УДК 512.531; 515.124; 004.2

ДИАГОНАЛЬНЫЕ ПОСТРОЕНИЯ В N-КУБЕ

Г. Г. Рябов[1], **В. А. Серов**[1]

Рассматривается расширение конструктивного мира кубических структур, построенного на базе биективного отображения k-мерных граней n-куба в слова над конечным алфавитом и, по существу, реализующего символьные вычисления. Такое расширение направлено на представления диагональных построений в n-кубе и операций над ними.

Ключевые слова: биективное отображение, конечный алфавит, кубанты, диагональные построения, поразрядные (посимвольные) операции, полуцелые точки.

1. Введение. Перефразируя известное высказывание, можно сказать, что n-куб как объект в математике так же неисчерпаем, как и атом в физике. Со стороны топологии n-куб выступает как основной элемент евклидова кубического пространства $\mathbb{R}_c^n$ (многомерной решетки); отсюда исследования многообразий в решетках в середине 90-х годов [3]. С другой стороны, это один из базовых объектов математической логики, комбинаторики и теории информации.

Одной из первых работ, сочетающих сразу несколько дисциплин в этом направлении, была работа Д. Роты и Н. Метрополиса, в которой рассматривалась "кубическая логика" с элементами недетерминизма [1]. К этим работам примыкают основополагающие труды Р. Стэнли по нумеративной комбинаторике [5]. В последнее время дальнейшее развитие рассматриваемая тематика получила в работах А. Аврона, связанных с изучением многозначной и недетерминистской логики [2]. Симптоматично, что название одной из последних работ по этой тематике (автор Д. Мундичи [4]) можно перевести как "Логика на гранях n-куба". В работах [9–11] предложено построение конструктивного мира кубических структур на базе его биективного представления в виде слов над конечным алфавитом. Основное внимание было уделено поразрядным (посимвольным) операциям, которым присуще алгоритмическое свойство *параллелизма* при вычислениях топологических и метрических характеристик комплексов и многообразий в многомерных решетках.

В [11] рассматривались вопросы канонической триангуляции в n-кубе, связанные с проведением ребер (диагоналей) в симплициальных построениях, однако биективного представления каждой конкретной диагонали в виде слова над конечным алфавитом не приведено. Ниже будет уделено внимание именно этому вопросу, но в более широком понимании диагональных построений в n-кубе. Основной подход можно характеризовать как наиболее полное использование задела по кубантам [9, 10] и по операциям над кубантами в сочетании с их естественным расширением и обобщением. В этой связи ниже рассмотрим основные понятия, определения и операции алгебры кубантов для n-куба.

2. Кратко об алгебре кубантов. В [9] рассматривается биективное кодирование для конструктивного мира [6] кубических структур в стандартной кубической решетке $\mathbb{R}_c^n$ на репере $B=\{0,\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\dots,\boldsymbol{e}_n\}$, заданном в $\mathbb{R}^n$ с вершинами в целых точках $\mathbb{Z}^n$. Решетка состоит из n-кубов, примыкающих друг к другу $(n-1)$-мерными гипергранями [3]. Такое кодирование каждой k-мерной грани (k-грани в n-кубе) ставит во взаимно-однозначное соответствие n-разрядное троичное слово $D=<d_1,d_2,\dots,d_n>$, где d_i — из алфавита $A=\{0,1,2\}$. Поскольку каждую k-грань можно представить как декартово произведение (П) единичных отрезков $\boldsymbol{I}(\boldsymbol{e}_i)$, каждый из которых привязан к $\boldsymbol{e}_i\in B_1\subset B$, и трансляции (Т) вдоль остальных векторов $\boldsymbol{e}_j\in B_2\subset B(B_2=B\setminus B_1)$, то свойство биективности для грани $f_{nk}(B_1,B_2)$ можно записать в форме

$$f_{nk}(B_1,B_2)=\prod_k \boldsymbol{I}(\boldsymbol{e}_i)+\underset{n-k}{\mathrm{T}}(\boldsymbol{e}_j)\overset{[1:1]}{\longleftrightarrow}<d_1,\dots,d_n>,$$

