УДК 519.6

ОБ ОДНОЙ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЕ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ТИПА ДИНАМИКИ АТМОСФЕРЫ

М. Ю. Станиченко[1]

Рассмотрена разностная схема для решения системы уравнений типа динамики атмосферы. Для полученной разностной схемы, аппроксимирующей исходную задачу со вторым порядком по пространственным переменным и первым по времени, доказана сходимость к решению дифференциальной задачи. Установлен порядок сходимости схемы и предложен явный алгоритм для поиска решения разностной задачи.

Ключевые слова: уравнения динамики атмосферы, уравнения в частных производных, конечно-разностные схемы, сходимость.

1. Введение. Система уравнений динамики атмосферы, с полной записью которой можно ознакомиться в [4], близка по своей структуре к системе уравнений крупномасштабной динамики океана. Для последней в [1] предложена разностная схема, для которой установлена сходимость к решению дифференциальной задачи. Особенностью уравнений, описывающих динамику атмосферы, является наличие нестандартных граничных условий, что приводит к дополнительным трудностям в использовании разностных схем для поиска решения. Помимо непосредственного обоснования сходимости разностной схемы возникают сложности при ее программной реализации. Иными словами, построение алгоритма поиска решения разностной схемы является отдельной проблемой.

Задача, рассматриваемая в настоящей статье, является задачей того типа, для которого в [4] доказана единственность решения с учетом особенности граничного условия, упоминавшейся выше.

В области $Q_T \equiv \Omega \times [0,T]$, где $\Omega = [0,1]^3$, рассматривается система уравнений $u_t - \Delta u + \nabla' p = f$, $\operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0$, где $\boldsymbol{u}$ — вектор скорости $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3, t)$, зависящий от трех пространственных и одной временно́й переменных. Вектор u содержит две первые компоненты вектора скорости, т.е. $u = (u_1, u_2)$. Функция p — это давление, особенностью которой является то, что она зависит лишь от двух пространственных переменных, т.е. $p = p(x_1, x_2, t)$.

Эта система дополняется краевыми условиями

$$\nabla_z u\big|_{S_1} = 0, \quad u \cdot n\big|_S = 0, \quad \nabla_n u \times n\big|_S = 0, \quad u_3\big|_{x_3=0} = 0, \quad u_3 - p_t\big|_{x_3=1} = 0$$

и начальным условием $u(x_1, x_2, x_3, 0) = u_0$, где S_1 — объединение верхней и нижней граней куба ($x_3 = 0$, $x_3 = 1$) и S — боковая поверхность куба Ω.

Здесь мы рассматриваем разностную схему на сетках, эквивалентных сеткам работы [3], для которой доказана сходимость к решению дифференциальной задачи. Доказательство опирается на методы, предложенные в [1, 5]. Приводится также явное описание алгоритма, который может быть применен для поиска решения разностной задачи с учетом специфики граничных условий.

2. Сетка. Сеточные функции и операторы. Пусть в $\mathbb{R}^3$ имеется куб $[0,1]^3$. Разобъем этот куб на N частей вдоль каждой пространственной переменной, которые будем обозначать (x_1, x_2, x_3) или (x, y, z) соответственно. Функцию давления и скорости будем искать в тех же узлах, что описаны в [1]. Кроме того, там же можно найти определения операторов, используемых и в настоящей статье. Однако для полноты изложения отметим те моменты, которые являются основополагающими для наших рассуждений. Рассмотрим множество ячеек, получившихся в результате разбиения исходного куба на N^3 составляющих. Функцию давления будем искать в центрах соответствующих ячеек. Совокупность всех центров обозначим через $\mathcal{P}^h$. Тогда формально

$$\mathcal{P}^h = \left\{ x = \left(\left(i + \frac{1}{2}\right)h,\ \left(j + \frac{1}{2}\right)h,\ \left(k + \frac{1}{2}\right)h \right) \,\middle|\, 0 \leqslant i,\ j,\ k \leqslant N-1 \right\},$$

[1] Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, Ленинские горы, д. 1, 119899, Москва; аспирант, e-mail: mstanichenko@gmail.com

где $h = \dfrac{1}{N}$. Следовательно, функция давления принадлежит множеству функций $\mathcal{P}^h = \{p : \mathcal{P}^h \to \mathbb{R}\}$.

Отметим, что символом $\mathcal{P}^h$ мы обозначили как сетку, так и само пространство функций давления. Такой подход позволяет не вводить новых обозначений и будет уместен всюду, где не вызовет неоднозначной интерпретации.

