УДК 517.983

ПОТОЧЕЧНО ЭКСТРАОПТИМАЛЬНЫЕ РЕГУЛЯРИЗУЮЩИЕ АЛГОРИТМЫ

А. С. Леонов[1]

Изучаются поточечные апостериорные оценки точности приближенных решений (функций нескольких переменных) многомерных обратных некорректно поставленных задач. Эти оценки строятся для заданных значений аргумента приближенного решения, полученного с помощью некоторого регуляризующего алгоритма (РА). Рассматривается методика вычисления поточечных апостериорных оценок. Вводится новое понятие поточечно экстраоптимального РА как метода решения некорректной обратной задачи, который обладает при каждом заданном аргументе приближенного решения оптимальной по порядку точности поточечной апостериорной оценкой. Приводятся примеры поточечно экстраоптимальных РА и результаты численных экспериментов по поточечной апостериорной оценке их точности. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (коды проектов 11–01–00040-а и 12–01–91153-ГФЕН-а) и Аналитической ведомственной целевой программы “Развитие научного потенциала Высшей школы” (код проекта 2.1.1/11278).

Ключевые слова: некорректные задачи, регуляризующие алгоритмы (РА), поточечная апостериорная оценка точности, поточечно экстраоптимальный РА.

1. Постановка задачи. Пусть $Z(T)$ — нормированное пространство функций $z(s)$, определенных в замкнутой области $T \subset \mathbb{R}^N$, $\mathcal{D} \neq \varnothing$ — заданное множество в $Z(T)$, U — нормированное пространство с элементами u, а $A : Z(T) \to U$ — некоторый оператор, возможно, нелинейный. В пространстве $Z(T)$ зададим также некоторую топологию секвенциальной сходимости τ. Предположим, что операторное уравнение

$$Az = u \tag{1}$$

имеет для заданной правой части $u \in U$ непустое множество решений Z^*, $Z^* \subset \mathcal{D}$.

Будем искать специальные решения из этого множества. Для этой цели используем функционал $\Omega[z]$, определенный и ограниченный снизу на $\mathcal{D}$. Не уменьшая общности, можно считать, что $\Omega[z] \geqslant 0$. Нас интересуют Ω-оптимальные решения уравнения (1), т.е. элементы $\overline{z}(s) \in \mathcal{D}$, для которых $\Omega\big[\overline{z}\big] = \inf\big\{\Omega[z] : z \in Z^*\big\}$. Множество Ω-оптимальных решений обозначим через $\overline{Z}$. Для нахождения функций $\overline{z}(s)$ из множества $\overline{Z}$ будем использовать приближенные данные задачи: оператор $A_h : Z(T) \to U$ и элемент $u_\delta \in U$. Приближенные данные (A_h, u_δ), аппроксимирующие точные данные (A, u), удовлетворяют условиям $\|A_h z - Az\| \leqslant \Psi\big(h, \Omega[z]\big)$, $\|u_\delta - u\| \leqslant \delta$, в которых величины $\eta = (h, \delta)$ являются известными характеристиками точности аппроксимации. Свойства функционала $\Omega[z]$ и меры аппроксимации $\Psi\big(h, \Omega[z]\big)$ будут указаны ниже. Используем для решения задачи (1) некоторый регуляризующий алгоритм (РА) (см. [1]) и найдем с его помощью приближения $z_\eta(s) \in \mathcal{D}$ к множеству $\overline{Z}$, такие, что $z_\eta \xrightarrow{\tau} \overline{Z}$ при $\eta \to 0$ (см. [2]). Нас интересуют *апостериорные оценки точности* этих приближений. Оценки могут быть получены по следующей схеме.

Зная $z_\eta(s)$, вычислим величины $\Delta_\eta = C\|A_h z_\eta - u_\delta\|$, $R_\eta = C\Omega[z_\eta]$, где $C > 1$ — заданная константа. Введем множество $\mathcal{Z}_\eta = \big\{z(s) \in \mathcal{D} : \|A_h z - u_\delta\| \leqslant \Delta_\eta,\ \Omega[z] \leqslant R_\eta\big\}$ и предположим, что $\overline{Z} \subset \mathcal{Z}_\eta$. Тогда справедливы апостериорные оценки точности приближенных решений $z_\eta(s)$:

$$\begin{aligned} &\|z_\eta - \overline{z}\,\| \leqslant \sup\big\{\|z_\eta - z\| : z \in \mathcal{Z}_\eta\big\} \triangleq \varepsilon(\eta), \\ &\big|z_\eta(s) - \overline{z}(s)\big| \leqslant \sup\Big\{\big|z_\eta(s) - z(s)\big| : z(s) \in \mathcal{Z}_\eta\Big\} \triangleq E_s(\eta), \quad s \in T, \end{aligned} \tag{2}$$

в которых $\overline{z}(s)$ — любое Ω-оптимальное решение уравнения (1).