где $d_i=2$ для $\boldsymbol{e}_i\in B_1$ и $d_j=0,1$ для $\boldsymbol{e}_j\in B_2$, причем $d_j=0$, когда нет трансляции по $\boldsymbol{e}_j$, и $d_j=1$ в противоположном случае. При таком представлении множество всех n-разрядных троичных слов $A_n^*=\bigl\{<d_1,\dots,d_n>\bigr\}$, $d_i\in A=\{0,1,2\}$, можно считать множеством всех *генетических кодов* для всех k-граней n-куба над действиями декартова произведения (П) и трансляции (Т). Для краткости такие троичные

---

[1] Научно-исследовательский вычислительный центр, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Ленинские горы, 119991, Москва; Г.Г. Рябов, зав. лабораторией, e-mail: gen-ryabov@yandex.ru; В. А. Серов, науч. сотр., e-mail: v_serov_@mail.ru

слова названы *кубантами.* На множестве кубантов вместе с пополнением алфавита символом $\emptyset$ пустого множества до $A' = \{\emptyset, 0, 1, 2\}$, т.е. на множестве A'^*_n (для всех n-разрядных четверичных кодов), введена поразрядная операция умножения ($\times$), которая задается следующими правилами:

$$\begin{gathered}0 \times 0 = 0; \quad 0 \times 1 = 1 \times 0 = \emptyset; \quad 0 \times 2 = 2 \times 0 = 0; \quad 1 \times 1 = 1, \\ 1 \times 2 = 2 \times 1 = 1; \quad 2 \times 2 = 2; \quad \emptyset \times 0 = \emptyset; \quad \emptyset \times 1 = \emptyset; \quad \emptyset \times 2 = \emptyset.\end{gathered} \tag{1}$$

По существу, это — теоретико-множественное пересечение для трех множеств: 0;1 — точки-концы единичного отрезка, 2 — множество всех точек $\boldsymbol{I}$. С введением этой операции множество A'^*_n становится моноидом с единицей — кубантом $< 22\dots2 >$ (n-грань в n-кубе, т.е. сам n-куб). Приведем также операцию поразрядного сложения ($+$) для кубантов, которая задается следующими правилами:

$$\begin{gathered}0 + 0 = 0; \quad 0 + 1 = 1 + 0 = 2; \quad 0 + 2 = 2 + 0 = 2, \\ 1 + 1 = 1; \quad 1 + 2 = 2 + 1 = 2; \quad 2 + 2 = 2.\end{gathered} \tag{2}$$

По своей сути, эта операция для двух кубантов (граней n-куба) есть вычисление кубанта, который соответствует грани n-куба, являющейся выпуклой оболочкой этих двух граней, так что можно записать $D_1 + D_2 = \mathrm{conv}(D_1; D_2)$.

Приведем краткий список операций над кубантами:

1) $\#(x)D$ — подсчет числа символов $x \in A$ в кубанте D; результат — положительное целое или нуль;

2) $\neg D = D_1$ — замена в кубанте D всех “0” на “1” и “1” на “0”; результат — кубант, соответствующий антиподальной грани;

3) $D_1 \times D_2$ — поразрядная операция умножения; результат — кубант D_3, соответствующий общей грани (если D_1 и D_2 имеют непустое пересечение), или $\#(\emptyset)D_3 = L_{\min}(D_1; D_2)$ — длина минимального пути по ребрам между соответствующими гранями (положительное целое или нуль);

4) $D_1 + D_2$ — операция поразрядного сложения; результат — кубант D_3, $D_3 = \mathrm{conv}(D_1; D_2)$ в соответствии с (2);

5) $\lambda(D_1/D_2)$; результат — кубант D_3 со свойствами $D_3 \in D_1$ и $\max\bigl(L_{\min}(D_2; D_3)\bigr)$; операция заключается в замене в D_1 символов “2” на “‘0” в тех d_{1i} разрядах, для которых $d_{2i} = 1$ и, наоборот, “2” на “1”, когда $d_{2i} = 0$;

6) $\rho_{\mathrm{HH}}(D_1, D_2) = \max\Bigl\{\#(\emptyset)\bigl(\lambda(D_1/D_2) \times D_2\bigr); \#(\emptyset)\bigl(\lambda(D_2/D_1) \times D_1\bigr)\Bigr\}$ — хаусдорф-хеммингово расстояние между гранями с кубантами D_1 и D_2; положительное целое или нуль;

7) ∂D — граница D; результат — множество кубантов, соответствующих гиперграням.