Компоненту скорости под номером i, где $i = 1, 2, 3$, будем искать в центрах граней ячеек, перпендикулярных направлению x_i. Множество узлов, в которых будет рассчитываться u_i, обозначим через $\mathcal{U}_i^h$. Формально

$$\mathcal{U}_1^h = \left\{ x = \left(ih,\ \left(j+\frac{1}{2}\right)h,\ \left(k+\frac{1}{2}\right)h \right) \middle|\ 0 \leqslant i \leqslant N,\ 0 \leqslant j,k \leqslant N-1 \right\},$$
$$\mathcal{U}_2^h = \left\{ x = \left(\left(i+\frac{1}{2}\right)h,\ jh,\ \left(k+\frac{1}{2}\right)h \right) \middle|\ 0 \leqslant j \leqslant N,\ 0 \leqslant i,k \leqslant N-1 \right\},$$
$$\mathcal{U}_3^h = \left\{ x = \left(\left(i+\frac{1}{2}\right)h,\ \left(j+\frac{1}{2}\right)h,\ kh \right) \middle|\ 0 \leqslant k \leqslant N,\ 0 \leqslant i,j \leqslant N-1 \right\}.$$

Следовательно, компоненты вектора скорости принадлежат множеству функций $\mathcal{U}_1^h = \{u_1^h : \mathcal{U}_1^h \to \mathbb{R}\}$, $\mathcal{U}_2^h = \{u_2^h : \mathcal{U}_2^h \to \mathbb{R}\}$, $\mathcal{U}_3^h = \{u_3^h : \mathcal{U}_3^h \to \mathbb{R}\}$, а сам вектор скорости принадлежит множеству функций $\mathcal{U}^h = \{(u_1, u_2, u_3) :\ \mathcal{U}_1^h \times \mathcal{U}_2^h \times \mathcal{U}_3^h\}$. Вновь множество функций и сетки, на которых они определены, обозначены одной и той же буквой.

Всюду ниже будет использоваться норма $L_{2,h}$, индуцированная скалярным произведением: для произвольных функций ϕ и ξ, определенных на одной и той же d-мерной сетке Ω^h, имеем

$$(\phi, \xi) = (\phi, \xi)_{2,h} = h^d \sum_{x \in \Omega^h} \phi(x)\xi(x), \quad \|\xi\|^2 = \|\xi\|_{2,h}^2 = h^d \sum_{x \in \Omega^h} \xi^2(x).$$

Для дальнейших рассуждений нам понадобятся дискретные аналоги соответствующих дифференциальных операторов. Оператор градиента будем обозначать символом ∇, а соответствующие частные производные в направлении x_i будем обозначать ∇_i, где $i = 1, 2, 3$. Кроме того, дифференциальный оператор со штрихом обозначает оператор, действующий только в горизонтальном направлении. Например, $\nabla' p = (\nabla_1 p, \nabla_2 p)$, $\operatorname{div}' u = \nabla_1 u_1 + \nabla_2 u_2$.

Такое обозначение используется в [1, 5]. Дискретные определения операторов div, ∇ и Δ стандартны. Особенностью является лишь то, к какому узлу относится та или иная разделенная разность. Формально определим $\nabla_i : \mathcal{P}^h \to \mathcal{U}_i^h$, $\nabla : \mathcal{P}^h \to \mathcal{U}^h$.

Поясним, что имеется в виду. Функция давления определена в центрах соответствующих ячеек. Дискретный оператор ∇_i представляет собой разность функции давления, определенной в двух соседних ячейках в направлении x_i. Таким образом, дискретный оператор ∇_i функции p, определенной на $\mathcal{P}^h$, ставит в соответствие функцию, определенную на $\mathcal{U}_i^h$. Аналогичный принцип действует при определении дискретного аналога оператора div u: $\operatorname{div} : \mathcal{U}^h \to \mathcal{P}^h$. Иными словами, оператор div вектору скорости u ставит в соответствие величину div u, определенную в центре ячеек. Оператор Δ определен естественным образом для каждой компоненты вектора скорости: $\Delta : \mathcal{U}_i^h \to \mathcal{U}_i^h$. Здесь и всюду ниже символами ∇, Δ и div будут обозначены дискретные аналоги соответствующих непрерывных операторов. Поскольку в нашем контексте будет рассматриваться только дискретная задача, подобные обозначения должны трактоваться однозначно.

