Januszewski and M. Kostur, "Sailfish: A Flexible Multi-GPU Implementation of the Lattice Boltzmann Method," *Comput. Phys. Commun.* **185** (9), 2350–2368 (2014).
3. J. Habich, C. Feichtinger, H. Köstler, et al., "Performance Engineering for the Lattice Boltzmann Method on GPGPUs: Architectural Requirements and Performance Results," *Comput. Fluids* **80**, 276–282 (2013).
4. G. Crimi, F. Mantovani, M. Pivanti, et al., "Early Experience on Porting and Running a Lattice Boltzmann Code on the Xeon-phi Co-Processor," *Procedia Comput. Sci.* **18**, 551–560 (2013).
5. N. Delbosc, J. L. Summers, A. I. Khan, et al., "Optimized Implementation of the Lattice Boltzmann Method on a Graphics Processing Unit towards Real-Time Fluid Simulation," *Comput. Math. Appl.* **67** (2), 462–475 (2014).
6. G. R. McNamara and G. Zanetti, "Use of the Boltzmann Equation to Simulate Lattice-Gas Automata," *Phys. Rev. Lett.* **61** (20), 2332–2335 (1988).
7. P. L. Bhatnagar, E. P. Gross, and M. Krook, "A Model for Collision Processes in Gases. I. Small Amplitude Processes in Charged and Neutral One-Component Systems," *Phys. Rev.* **94** (3), 511–525 (1954).
8. Y. H. Qian, D. d'Humières, and P. Lallemand, "Lattice BGK models for Navier–Stokes Equation," *Europhys. Lett.* **17** (6), 479–484 (1992).
9. H. Chen, S. Chen, and W. H. Matthaeus, "Recovery of the Navier-Stokes Equations Using a Lattice-Gas Boltzmann Method," *Phys. Rev. A* **45** (8), R5339–R5342 (1992).
10. O. Behrend, R. Harris, and P. B. Warren, "Hydrodynamic Behavior of Lattice Boltzmann and Lattice Bhatnagar–Gross–Krook Models," *Phys. Rev. E* **50** (6), 4586–4595 (1994).
11. D. d'Humières, "Generalized Lattice Boltzmann Equations," in *Rarefied Gas Dynamics: Theory and Simulations* (Amer. Inst. Aeronaut. Astronaut., Reston, 1994), pp. 450–458.
12. D. d'Humières, I. Ginzburg, M. Krafczyk, et al., "Multiple-Relaxation-Time Lattice Boltzmann Models in Three Dimensions," *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A* **360**, 437–451 (2002).
13. C. Rettinger, *Fluid Flow Simulations Using the Lattice Boltzmann Method with Multiple Relaxation Times* (Friedrich-Alexander-Universität Erlangen–Nürnberg, Erlangen, 2013).
14. M. Razzaghian, M. Pourtousi, and A. N. Darus, "Simulation of Flow in Lid Driven Cavity by MRT and SRT," in *Proc. Int. Conf. on Mechanical and Robotics Engineering (ICMRE'2012), Phuket, Thailand, May 16–27, 2012* (Planetary Scientific Research Center, Johannesburg, 2012), pp. 94–97.
15. C. Zhen-Hua, S. Bao-Chang, and Z. Lin, "Simulating High Reynolds Number Flow in Two-Dimensional Lid-Driven Cavity by Multi-Relaxation-Time Lattice Boltzmann Method," *Chinese Phys.* **15** (8), 1855–1863 (2006).
16. S. Leclaire, N. Pellerin, M. Reggio, and J.-Y. Trépanier, "Enhanced Equilibrium Distribution Functions for Simulating Immiscible Multiphase Flows with Variable Density Ratios in a Class of Lattice Boltzmann Models," *Int. J. Multiphase Flow* **57**, 159–168 (2013).
17. J. Favier, A. Revell, and A. Pinelli, "A Lattice Boltzmann-Immersed Boundary Method to Simulate the Fluid Interaction with Moving and Slender Flexible Objects," *J. Comput. Phys.* **261**, 145–161 (2014).