В [10] показано, что все k-грани n-куба образуют конечное метрическое пространство с метрикой Хаусдорфа–Хемминга, и приведен алгоритм вычисления этой метрики с помощью поразрядной обработки кубантов. При рассмотрении n-куба как конечного метрического пространства тот же алгоритм вычисляет метрику Громова–Хаусдорфа между кубами (как метрическими пространствами) разной размерности. Простота этого алгоритма позволяет рассматривать его также как операцию над кубантами $\rho_{\mathrm{HH}}(D_1, D_2)$.

Нетрудно видеть, что отсутствие биективного представления диагоналей резко сужает рамки рассмотрения важных построений в кубических структурах. Так, даже для трехмерного случая, следуя (2), при $D_1 = 000$, $D_2 = 111$ имеем $\mathrm{conv}(D_1; D_2) = 222$, т.е. сам 3-куб, а не диагональ в 3-кубе. При $D_1 = 000$, $D_2 = 110$, $D_3 = 011$, $D_4 = 101$ имеем $\mathrm{conv}(D_1; D_2; D_3; D_4) = 222$, т.е. целиком 3-куб, а не тетраэдр. Это один из элементов мотивации рассмотрения диагоналей в кубических структурах. Другим элементом такой мотивации служит расширение понятия динамической триангуляции. Так, при изучении динамической триангуляции в 3-кубе в [8] по существу рассматривались изменения положения диагоналей (так называемые флипы [7]) в 2-гранях. Из-за отсутствия индивидуальных действий с диагоналями в 3-кубе *внутренняя динамика* триангуляции 3-куба осталась вне включения в состояния марковской цепи.

Внутренняя динамика обусловлена изменением положения диагоналей только в самом 3-кубе без изменения положений диагоналей в 2-гранях. Так, в типах 3 и 5 по классификации [8] (рис. 1) показаны возможные флипы диагоналей 3-куба, меняющие его триангуляцию без изменения положения диагоналей в 2-гранях. Для типа 3 — это три состояния, а для типа 5 — это пять состояний (четыре разных положения диагонали в 3-кубе плюс вообще ее отсутствие).

Для типа 3 при диагонали $(000; 111)$ триангуляция состоит из следующих шести симплексов, каждый из которых задается четверкой вершин:

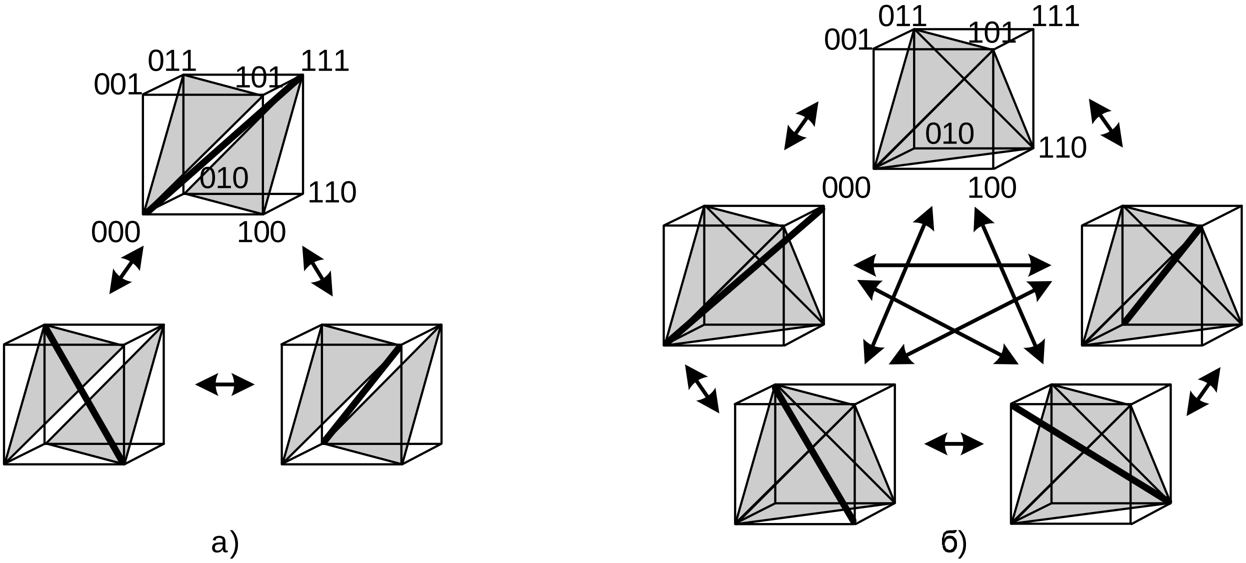
$$\begin{gathered}(000, 001, 011, 101); (000, 011, 101, 111); (010, 100, 111, 110); \\ (010, 100, 111, 000); (000, 101, 111, 100); (000, 010, 011, 111).\end{gathered}$$