Для введенных сеточных операторов верны дискретные аналоги формулы интегрирования по частям, которыми мы будем активно пользоваться в будущем. А именно, для любых сеточных функций $p \in \mathcal{P}^h$ и $u \in \mathcal{U}^h$ справедливо соотношение

$$(p, \operatorname{div} u) + (\nabla p, u) = (p, u \cdot n)_{\partial \mathcal{P}^h}.$$

Из определения ∇ и Δ и предыдущего соотношения следует, что для произвольных $p, q \in \mathcal{P}^h$ выполнено соотношение

$$(\Delta p, q) + (\nabla p, \nabla q) = (q, \nabla p \cdot n)_{\partial \mathcal{P}^h}.$$

Аналогичные соотношения имеют место для векторов скорости, а именно, для произвольных функций $u,\ v \in \mathcal{U}^h$ справедливо равенство

$$(\Delta u, v) + (\nabla u, \nabla v) = (v, \nabla u \cdot n)_{\partial \mathcal{U}_1^h \times \partial \mathcal{U}_2^h \times \partial \mathcal{U}_3^h}.$$

Дискретная задача рассматривается на временно́м промежутке $[0, K]$, который мы равномерно разбили на T частей с шагом $\tau = K/T$. Значение функции на временно́м слое с номером t будем обозначать с использованием верхнего индекса (например, u^t — значение скорости на t-временно́м слое). Как обычно, $u^t_\tau = \dfrac{u^{t+1} - u^t}{\tau}$.

Символом $\boldsymbol{u}^t$ обозначен трехмерный вектор скорости $\boldsymbol{u}^t = \bigl(u^t_1, u^t_2, u^t_3\bigr)$.

Символом u^t обозначен вектор, состоящий из первых двух компонент вектора скорости: $u^t = \bigl(u^t_1, u^t_2\bigr)$.

3. Уравнения разностной схемы. В единичном кубе $[0,1]^3$ рассматривается неявная разностная схема

$$u^t_\tau - \Delta u^{t+1} + \nabla' p^{t+1} = f^{t+1}, \tag{1}$$

$$\operatorname{div}\, \boldsymbol{u}^{t+1} = 0, \tag{2}$$

причем функция давления p зависит только от двух пространственных переменных: $p = p(x_1, x_2, t)$.

Схема рассматривается при $t = 0, 1, \ldots, T-1$ в совокупности с краевыми

$$\nabla_3 u^{t+1}_i\big|_{x_3=0,1} = 0, \quad i = 1, 2, \tag{3}$$

$$\nabla_i u^{t+1}_{3-i}\big|_{x_i=0,1} = 0, \quad u^{t+1}_i\big|_{x_i=0,1} = 0, \quad i = 1, 2, \tag{4}$$

$$u^{t+1}_3\big|_{x_3=0} = 0, \quad u^{t+1}_3 - p^t_\tau\big|_{x_3=1} = 0 \tag{5}$$

и начальными условиями

$$u(x_1, x_2, x_3, 0) = u^0. \tag{6}$$

4. Единственность решения. Аппроксимация.

4.1. Априорная оценка. Умножим обе части уравнения (1) скалярно на $2\tau u^{t+1}$. Получим

$$\bigl(u^t_\tau, 2\tau u^{t+1}\bigr) - \bigl(\Delta u^{t+1}, 2\tau u^{t+1}\bigr) + \bigl(\nabla' p^{t+1}, 2\tau u^{t+1}\bigr) = 2\tau\bigl(f, u^{t+1}\bigr). \tag{7}$$

Преобразуем левую и правую части получившегося равенства. Непосредственной проверкой убеждаемся в истинности соотношения $\bigl(u^t_\tau, 2\tau u^{t+1}\bigr) = \bigl\|u^{t+1}\bigr\|^2 - \bigl\|u^t\bigr\|^2 + \tau^2\bigl\|u^t_\tau\bigr\|^2$.

Второе слагаемое левой части с помощью дискретного аналога формулы интегрирования по частям может быть преобразовано к виду $-\bigl(\Delta u^{t+1}, 2\tau u^{t+1}\bigr) = 2\tau\bigl\|u^{t+1}_x\bigr\|^2$.

Наконец, $\bigl(\nabla' p^{t+1}, 2\tau u^{t+1}\bigr) = -2\tau\bigl(p^{t+1}, \operatorname{div}' u^{t+1}\bigr) = 2\tau\bigl(p^{t+1}, \nabla_3 u^{t+1}_3\bigr)$.

Последний переход использует уравнение неразрывности (2). Вновь воспользовавшись дискретным аналогом формулы интегрирования по частям и краевыми условиями задачи, получим

$$2\tau\bigl(p^{t+1}, \nabla_3 u^{t+1}_3\bigr) = 2\tau\bigl(p^{t+1}, u^{t+1}_3\bigr)\big|_{x_3=1} = 2\tau\bigl(p^{t+1}, p^t_\tau\bigr) = \bigl(p^t_\tau, 2\tau p^{t+1}\bigr).$$

Используя ту же технику, что использовалась для преобразования первого слагаемого, имеем

$$\bigl(p^t_\tau, 2\tau p^{t+1}\bigr) = \bigl\|p^{t+1}\bigr\|^2 - \bigl\|p^t\bigr\|^2 + \tau^2\bigl\|p^t_\tau\bigr\|^2.$$