Определение 1. Назовем функцию $\varepsilon(\eta)$ глобальной, а функцию $E_s(\eta)$ — поточечной (в точке s) апостериорной оценкой точности приближенного решения $z_\eta(s)$.

---

[1] Национальный исследовательский ядерный университет (МИФИ), Каширское шоссе, д. 31, 115409, Москва; профессор, e-mail: asleonov@mephi.ru

Теория глобальных апостериорных оценок точности развита в работах [3–10]. Некоторые поточечные апостериорные оценки иного типа, чем (2), получены в [5, 11–13]. В [7–10] введено понятие экстраоптимального РА как метода решения рассматриваемой обратной задачи (1), имеющего оптимальную по порядку глобальную апостериорную оценку точности. В настоящей статье изучаются поточечные апостериорные оценки типа (2), рассматривается методика их вычисления и вводится новое понятие *поточечно экстраоптимального* РА как регуляризующего алгоритма, который обладает оптимальной по порядку точности апостериорной оценкой $E_s(\eta)$ в каждой точке $s \in T$. Указываются также конкретные РА, имеющие свойство поточечной экстраоптимальности.

2. Основные предположения. В дальнейшем будем предполагать, что выполнены условия

А. функционалы $J[z] = \|Az - u\|$, $J_\eta[z] = \|A_h z - u_\delta\|$ и $\Omega[z]$ τ-полунепрерывны снизу на $\mathcal{D}$;

Б. непустые множества $\Omega_K = \{z \in \mathcal{D} : \Omega[z] \leqslant K\}$ τ-секвенциально компактны;

В. мера аппроксимации $\Psi(h, \Omega)$ непрерывна при h, $\Omega \geqslant 0$, возрастает по переменной Ω при каждом $h > 0$; кроме того, $\Psi(h, \Omega) > 0$ при h, $\Omega > 0$ и $\Psi(0, \Omega) = 0$ при $\Omega \geqslant 0$;

Г. используемый регуляризующий алгоритм дает приближенные решения z_η, удовлетворяющие *условиям регулярности* [14]: $\overline{\lim\limits_{\eta\to 0}}\, \Omega[z_\eta] \leqslant \overline{C} = \Omega\big[\,\overline{Z}\,\big]$, $\lim\limits_{\eta\to 0} \|A_h z_\eta - u_\delta\| = 0$.

Замечание 1. Условия А и Б гарантируют существование Ω-оптимальных решений задачи (1). Вместе с условиями Г при учете условий В на меру аппроксимации $\Psi\big(h, \Omega[z]\big)$ они обеспечивают сходимости $z_\eta \xrightarrow{\tau} \overline{Z}$, $\Omega[z_\eta] \to \Omega\big[\,\overline{Z}\,\big]$ при $\eta \to 0$ (см. [2, 14]), а поэтому и сходимости $\Delta_\eta \to 0$, $R_\eta \to C\Omega\big[\,\overline{Z}\,\big]$.

Замечание 2. Если условия регулярности выполнены с некоторым числом $\overline{C}$, $\overline{C} > \Omega\big[\,\overline{Z}\,\big]$, то гарантируется лишь сходимость $z_\eta \xrightarrow{\tau} \widetilde{Z}$, где $\widetilde{Z} = \{z^* \in Z^* : \Omega[z^*] \leqslant \overline{C}\}$.

3. Основные свойства поточечных апостериорных оценок точности. Для того чтобы оценка (2) была содержательной, необходимо выполнение соотношения $\lim\limits_{\eta\to 0} E_s(\eta) = 0$. Это, в свою очередь, влечет ограничения на множество Ω-оптимальных решений $\overline{Z}$, которые указаны в следующем утверждении.

Утверждение 1. *Если* $\lim\limits_{\eta\to 0} E_s(\eta) = 0$ *в точке* $s \in T$, *то все* Ω*-оптимальные решения совпадают в этой точке.*

Доказательство вытекает из неравенства $\big|\overline{z}_1(s) - \overline{z}_2(s)\big| \leqslant \big|\overline{z}_1(s) - z_\eta(s)\big| + \big|z_\eta(s) - \overline{z}_2(s)\big| \leqslant 2E_s(\eta)$ для всех $\overline{z}_1(s)$, $\overline{z}_2(s) \in \overline{Z}$.