Для типа 5 при диагонали $(000; 111)$ триангуляция состоит из шести симплексов:

$$(000, 001, 011, 101);\ (000, 100, 110, 101);\ (000, 010, 110, 011);$$
$$(000, 100, 110, 111);\ (000, 010, 110, 111);\ (000, 011, 101, 111).$$

Для типа 5 без диагонали триангуляция состоит из пяти симплексов:

$$(000, 001, 011, 101);\ (000, 100, 110, 101);\ (000, 010, 110, 011);$$
$$(010, 101, 110, 111);\ (000, 010, 101, 110).$$



а)

б)

Рис. 1. Тип 3 триангуляции и три возможных положения диагонали в 3-кубе (а); тип 5 триангуляции, четыре возможных положения диагонали в 3-кубе и триангуляция без диагонали (б). Стрелками показаны возможные переходы между состояниями в результате флипа

3. К понятию диагональных построений в n-кубе. Отрезок, соединяющий две вершины n-куба, хеммингово расстояние между которыми больше единицы, будем называть *диагональю* в n-кубе. Будем считать, что каждая диагональ (как пара вершин) принадлежит только той k-грани, которой принадлежит эта пара вершин и при этом k минимально. Однозначность такой k-грани следует из однозначности вычисления кубанта выпуклой оболочки для двух вершин n-куба. Так, например, для вершин в 6-кубе 101110 и 110100 такой кубант равен 122120 (замена несовпадающих разрядов на 2), т.е. в данном случае это соответствующая трехмерная грань. Каждая k-грань при вышеприведенном определении содержит 2^{k-1} диагоналей, пересекающихся в одной точке, которая для рассматриваемого примера имеет координаты 1, 1/2, 1/2, 1, 1/2, 0.

Отметим некоторые элементарные свойства диагоналей.

1. Все диагонали k-грани пересекаются в одной точке, для вычисления координат которых в соответствующем кубанте все символы “2” следует заменить на “1/2”.

2. Диагонали из разных k-граней могут либо не пересекаться вообще, либо пересекаться только в вершинах n-куба, т.е. не иметь координат 1/2.

Следовательно, целесообразно ввести понятие полуцелых точек в n-кубе, являющихся центрами k-граней и, включив символ “h” вместо 1/2 как букву в алфавит для кубантов, рассматривать его как величину *трансляции* для соответствующего номера базисного вектора, совпадающего с номером разряда слова-кубанта. Введение полуцелых точек с возможностью использовать основные операции над кубантами потребует еще одного расширения алфавита — введение буквы, соответствующей половине пробела по ребру, аналогично символу пустого множества $\emptyset$ для единичного пробела по ребру. Примем его обозначение как Θ. Таблица 1 представляет собой таблицу поразрядного умножения при расширенном алфавите $A = \{\emptyset, \Theta, 0, h, 1, 2\}$.

Теперь рассмотрим расширенное понятие *диагонального построения*. Оно подразумевает такие построения в n-кубе, когда наряду с единичными ребрами в качестве ребер используются и диагонали.

Развивая идею диагональных построений, исходя из того же подхода к представлению их в виде слов над конечным алфавитом, как и для k-граней, и используя операции над кубантами, возможно применить два подхода:

1) использовать представление k-граней, отобразив на него некоторое множество диагональных построений;

2) индивидуально представить диагональ и диагональное построение как слово над конечным расширенным алфавитом и экстраполировать по возможности подходы, принятые при операциях над кубантами.

Первый подход будет проиллюстрирован на примере для случая $n = 3$. Рассмотрим следующее биективное отображение ряда диагональных построений в расширение представления кубантов: каждая вершина 3-куба отображается в симплекс при этой вершине, каждое ребро — в призму с этим ребром и каждая 2-грань — в куб, как это показано на рис. 2. Тогда симплексу, призме и кубу соответствуют те же кубанты (слова), возможно, с добавкой символа "///" (число косых черточек "/" соответствует размерности объектов). Таким образом, в пространстве $\mathbb{R}^3_c$, приписывая некоторым 3-кубам одно из 27 слов (кубантов), можно формировать такие joint-комплексы, границы которых являются 2-многообразиями. Простейшие примеры такого подхода изображены на рис. 2. На поверхности граней приведены представления в виде слов, соответствующих трехмерным объектам, помещенным в данный куб. Теперь перейдем к более общему случаю.