Таким образом, соотношение (7) может быть переписано в виде

$$\bigl\|u^{t+1}\bigr\|^2 - \bigl\|u^t\bigr\|^2 + \tau^2\bigl\|u^t_\tau\bigr\|^2 + 2\tau\bigl\|u^{t+1}_x\bigr\|^2 + \bigl\|p^{t+1}\bigr\|^2 - \bigl\|p^t\bigr\|^2 + \tau^2\bigl\|p^t_\tau\bigr\|^2 = 2\tau\bigl(f^{t+1}, u^{t+1}\bigr).$$

Для правой части верна очевидная цепочка неравенств

$$2\tau\bigl(f^{t+1}, u^{t+1}\bigr) \leqslant 2\tau\bigl\|f^{t+1}\bigr\|\,\bigl\|u^{t+1}\bigr\| \leqslant 2\tau K\bigl\|f^{t+1}\bigr\|^2 + \frac{\tau}{2K}\,\bigl\|u^{t+1}\bigr\|^2,$$

$$\bigl\|u^{t+1}\bigr\|^2 - \bigl\|u^t\bigr\|^2 + \tau^2\bigl\|u^t_\tau\bigr\|^2 + 2\tau\bigl\|u^{t+1}_x\bigr\|^2 + \bigl\|p^{t+1}\bigr\|^2 - \bigl\|p^t\bigr\|^2 + \tau^2\bigl\|p^t_\tau\bigr\|^2 \leqslant 2\tau K\bigl\|f^{t+1}\bigr\|^2 + \frac{\tau}{2K}\,\bigl\|u^{t+1}\bigr\|^2.$$

Просуммируем полученное выражение для $t = 0, 1, \ldots, m-1$, где $m \leqslant T$:

$$\bigl\|u^m\bigr\|^2 - \bigl\|u^0\bigr\|^2 + \bigl\|p^m\bigr\|^2 - \bigl\|p^0\bigr\|^2 + \tau^2\sum_{i=0}^{m-1}\Bigl(\bigl\|u^i_t\bigr\|^2 + \bigl\|p^i_t\bigr\|^2\Bigr) + 2\tau\sum_{i=1}^{m}\bigl\|u^i_x\bigr\|^2 \leqslant$$

$$\leqslant 2\tau K\sum_{i=1}^{m}\bigl\|f^i\bigr\|^2 + \frac{\tau}{2K}\sum_{i=1}^{m}\bigl\|u^i\bigr\|^2 \leqslant 2K^2\max_{0\leqslant i\leqslant T}\bigl\|f^i\bigr\|^2 + \frac{1}{2}\max_{0\leqslant i\leqslant T}\bigl\|u^i\bigr\|^2.$$

Отсюда для любого временнóго слоя m выполнено

$$\left\|u^m\right\|^2+\left\|p^m\right\|^2 \leqslant \left\|u^0\right\|^2+\left\|p^0\right\|^2+2K^2\max_{0\leqslant i\leqslant T}\left\|f^i\right\|^2+\frac{1}{2}\max_{0\leqslant i\leqslant T}\left\|u^i\right\|^2.$$

Заметим, что правая часть не зависит от m, поэтому беря максимум по всем временны́м слоям, получим

$$\max_{0\leqslant i\leqslant T}\Big(\left\|u^i\right\|^2+\left\|p^i\right\|^2\Big) \leqslant \left\|u^0\right\|^2+\left\|p^0\right\|^2+2K^2\max_{0\leqslant i\leqslant T}\left\|f^i\right\|^2+\frac{1}{2}\max_{0\leqslant i\leqslant T}\left\|u^i\right\|^2.$$

Отсюда следует оценка

$$\max_{0\leqslant i\leqslant T}\Big(\left\|u^i\right\|^2+\left\|p^i\right\|^2\Big) \leqslant 2\Big(\left\|u^0\right\|^2+\left\|p^0\right\|^2\Big)+4K^2\max_{0\leqslant i\leqslant T}\left\|f^i\right\|^2. \tag{8}$$

4.2. Единственность решения дискретной задачи. Из априорной оценки (8) следует, что решение дискретной задачи единственно. В самом деле, если предположить, что дискретная задача (1), (2), дополненная краевыми условиями (3)–(5) и начальным условием (6), имеет два различных решения $(\boldsymbol{u},p)$ и $(\boldsymbol{u}',p')$, то их разность в силу линейности является решением однородной задачи с нулевыми начальными условиями. Следовательно, $(\delta u,\delta p)$ удовлетворяет оценке (8) с нулевой правой частью. Такое, очевидно, возможно только тогда, когда $\delta u=0$ и $\delta p=0$, или $u\equiv u'$ и $p\equiv p'$. Вертикальная компонента скорости также равна нулю, так как уравнение неразрывности вырождается в уравнение $\nabla_3 u_3=0$, а на нижнем слое $u_3=0$. Следовательно, везде в кубе выполнено равенство $u_3=0$.