18. D. Anderl, S. Bogner, C. Rauh, et al., "Free Surface Lattice Boltzmann with Enhanced Bubble Model," *Comput. Math. Appl.* **67** (2), 331–339 (2014).
19. T. G. Elizarova, *Quasi-Gasdynamical Equations and Numerical Methods for Viscous Flow Simulation* (Nauchny Mir, Moscow, 2007) [in Russian].
20. L. D. Landau and E. M. Lifshits, *Hydrodynamics* (Nauka, Moscow, 1980; Pergamon, Oxford, 1982).
21. I. A. Kvasnikov, *The Theory of Nonequilibrium Systems* (Mosk. Gos. Univ., Moscow, 2003) [in Russian].
22. D. A. Bikulov, D. S. Senin, D. S. Demin, et al., "Implementation of the Lattice Boltzmann Method on GPU Clusters," *Vychisl. Metody Programm.* **13**, 13–19 (2012).

23. G. V. Krivovichev, "On the Computation of Viscous Fluid Flows by the Lattice Boltzmann Method," *Kompyut. Issled. Model.* **5** (2), 165–178 (2013).
24. A. L. Kupershtokh, "Three-Dimensional Simulations of Two-Phase Liquid–Vapor Systems on GPU Using the Lattice Boltzmann Method," *Vychisl. Metody Programm.* **13**, 130–138 (2012).
25. G. V. Krivovichev, "Stability of Finite-Difference-Based Lattice Boltzmann Schemes," *Vychisl. Metody Programm.* **14**, 1–8 (2013).
26. G. V. Krivovichev, "Application of the Integro-Interpolation Method to the Construction of Single-Step Lattice Boltzmann Schemes," *Vychisl. Metody Programm.* **13**, 19–27 (2012).
27. A. L. Kupershtokh, "Three-Dimensional LBE Simulations on Hybrid GPU-Clusters for the Decay of a Binary Mixture of Liquid Dielectrics with a Solute Gas to a System of Gas–Vapor Channels," *Vychisl. Metody Programm.* **13**, 384–390 (2012).
28. K. Grazyna, "The Numerical Solution of the Transient Heat Conduction Problem Using the Lattice Boltzmann Method," *Sci. Res. Inst. Math. Comput. Sci.*, No. 11, 23–30 (2006).
29. J. Latt, "Choice of Units in Lattice Boltzmann Simulations," <http://wiki.palabos.org>. Cited September 30, 2014.
30. D. A. Wolf-Gladrow, *Lattice-Gas Cellular Automata and Lattice Boltzmann Models: An Introduction* (Springer, Berlin, 2000).
31. K. Mattila, *Implementation Techniques for the Lattice Boltzmann Method* (Univ. of Jyväskylä, Jyväskylä, 2010).
32. M. C. Sukop and D. T. Thorne, *Lattice Boltzmann Modeling: An Introduction for Geoscientists and Engineers* (Springer, New York, 2006).
33. Q. Zou and X. He, "On Pressure and Velocity Boundary Conditions for the Lattice Boltzmann BGK Model," *Phys. Fluids* **9** (6), 1591–1599 (1997).
34. A. Narváez and J. Harting, "Evaluation of Pressure Boundary Conditions for Permeability Calculations Using the Lattice-Boltzmann Method," *Adv. Appl. Math. Mech.* **2** (5), 685–700 (2010).
35. S. Chen, D. Martinez, and R. Mei, "On Boundary Conditions in Lattice Boltzmann Methods," *Phys. Fluids* **8** (9), 2527–2536 (1996).
36. D. Raabe, "Overview of the Lattice Boltzmann Method for Nano- and Microscale Fluid Dynamics in Materials Science and Engineering," *Modelling Simul. Mater. Sci. Eng.* **12** (6), R13–R46 (2004).
37. J. Boyd, J. Buick, and S. Green, "A Second-Order Accurate Lattice Boltzmann Non-Newtonian Flow Model," *J. Phys. A: Math. Gen.* **39** (46), 14241–14247 (2006).