Таблица 1

	$\emptyset$	Θ	0	h	1	2
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
Θ	$\emptyset$	Θ	Θ	Θ	Θ	Θ
0	$\emptyset$	Θ	0	Θ	$\emptyset$	0
h	$\emptyset$	Θ	Θ	h	Θ	h
1	$\emptyset$	Θ	$\emptyset$	Θ	1	1
2	$\emptyset$	Θ	0	h	1	2

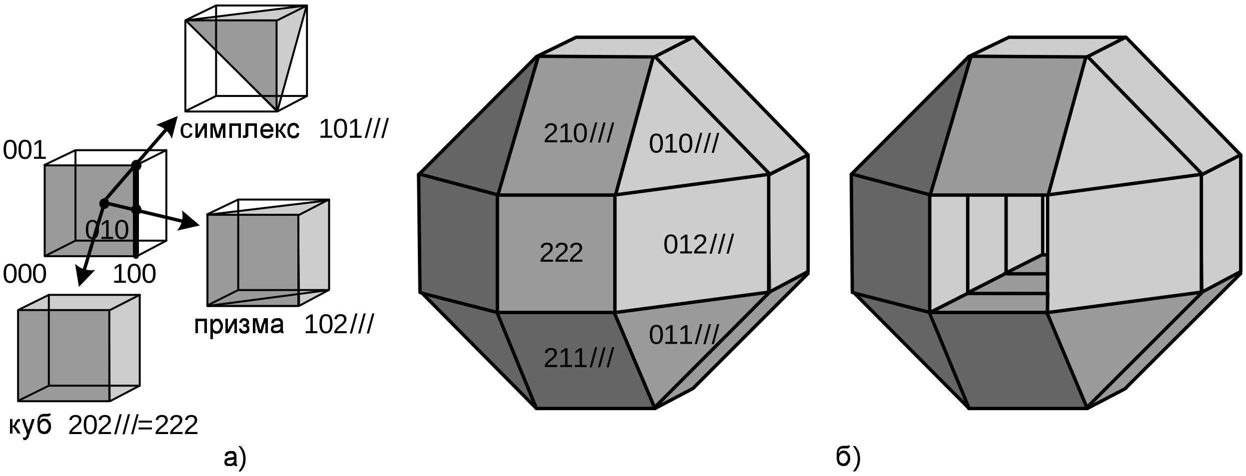


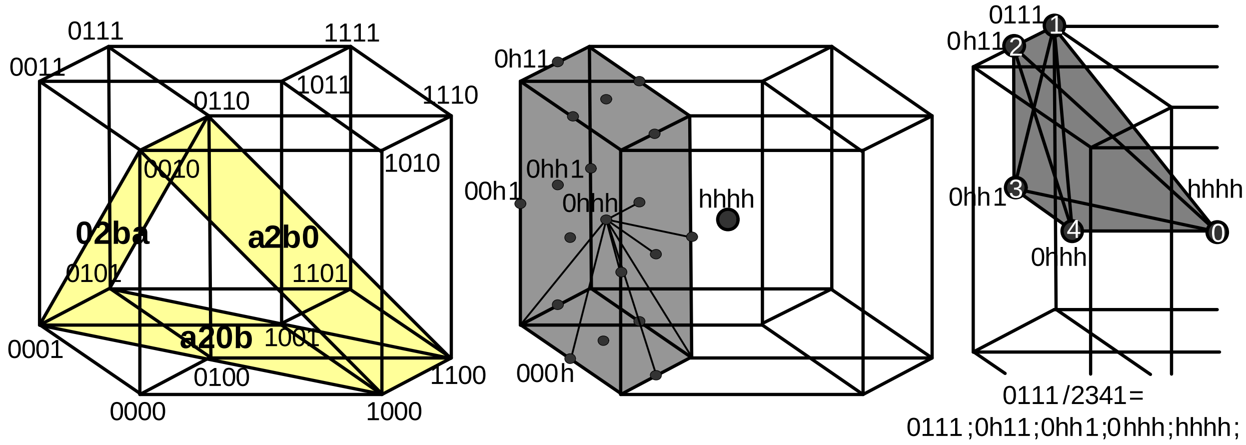
Рис. 2. Отображение вершины в симплекс, ребра в призму, 2-грани в 3-куб (а); комплекс, граница которого 2-сфера; комплекс, граница которого тор (в комплексе удалены три куба) (б)