4.3. Аппроксимация. В силу аппроксимационных свойств операторов div, ∇ и Δ задача имеет второй порядок аппроксимации по пространственным переменным и первый порядок по времени.

5. Сходимость. Пусть $(\mathfrak{U},\mathfrak{P})$ — проекция решения задачи в непрерывном случае на дискретную сетку. Рассмотрим ошибку $(v,q)=(\mathfrak{U}-u,\mathfrak{P}-p)$, где, как и прежде, (u,p) — решение дискретной задачи. Ошибка, очевидно, удовлетворяет системе уравнений

$$v_\tau^t-\Delta v^{t+1}+\nabla' q^{t+1}=O\big(h^2+\tau\big),\quad \operatorname{div}\boldsymbol{v}^{t+1}=O\big(h^2\big) \tag{9}$$

в совокупности с краевыми условиями

$$\nabla_3 v_i^{t+1}\big|_{x_3=0,1}=O\big(h^2\big),\quad i=1,2, \tag{10}$$

$$\nabla_i v_{3-i}^{t+1}\big|_{x_i=0,1}=O\big(h^2\big),\quad v_i^{t+1}\big|_{x_i=0,1}=0,\quad i=1,2, \tag{11}$$

$$v_3^{t+1}\big|_{x_3=0}=0,\quad v_3^{t+1}\big|_{x_3=1}-q_\tau^t=O(\tau) \tag{12}$$

и начальными условиями $v(x_1,x_2,x_3,0)=0$.

Как это делалось ранее, скалярно умножим обе части уравнения (9) на $2\tau v^{t+1}$. Имеем

$$\big(v_\tau^t,2\tau v^{t+1}\big)=\left\|v^{t+1}\right\|^2-\left\|v^t\right\|^2+\tau^2\left\|v_\tau^t\right\|^2, \tag{13}$$

$$-\big(\Delta v^{t+1},2\tau v^{t+1}\big)=2\tau\left\|v_x^{t+1}\right\|^2-2\tau\big(\nabla_n v^{t+1},v^{t+1}\big)\big|_{S^h}, \tag{14}$$

где последнее равенство получено с помощью дискретного аналога формулы интегрирования по частям, а последнее слагаемое представляет собой поверхностный интеграл по боковой поверхности куба, а также по верхней и нижней граням соответственно. Далее,

$$\begin{aligned}\big(\nabla' q^{t+1},2\tau v^{t+1}\big)&=-2\tau\big(q^{t+1},\operatorname{div}'\ v^{t+1}\big)=\\&=2\tau\big(q^{t+1},\nabla_3 v_3^{t+1}\big)+2\tau\Big(q^{t+1},O\big(h^2\big)\Big)=2\tau\big(q^{t+1},v_3^{t+1}\big)\big|_{x_3=1}+2\tau\Big(q^{t+1},O\big(h^2\big)\Big).\end{aligned}$$

Последний переход использует тот факт, что q^{t+1} не зависит от x_3. Используя краевое условие на верхней грани (12), можно записать

$$2\tau\big(q^{t+1},v_3^{t+1}\big)\big|_{x_3=1}=2\tau\big(q^{t+1},q_\tau^t\big)\big|_{x_3=1}+2\tau\big(q^{t+1},O(\tau)\big)\big|_{x_3=1}=\big(q^{t+1},2\tau q_\tau^t\big)+2\tau\big(q^{t+1},O(\tau)\big),$$

где в последнем переходе мы вновь воспользовались тем фактом, что q^{t+1} не зависит от x_3. Имеем

$$\begin{aligned}\big(\nabla' q^{t+1},2\tau v^{t+1}\big)&=\big(q^{t+1},2\tau q_\tau^t\big)+2\tau\Big(q^{t+1},O\big(h^2+\tau\big)\Big)=\\&=\left\|q^{t+1}\right\|^2-\|q\|^2+\tau^2\left\|q_\tau^t\right\|^2+2\tau\Big(q^{t+1},O\big(h^2+\tau\big)\Big).\end{aligned} \tag{15}$$

Суммируя (13)–(15), получим при $\phi = O\big(h^2+\tau\big)$ и $\psi = O\big(h^2+\tau\big)$, что

$$\begin{aligned}\left\|v^{t+1}\right\|^2 - \left\|v^t\right\|^2 + \tau^2\left\|v^t_\tau\right\|^2 + 2\tau\left\|v^{t+1}_x\right\|^2 - 2\tau\big(\nabla_n v^{t+1}, v^{t+1}\big)\big|_{S^h} + \\ + \left\|q^{t+1}\right\|^2 - \left\|q^t\right\|^2 + \tau^2\left\|q^t_\tau\right\|^2 + 2\tau\big(\phi, q^{t+1}\big) = 2\tau\big(\psi, v^{t+1}\big).\end{aligned} \tag{16}$$