Пусть $\overline{z}(s) \in \mathcal{D}$ — решение задачи (1), непрерывное в T всюду за исключением, быть может, некоторого множества точек меры нуль. Это решение называется *единственным в существенном*, если другие возможные на множестве $\mathcal{D}$ решения уравнения (1), составляющие класс Z^*, совпадают с $\overline{z}(s)$ во всех точках непрерывности этой функции. Из класса Z^* в силу свойств А и Б можно выделить класс Ω-оптимальных решений $\overline{Z}$ [2]. Если τ есть топология поточечной (или равномерной) сходимости, то каждый представитель этого класса также совпадает с $\overline{z}(s)$ во всех точках ее непрерывности. В этом случае будем называть множество $\overline{Z}$ *множеством* Ω*-оптимальных значений* единственного в существенном решения $\overline{z}(s)$. Множество $\overline{Z}$ можно трактовать как многозначную функцию, для которой точки непрерывности решения $\overline{z}(s)$ являются точками однозначности. Включение вида $\widetilde{z}(s) \in \overline{Z}$ означает выбор однозначного сечения $\widetilde{z}(s)$ этой многозначной функции. Понятие единственного в существенном решения типично при рассмотрении обратных задач на классах функций с ограниченной вариацией (см. [2, 6] и пример из раздела 8.2). Если $\overline{z}(s) \in C(T)$, то это понятие переходит в обычное требование единственности решения.

Следующая теорема дает достаточные условия сходимости $\lim\limits_{\eta\to 0} E_s(\eta) = 0$.

Теорема 1. *Предположим, что решение* $\overline{z}(s) \in \mathcal{D}$ *задачи* (1) *единственно в существенном. Тогда:*

а) *если* τ *есть топология поточечной сходимости в* $Z(T)$, *то в точках непрерывности* $s \in T$ *функции* $\overline{z}(s)$ *справедливо равенство* $\lim\limits_{\eta\to 0} E_s(\eta) = 0$;

б) *если* τ *есть топология равномерной сходимости в* $Z(T)$ *и решение* $\overline{z}(s)$ *непрерывно в* T, *то сходимость* $\lim\limits_{\eta\to 0} E_s(\eta) = 0$ *равномерна по* s *в* T.

Доказательство. Рассмотрим случай а), когда τ есть топология поточечной сходимости в $Z(T)$. Фиксируем произвольную точку $s \in T$ и возьмем какую-либо максимизирующую последовательность $\{z_n(s)\} \subset \mathcal{Z}_\eta$ для супремума из (2) в этой точке. Тогда

$$\big|z_n(s) - z_\eta(s)\big| \longrightarrow E_s(\eta), \quad n \to \infty. \tag{3}$$

При этом по определению множества $\mathcal{Z}_\eta$ выполнено неравенство $\Omega[z_n] \leqslant R_\eta$. Поэтому, согласно предположению Б, найдется τ-сходящаяся подпоследовательность $\{z_{n_k}(s)\} \subset \{z_n(s)\}$: $z_{n_k} \xrightarrow{\tau} \widetilde{z}_\eta \in \mathcal{D}$, т.е. сходящаяся в каждой точке $s \in T$ к функции к $\widetilde{z}_\eta(s)$. Отсюда и из предположения А, используя принадлежность $z_{n_k}(s) \in \mathcal{Z}_\eta$, получим:

$$R_\eta \geqslant \varliminf_{k\to\infty} \Omega[z_{n_k}] \geqslant \Omega[\widetilde{z}_\eta], \quad \Delta_\eta \geqslant \varliminf_{k\to\infty} \|A_h z_{n_k} - u_\delta\| \geqslant \big\|A_h \widetilde{z}_\eta - u_\delta\big\|, \tag{4}$$

т.е. $\widetilde{z}_\eta \in \mathcal{Z}_\eta$. Тогда вследствие (3) имеем

$$E_s(\eta) = \lim_{k\to\infty} \big|z_{n_k}(s) - z_\eta(s)\big| = \big|\widetilde{z}_\eta(s) - z_\eta(s)\big|. \tag{5}$$

Из оценок (4) и сходимостей $\Delta_\eta \to 0$, $R_\eta \to C\Omega\big[\,\overline{Z}\,\big]$, отмеченных в замечании 1, следуют соотношения

$$\varlimsup_{\eta\to 0} \Omega\big[\widetilde{z}_\eta\big] \leqslant \lim_{\eta\to 0} R_\eta = C\Omega\big[\,\overline{Z}\,\big], \quad \lim_{\eta\to 0}\big\|A_h \widetilde{z}_\eta - u_\delta\big\| = \lim_{\eta\to 0} \Delta_\eta = 0, \tag{6}$$