4. Индивидуальные диагональные представления. Итак, диагональ в n-кубе задается произвольной парой вершин. Заметим, что в приведенном выше примере пару вершин 101110 и 110100 можно заменить одним словом $1ab1b0$ (или $1ba1a0$), где "a" соответствует "0" в слове, относящемся к первой вершине, и "1" — в слове, относящемся ко второй вершине, а "b" — наоборот: "1" и "0". Таким образом, при алфавите $A_1 = \{0; 1; a; b\}$ все слова $A^*_{1\,n}$ биективно представляют все диагонали в k-гранях (удвоенное число диагоналей, поскольку $xyaxb\ldots = xybxa\ldots$, где $x, y \in 0, 1)$. Отметим, что число символов "a","b" в слове для диагонали должно быть не меньше двух, поскольку, например, слово $01a$ соответствует паре вершин 010 и 011, соединенных единичным ребром, которому уже соответствует кубант 012. Из $A^*_{1\,n}$ следует, что число всех возможных диагоналей в n-кубе (наполнение) составляет $F_d = 1/2\big(4^n - (n+1)2^n\big)$.

Рассмотрим объединенный алфавит $A_2 = \{0; 1; 2; a; b\}$ и все слова над ним: $A^*_{2\,n}$. Тогда естественно представить слово, в котором есть k символов "2" и "a", "b", как пару k-граней, вершины которых соединены параллельными ребрами-диагоналями, т.е. образуют диагональную конструкцию с k-гранью в основании. В дальнейшем для наглядности будет использована в основном графика для $n = 4$. Так, на рис. 3а показаны примеры диагональных построений как графическая интерпретация слов "$02ba$", "$a20b$", "$a2b0$".

Выше было показано, что появление полуцелых точек является естественным при рассмотрении диагональных построений. Сделаем еще один шаг в расширении постановки вопроса о диагональных построениях — введем в рассмотрение так называемые *полудиагонали.* Прежде всего, отнесем к ним для каждой k-грани отрезки, соединяющие центр грани со всеми вершинами данной грани. Таких полудиагоналей в k-грани будет 2^k (по числу вершин в грани); кроме того, появятся две полудиагонали $(0\,,\,1/2)$ и $(1/2\,,1)$ у единичного ребра, что снимет неудобные ограничения на представления в виде слов. В дальнейшем изложении заменим символ “1/2” на букву “h” в алфавите (по ассоциации с “half”).

Для таких полудиагоналей, каждая из которых задается парой целых и полуцелых точек, по аналогии с диагоналями введем дополнительные буквы алфавита c, d, e, f. Значения всех “диагональных” букв показаны в табл. 2. Примеры “диагональных” слов графически представлены на рис. 3.



а) б) в)

Рис. 3. Диагональные построения в 4-кубе, биективные словам $02ba$; $a20b$; $a2b0$ (а); полуцелые точки в гиперграни (кубант 0222) 4-куба (б); симплекс с нумератором 0111/2341 (в)

Таким образом, общий конечный алфавит имеет вид $A = \{\emptyset; \Theta; 0; h; 1; 2; a; b; c; d; e; f\}$.

С применением этого алфавита ниже будет рассмотрено симплициальное разбиение n-куба с использованием полудиагоналей и полуцелых точек. Такое разбиение строится по следующему принципу. Центр n-куба, имеющий координаты $(h, h, \ldots, h)$, соединяется полудиагональю с одной из вершин n-куба (целой точкой), для которой рассматриваются все перестановки n чисел. Каждой перестановке ставится в соответствие последовательное перемещение от одной полуцелой точки до другой с окончанием этого перемещения в точке $(h, h, \ldots, h)$. Последовательность таких перемещений строго задается следующим правилом.