Оценим каждое из получившихся скалярных произведений последнего выражения. В силу краевых условий (10) и (11), выполненных со вторым порядком аппроксимации по пространственным переменным, верны следующие соотношения:

$$\begin{aligned}\big(\nabla_n v_1^{t+1}, v_1^{t+1}\big)\big|_{S^h} &= \big(\nabla_2 v_1^{t+1}, v_1^{t+1}\big)\big|_{x_2=0,1} + \big(\nabla_3 v_1^{t+1}, v_1^{t+1}\big)\big|_{x_3=0,1},\\ \big(\nabla_2 v_1^{t+1}, v_1^{t+1}\big)\big|_{x_2=0,1} &\leqslant ch^2\Big(\left\|v_1^{t+1}\right\|h^{-1/2}\Big) = ch^{3/2}\left\|v_1^{t+1}\right\|,\\ \big(\nabla_3 v_1^{t+1}, v_1^{t+1}\big)\big|_{x_3=0,1} &\leqslant ch^2\Big(\left\|v_1^{t+1}\right\|h^{-1/2}\Big) = ch^{3/2}\left\|v_1^{t+1}\right\|.\end{aligned}$$

Аналогичные выкладки со второй компонентой v_1^{t+1} приводят к неравенству

$$\big(\nabla_n v^{t+1}, v^{t+1}\big)\big|_{S^h} \leqslant ch^{3/2}\left\|v^{t+1}\right\| \leqslant c\left\|v^{t+1}\right\|^2 + ch^3.$$

Далее, $\big(\phi, q^{t+1}\big) \leqslant c\left\|q^{t+1}\right\|^2 + ch^4 + c\tau^2$, поскольку $\phi = O\big(h^2+\tau\big)$.

Аналогично, $\big(\psi, v^{t+1}\big) \leqslant c\left\|v^{t+1}\right\|^2 + ch^4 + c\tau^2$.

В силу полученных неравенств выражение (16) может быть переписано в виде

$$\left\|v^{t+1}\right\|^2 + \left\|q^{t+1}\right\|^2 \leqslant \left\|v^t\right\|^2 + \left\|q^t\right\|^2 + c\tau\left\|v^{t+1}\right\|^2 + c\tau\left\|q^{t+1}\right\|^2 + c\tau\big(h^4 + h^3 + \tau^2\big).$$

Последнее преобразуется к виду $(1 - c\tau)\Big(\left\|v^{t+1}\right\|^2 + \left\|q^{t+1}\right\|^2\Big) \leqslant \left\|v^t\right\|^2 + \left\|q^t\right\|^2 + c\tau\big(h^4+h^3+\tau^2\big)$.

Поскольку $\tau \to 0$, можно считать, что $1 - c\tau > \dfrac{1}{2}$. Следовательно,

$$\left\|v^{t+1}\right\|^2 + \left\|q^{t+1}\right\|^2 \leqslant 2\Big(\left\|v^t\right\|^2 + \left\|q^t\right\|^2\Big) + c\tau\big(h^4+h^3+\tau^2\big).$$

Из дискретного аналога неравенства Гроноулла получим $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant T}\Big(\left\|v^i\right\|^2 + \left\|q^i\right\|^2\Big) \leqslant e^{cK}\big(h^3+\tau^2\big)$. Поскольку v и q — разность между решениями непрерывной и дискретной задач, получаем, что скорость сходимости предложенной схемы имеет вид $O\big(h^{3/2}+\tau\big)$.

6. Алгоритм решения сеточной задачи. До сих пор мы не затрагивали вопрос поиска решения сеточной задачи (1), (2). Все предыдущие рассуждения подразумевали, что решение задачи существует. Теперь покажем, как это решение может быть найдено с учетом особенности краевого соотношения (5) на верхней грани.

Заметим, что если бы нам было известно значение $u_3^{t+1}\big|_{x_3=1}$, то мы смогли бы определить значение всех неизвестных функций на следующем временно́м слое. В самом деле, функция давления p^{t+1} полностью определяется из соотношения (5), поскольку p^{t+1} не зависит от x_3:

$$p^{t+1} = p^t + \tau u_3^{t+1}\big|_{x_3=1}. \tag{17}$$

Далее, уже известную функцию p^{t+1} мы можем подставить в уравнение (1), откуда найдем первые две компоненты вектора скорости $\big(u_1^{t+1}, u_2^{t+1}\big)$. Наконец, из уравнения неразрывности (2) найдем значение третьей компоненты скорости во всем кубе.