означающие выполнение для элементов $\widetilde{z}_\eta$ условий регулярности с константой $\overline{C} = C\Omega\big[\,\overline{Z}\,\big] \geqslant \Omega\big[\,\overline{Z}\,\big]$. Тогда, как отмечалось в замечании 2, справедлива сходимость $\widetilde{z}_\eta \xrightarrow{\tau} \widetilde{Z}$ при $\eta \to 0$. Учитывая единственность в существенном решения задачи (1), получим отсюда, что $\lim_{\eta\to 0} \widetilde{z}_\eta(s) = \overline{z}(s)$ в каждой точке непрерывности функции $\overline{z}(s)$. Кроме того, в этих точках $\lim_{\eta\to 0} z_\eta(s) = \overline{z}(s)$ в силу поточечной сходимости $z_\eta \xrightarrow{\tau} \overline{Z}$, отмеченной в замечании 1, и единственности в существенном. Поэтому из соотношения (5) следует, что $\lim_{\eta\to 0} E_s(\eta) = \lim_{\eta\to 0}\big|\widetilde{z}_\eta(s) - z_\eta(s)\big| = \big|\overline{z}(s) - \overline{z}(s)\big| = 0$ в каждой точке непрерывности функции $\overline{z}(s)$.

Теперь рассмотрим случай б) топологии равномерной сходимости в $Z(T)$, задав в этом пространстве норму $\|z\|_M = \sup\Big\{\big|z(s)\big| \,:\, s \in T\Big\}$. Введем функцию $\varepsilon_M(\eta) = \sup\big\{\|z_\eta - z\|_M \,:\, z \in \mathcal{Z}_\eta\big\}$ и возьмем какую-нибудь максимизирующую последовательность $\{z_n\} \subset \mathcal{Z}_\eta$ для этого супремума: $\|z_\eta - z_n\|_M \longrightarrow \varepsilon_M(\eta)$, $n \to \infty$. Далее, как при доказательстве в части а), можно, используя предположения А и Б, найти такую подпоследовательность $\{z_{n_k}\}$, которая τ-сходится в $Z(T)$: $z_{n_k} \xrightarrow{\tau} \breve{z}_\eta \in \mathcal{D}$. В данном случае это значит, что $z_{n_k}(s)$ равномерно сходится к $\breve{z}_\eta(s)$ на множестве T, причем выполнены соотношения (4) с заменой в них величины $\widetilde{z}_\eta$ на $\breve{z}_\eta$. Поэтому $\breve{z}_\eta \in \mathcal{Z}_\eta$. Далее, аналогично (5) получим

$$\varepsilon_M(\eta) = \lim_{k\to\infty} \|z_\eta - z_{n_k}\|_M = \big\|z_\eta - \breve{z}_\eta\big\|_M. \tag{7}$$

Заметим, что требование единственности в существенном решения $\overline{z}(s) \in \mathcal{D}$ для рассматриваемой топологии означает единственность этого решения как элемента пространства $Z(T)$: $\overline{Z} = \{\overline{z}\}$. Поэтому, как при доказательстве в части а), из включения $\breve{z}_\eta \in \mathcal{Z}_\eta$ получаются условия регулярности (6) для элементов $\breve{z}_\eta$ и, следовательно, сходимость $\breve{z}_\eta \xrightarrow{\tau} \overline{z}$ при $\eta \to 0$, означающая равномерную сходимость $\breve{z}_\eta \rightrightarrows \overline{z}$. Вместе со сходимостью приближений $z_\eta \xrightarrow{\tau} \overline{z}$, т.е. равномерной сходимостью $z_\eta \rightrightarrows \overline{z}$, и с формулой (7) это приводит к соотношению $\lim_{\eta\to 0} \varepsilon_M(\eta) = \lim_{\eta\to 0}\big\|z_\eta - \breve{z}_\eta\big\|_M = \big\|\overline{z} - \overline{z}\big\|_M = 0$. Для завершения доказательства остается отметить равномерную по s оценку $E_s(\eta) \leqslant \varepsilon_M(\eta)$, из которой и получается доказываемая в части б) равномерная сходимость. Теорема доказана.

Замечание 3. Теорема 1 указывает достаточные условия равенства $\lim_{\eta\to 0} E_s(\eta) = 0$. Однако это предельное соотношение может выполняться и для других топологий τ.

Как указано выше, поточечная апостериорная оценка (2) верна, если $\overline{Z} \in \mathcal{Z}_\eta$. В следующей теореме даются достаточные условия такого включения.