Перемещение на k-м шаге происходит из полуцелой точки с k буквами “h” в полуцелую точку с $k+1$ буквами “h” вдоль базисного вектора, номер которого совпадает с числом, стоящем на $k+1$-м месте в перестановке. Каждое перемещение строит ребро пути так, что результатом перемещений является замкнутый путь, и для построения реберного остова симплекса достаточно соединить диагональными ребрами вершины пути или, что то же самое, биективно отобразить в слова над выбранным алфавитом. Нетрудно видеть, что общее число симплексов в таком разбиении равно $2^n n!$

Более детально задание и построение конкретно заданного симплекса будет показано на примере 4-куба (рис. 3в). Пусть симплекс задан как вершина 4-куба 0111 и подстановка 2341 : $S = 0111/2341$. Тогда первое перемещение произойдет вдоль e_2 из 0111 в полуцелую точку $0h11$, затем из $0h11$ вдоль e_3 в точку $0hh1$, затем вдоль e_4 в точку $0hhh$ и, наконец, вдоль e_1 в точку $hhhh$. На множестве точек этой последовательности построим квадратную матрицу $M(S)$ (в данном случае 5×5, см. табл. 3). Каждый элемент этой матрицы — слово, представляющее конкретную полудиагональ в построенном симплексе для 4-куба. Заметим, что фактически эта матрица симметрическая, поскольку $0e11 = 0f11$, $0he1 = 0hf1$ и т.д. (диагональ не ориентирована).

Схематически последовательность рассмотренных вычислений можно представить так:

нумератор симплекса = вершина/подстановка → множество вершин пути согласно подстановке →
→ построение матрицы полудиагоналей симплекса на множестве вершин пути.

Заметим, что вершины для каждого 3-симплекса границы данного 4-симплекса суть все четверки вершин из множества вершин пути. Так, можно записать:

$$\partial S = \big\{(0111; 0h11; 0hh1; 0hhh); \ (0111; 0h11; 0hh1; hhhh); \ (0111; 0h11; 0hhh; hhhh);$$
$$(0111; 0hh1; 0hhh; hhhh); \ (0h11; 0hh1; 0hhh; hhhh)\big\},$$

что соответствует известному соотношению $\partial\Delta^n = (n+1)\Delta^{n-1}$. Границей комплекса всех $2^n n!$ таких n-симплексов является сфера S^{n-1}, при этом каждый n-симплекс “делегирует” в сферу один $(n-1)$-симплекс, тот, который не содержит вершины $h, h, \ldots, h$.

В [12] при построении квадрангуляции для кубической сферы S^3 с помощью кросс-кубантов показано, что такая сфера состоит из 64 псевдокубов размерности 3, т.е. при их триангуляции число 3-симплексов в S^3 будет равно $64 \times 6 = 384$. Для метода, приведенного выше, S^3 содержит $2^n n! = 16 \times 24 = 384$ 3-симплексов. В заключение отметим, что диагональные построения могут вместе с k-гранями рассматриваться как точки конечного НН-метрического пространства, но детальное рассмотрение этого вопроса вынесено за рамки этой статьи.

Таблица 2

i-я буква		
слова-диагонали	первой вершины	второй вершины
a	0	1
b	1	0
c	0	h
d	h	0
e	h	1
f	1	h

Таблица 3

$$M(S) = \begin{array}{c|ccccc|}
 & \text{0111} & \text{0h11} & \text{0hh1} & \text{0hhh} & \text{hhhh} \\
\text{0111} & & \text{0f11} & \text{0ff1} & \text{0fff} & \text{cfff} \\
\text{0h11} & \text{0e11} & & \text{0hf1} & \text{0hff} & \text{chff} \\
\text{0hh1} & \text{0ee1} & \text{0he1} & & \text{0hhf} & \text{chhf} \\
\text{0hhh} & \text{0eee} & \text{0hee} & \text{0hhe} & & \text{chhh} \\
\text{hhhh} & \text{deee} & \text{dhee} & \text{dhhe} & \text{dhhh} &
\end{array}$$

5. Символьные вычисления в перспективных архитектурах. Все расширяющийся круг объектов со сложной комбинаторной структурой ставит задачи создания математического обеспечения будущих компьютеров, способного воспринять многие достижения разных областей современной фундаментальной математики. При этом математическое обеспечение понимается здесь в широком смысле, охватывающем и создание проблемно-ориентированных языков, и методы самих вычислений (компьютерные арифметики) в вычислительных системах. Широта диапазона поисков перспективных подходов может быть проиллюстрирована на примере работ Я. Д. Сергеева “Новый подход к выполнению вычислений с бесконечными и инфинитезимальными числами” [13] и С. Ломонако “Символьная арифметика и целочисленная факторизация” [14]. Несмотря на значительное различие, в этих работах большое внимание уделяется *инфинитарным* конструкциям, с которыми предстоит оперировать компьютерам будущего.