Таким образом, необходимо вычислить $u_3^{t+1}\big|_{x_3=1}$. Для решения этой задачи предлагается следующий алгоритм. Подставим p^{t+1} в уравнение (1), используя выражение (17). Получим

$$\begin{cases}\dfrac{u_1^{t+1} - u_1^t}{\tau} - \Delta u_1^{t+1} + \nabla_x p^t + \tau\nabla_x u_3^{t+1}\big|_{x_3=1} = f_1^{t+1},\\ \dfrac{u_2^{t+1} - u_2^t}{\tau} - \Delta u_2^{t+1} + \nabla_y p^t + \tau\nabla_y u_3^{t+1}\big|_{x_3=1} = f_2^{t+1}.\end{cases}$$

Перенеся в правую часть уже известные величины, получим

$$\begin{cases} u_1^{t+1} - \tau\Delta u_1^{t+1} + \tau^2\nabla_x u_3^{t+1}\big|_{x_3=1} = u_1^t - \tau\nabla_x p^t + f_1^{t+1}, \\ u_2^{t+1} - \tau\Delta u_2^{t+1} + \tau^2\nabla_y u_3^{t+1}\big|_{x_3=1} = u_2^t - \tau\nabla_y p^t + f_2^{t+1}. \end{cases}$$

Просуммируем полученные выше равенства вдоль оси x_3, т.е. для всех узлов $z^i = (i-1/2)h$, где $i = 1,\dots,N$. Обозначим $\overline{u}_1^{t+1}(x,y) = \sum\limits_{i=1}^{N} u_1^{t+1}(x,y,z_i)$, $\overline{u}_2^{t+1}(x,y) = \sum\limits_{i=1}^{N} u_2^{t+1}(x,y,z_i)$.

В силу краевого условия $\nabla_z u_i^{t+1}\big|_{x_3=0,1} = 0$ при $i=1,2$ имеем

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial z^2}\, u_i^{t+1}(x,y,z_i) = 0. \tag{18}$$

Тогда система принимает вид

$$\begin{cases} \overline{u}_1^{t+1} - \tau\Delta \overline{u}_1^{t+1} + \tau^2 N\nabla_x u_3^{t+1}\big|_{x_3=1} = \overline{f}_1^{\,t+1}, \\ \overline{u}_2^{t+1} - \tau\Delta \overline{u}_2^{t+1} + \tau^2 N\nabla_y u_3^{t+1}\big|_{x_3=1} = \overline{f}_2^{\,t+1}. \end{cases}$$

Вследствие усреднения вдоль оси x_3 и равенства (18) полученная система имеет размерность, равную двум. В частности, дискретный аналог оператора Лапласа в данной системе действует только в двух направлениях. Известную правую часть мы обозначили через $\overline{f}_i^{\,t+1}$, $i=1,2$.

Обозначим $\overline{u}_3^{t+1} = Nu_3^{t+1}\big|_{x_3=1}$ и перепишем систему в форме $\overline{u}^{\,t+1} - \tau\Delta\overline{u}^{\,t+1} + \tau^2\nabla\overline{u}_3^{t+1} = \overline{f}^{\,t+1}$, где все операторы действуют только в двух пространственных направлениях и неизвестные функции $\overline{u}^{\,t+1}$ и $\overline{u}_3^{t+1}$ являются функциями двух переменных.

Просуммировав уравнение неразрывности (2) вдоль оси x_3 так, как это было сделано выше, можно получить $\operatorname{div}'\, \overline{u}^{\,t+1} = -\overline{u}_3^{t+1}$, где, как и ранее, оператор дивергенции действует только в направлении двух пространственных переменных.

Имеем систему $\overline{u}^{\,t+1} - \tau\Delta\overline{u}^{\,t+1} + \tau^2\nabla\overline{u}_3^{t+1} = f^{t+1}$, $\operatorname{div}\, \overline{u}^{\,t+1} = -\overline{u}_3^{t+1}$, в совокупности с краевыми условиями $\nabla_i \overline{u}_{3-i}^{t+1}\big|_{x_i=0,1} = 0$ и $\overline{u}_i^{t+1}\big|_{x_i=0,1} = 0$, $i=1,2$. Подставив второе уравнение в первое, получим следующее равенство:

$$\overline{u}^{\,t+1} - \tau\Delta\overline{u}^{\,t+1} - \tau^2\nabla\operatorname{div}\, \overline{u}^{\,t+1} = f^{t+1}. \tag{19}$$

Предлагается следующая последовательность действий. Сначала решается вспомогательная система (19) и находится вектор $\overline{u}^{\,t+1}$. Далее, значение $\overline{u}_3^{t+1}$ может быть найдено из соотношения $\operatorname{div}\, \overline{u}^{\,t+1} = -\overline{u}_3^{t+1}$. Непосредственно из определения $\overline{u}_3^{t+1} = Nu_3^{t+1}\big|_{x_3=1}$ вычисляется $u_3^{t+1}\big|_{x_3=1}$. Как это было показано выше, значение этой третьей компоненты скорости на верхней грани позволяет найти все оставшиеся переменные на следующем временно́м слое.

7. Численный эксперимент. Предложенный алгоритм тестировался на следующих функциях-решениях:

$$u_1 = \cos(\pi t)\sin(\pi x)\cos(\pi y)\left(\frac{z^3}{3} - \frac{z^2}{2}\right), \qquad u_2 = \cos(\pi t)\cos(\pi x)\sin(\pi y)\left(\frac{z^3}{3} - \frac{z^2}{2}\right),$$

$$u_3 = \pi\cos(\pi t)\cos(\pi x)\cos(\pi y)\left(\frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{6}\right), \quad p = \frac{1}{6}\sin(\pi t)\cos(\pi x)\cos(\pi y).$$

Результаты численного эксперимента обозначим $(\boldsymbol{u}_h, p_h)$. Нас будет интересовать поведение ошибки $e = \max\left\{\max\limits_{0\leqslant i\leqslant T}\left\|u^i - u_h^i\right\|,\ \max\limits_{0\leqslant i\leqslant T}\left\|p^i - p_h^i\right\|\right\}$. Согласно теоретическим оценкам ожидаемое поведение ошибки имеет вид $e = O\big(h^{3/2} + \tau\big)$ при $h,\, \tau \to 0$.

Следуя работе [2], будем поступать следующим образом. Каждый шаг сопровождается увеличением числа точек разбиения N в n раз, при этом количество точек разбиения по времени увеличивается не менее, чем в $n^{3/2}$ раз. Рассмотрим отношение ошибки e в первом и втором экспериментах соответственно, которое мы обозначим через Δ. Если скорость сходимости действительно соответствует $O\big(h^{3/2} + \tau\big)$, то мы вправе ожидать, что $\log_n \Delta \approx \dfrac{3}{2}$.

В таблице приводятся результаты численных экспериментов для различных значений n и K, которые определяют временны́е промежутки $[0, K]$, на которых рассчитывалась задача.

Значения, представленные в столбце $\log_n \Delta$, согласуются с ожидаемыми и подтверждают теоретическую оценку скорости сходимости.

8. Заключение. В настоящей работе предложена разностная схема для системы уравнений (1), (2), дополненной краевыми условиями (3)–(5) и начальным условием (6). Эта разностная схема аппроксимирует исходную задачу со вторым порядком по пространственным переменным и первым по времени. Исследована сходимость к решению дифференциальной задачи, а также установлен порядок сходимости. Разработан алгоритм поиска решения сеточной задачи с учетом особенности краевых условий.

Для проведения численных экспериментов использовалась система для математических вычислений GNU Octave [6, 7].

Дальнейшее исследование может быть связано с рассмотрением полной системы уравнений динамики атмосферы. Вопрос сходимости с учетом возможной нелинейности может быть рассмотрен с использованием техники, применяемой в работах [1, 2]. Построение алгоритма поиска решения сеточной задачи с учетом особенности краевых условий и возможной нелинейности также представляет интерес для исследования.

Численный эксперимент

$n = 2,\ K = 1$				
N	T	e	Δ	$\log_n \Delta$
2	2	0.07155	—	—
4	6	0.02502	2.860	1.516
8	17	0.00916	2.731	1.449
16	49	0.00324	2.828	1.500
32	139	0.00115	2.811	1.491
64	394	0.00040	2.821	1.496
$n = 3,\ K = 0.5$				
3	2	0.02923	—	—
9	11	0.00549	5.329	1.523
27	58	0.00107	5.106	1.484

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Друца А.В., Кобельков Г.М.* О сходимости разностных схем для уравнений динамики океана // Математический сборник. 2012. **203**, № 8. 17–38.
2. *Друца А.В.* О порядке сходимости разностных схем для уравнений динамики океана // Вычислительные методы и программирование. 2012. **13**. 398–408.
3. *Лебедев В.И.* Метод конечных сеток для уравнений типа С. Л. Соболева // Докл. АН СССР. 1957. **114**, № 6. 1166–1169.
4. *Gorshkov A.V.* Uniqueness of a solution to the problem of atmosphere dynamics // J. of Mathematical Sciences. 2010. **167**, № 3. 340–357.
5. *Kobelkov G.M.* Existence of a solution “in the large” for ocean dynamics equations // J. of Mathematical Fluid Mechanics. 2007. **9**, № 4. 588–610.
6. Octave community GNU/Octave (www.gnu.org/software/octave/).
7. *Eaton J.W., Bateman D., Hauberg S.* GNU Octave manual. Version 3. Godalming: Network Theory Limited, 2008.

Поступила в редакцию
11.08.2013