Создание биективного (генетического) кода для представления многомерных структур с возможностями параллельной символьной обработки может оказаться важной составляющей такого математического обеспечения. Сама природа со структурами ДНК, являющимися “программой” управления сложнейшей системой и допускающими эффективные (с точки зрения посимвольной обработки) отображения на слова над конечным алфавитом, указывает на перспективность такого подхода. Однако процесс такого отображения для достижения эффективности может быть далеко не одноступенчатым, он может использовать символьные отображения и алгебру на них для более универсальных, но менее детализированных структур.

Собственно, методы, изложенные в настоящей статье, могут служить примером такого подхода. Алгебра кубантов как инструмент символьных вычислений для k-граней n-куба в $\mathbb{R}^n_c$ создается для диагональных построений. В идеологическом плане работы [1, 4] можно рассматривать как отражающие символьные *логические* надстройки над универсальной структурой n-куба. В этой связи интересно обратить внимание на позицию крупнейшего современного геометра М. Л. Громова в отношении прогноза развития компьютерных средств. В своем обширном интервью после вручения ему Абелевской премии [15] он высказал твердое убеждение, что будущие компьютеры будут сильно отличаться от современных и необходимо самое активное участие математиков в создании языков и новых методов вычислений для таких компьютеров. Крайне интересен взгляд мэтра на представление общего дерева математических дисциплин (названного гильбертовым) и возможной связи отдельных его ветвей отнюдь не аксиоматическими скрепами, а некоторыми общими метрическими подходами. В этом отношении исследования архитектуры компьютера с ориентацией на многоступенчатый процесс наращивания символьных представлений, алгебраизации операций над ними, в том числе и метрико-топологических вычислений, находится в русле стремительного течения развития компьютерной математики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Rota G-C., Metropolis N.* Combinatorial structure of the faces of the n-cube // SIAM J. Appl. Math. 1978. **35**, N 4. 689–694.
2. *Avron A.* A logical framework for set theory. 2012 (available at arXiv: 1203.6157v1[cs.LO]).
3. *Долбилин Н.П., Штанько М.А., Штогрин М.И.* Кубические многообразия в решетках // Изв. РАН. Сер. матем. 1994. **58**, вып. 2. 93–107.
4. *Mundici D.* Logic on the n-cube. 2012 (available at arXiv:1207.5717v1[math LO]).
5. *Stanley R.P.* Enumerative combinatorics. Vol. 2. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999.
6. *Manin Yu.I.* Classical computing, quantum computing and Shor's factoring algorithm. 1999 (available at arXiv:quant-ph/9903008v1).
7. *Бухштабер В.М., Панов Т.Е.* Торические действия в топологии и комбинаторике. М.: МЦНМО, 2004.
8. *Рябов Г.Г.* Марковские процессы в динамике примитивных триангуляций в пространствах R^3 и R^4 // Вычислительные методы и программирование. 2009. **10**. 1–8.
9. *Рябов Г.Г.* О четверичном кодировании кубических структур // Вычислительные методы и программирование. 2009. **10**. 340–347.
10. *Рябов Г.Г.* Хаусдорфова метрика на гранях n-мерного куба // Фундаментальная и прикладная математика. 2010. **16**, № 1. 151–155.
11. *Рябов Г.Г., Серов В.А.* О метрико-топологических вычислениях в конструктивном мире кубических структур // Вычислительные методы и программирование. 2010. **11**. 326–335.
12. *Рябов Г.Г., Серов В.А.* Биективное кодирование в конструктивном мире R^n_c // Вычислительные методы и программирование. 2012. **13**. 465–470.
13. *Sergeyev Ya.D.* A new applied approach for executing computations with infinities and infinitesimal quantities // Informatica. 2008. **19**, N 4. 567–596.
14. *Lomonaco S.J.* Symbolic arithmetic and integer factorization. 2013 (available at arXiv:1304v1[math.NT]).
15. *Raussen M., Skau C.* Interview with Mikhail Gromov // Notices of the AMS. 2010. **57**, N 3. 391–403

Поступила в редакцию
25.09.2013