Теорема 2. *Предположим, что* $\Omega\big[\,\overline{Z}\,\big] > 0$ *и* $\delta + \Psi\Big(h, \Omega\big[\,\overline{Z}\,\big]\Big) < \Delta_\eta$ *при достаточно малых* η (*т.е. при* $0 < \|\eta\| \leqslant \eta_0 = \mathrm{const}$). *Тогда* $\overline{Z} \in \operatorname{int} \mathcal{Z}_\eta$ *при таких* η.

Доказательство. Заметим, что при $0 < \|\eta\| \leqslant \eta_0$ выполнено неравенство $\Omega\big[\,\overline{Z}\,\big] < R_\eta$. В противном случае с учетом замечания 1 выполнялось бы соотношение $\Omega\big[\,\overline{Z}\,\big] \geqslant \lim_{\eta\to 0} R_\eta = \lim_{\eta\to 0} C\Omega[z_\eta] = C\Omega\big[\,\overline{Z}\,\big]$, что невозможно при $C > 1$ и $\Omega\big[\,\overline{Z}\,\big] > 0$. Далее, при достаточно малых η выполнено и неравенство $\big\|A_h\overline{z} - u_\delta\big\| < \Delta_\eta$, где $\overline{z}$ — любой элемент из $\overline{Z}$. Если бы это было не так, то выполнялось бы противоречивое неравенство $\Delta_\eta \leqslant \big\|A_h\overline{z} - u_\delta\big\| \leqslant \big\|A_h\overline{z} - A\overline{z}\,\big\| + \big\|A\overline{z} - u\big\| + \|u - u_\delta\| \leqslant \Psi\Big(h, \Omega[\overline{z}]\Big) + 0 + \delta < \Delta_\eta$, вытекающее из условий аппроксимации данных задачи (1) и из условий теоремы. Таким образом, неравенства, которые фигурируют в определении множества $\mathcal{Z}_\eta$, выполнены для любого элемента $\overline{z} \in \overline{Z}$, причем в их строгом варианте. Поэтому $\overline{Z} \in \operatorname{int} \mathcal{Z}_\eta$. Теорема доказана.

Итак, поточечная апостериорная оценка (2) верна для любого $s \in T$ при выполнении условий теоремы 2. Отметим, что если некоторое Ω-оптимальное решение $\overline{z}$ задачи (1) не включено в множество $\mathcal{Z}_\eta$, то эта оценка может нарушаться в некоторых точках или даже везде в T.

4. Конечномерная аппроксимация задачи поточечного апостериорного оценивания точности. Проведем конечномерную аппроксимацию по схеме, изложенной в [6]. Для этого введем сетку точек $S_N = \{s_j\}_{j=1}^N \subset T$ и будем обозначать линейное пространство заданных на ней сеточных функций $\widehat{z}_N = \{z_j\}_{j=1}^N$ через Z_N. Введем также конечномерное пространство U_M размерности M с элементами $\widehat{u}_M$. Индексы в этих обозначениях будем иногда опускать там, где это не вызывает недоразумений. Связь пространств $Z(T)$, Z_N и U, U_M будет осуществляться с помощью специальных линейных ограниченных операторов $P_N : Z(T) \to Z_N$, $\overline{P}_N : Z_N \to Z(T)$ и $\overline{Q}_M : U_M \to U$. При этом оператор P_N действует по правилу $P_N z = \{z(s_j)\}_{j=1}^N$. Кроме того, операторы должны обладать следующими свойствами:

1) $\big(\overline{P}_N \widehat{z}\big)(s_j) = z_j$ для всех $\widehat{z} \in Z_N$ и $s_j \in S_N$;

2) $\overline{P}_N P_N z \in \mathcal{D}$ для любого $z \in \mathcal{D}$.

Из свойства 1 следует, что $P_N \overline{P}_N = E_N$, где E_N — единичный оператор в пространстве Z_N. Из определения операторов P_N и $\overline{P}_N$ также следует $\big(\overline{P}_N P_N z\big)(s_j) = z(s_j)$ для всех $z \in \mathcal{D}$ и $s_j \in S_N$. Ниже в примерах из раздела 8 в качестве $\overline{P}_N$ взяты операторы кусочно-линейной интерполяции.

Введем конечномерный аналог множества $\mathcal{D}$: $\widehat{\mathcal{D}} = \big\{\widehat{z} \in Z_N : \overline{P}_N \widehat{z} \in \mathcal{D}\big\}$ и специальное подмножество $\overline{\mathcal{D}} = \Big\{z(s) = \big(\overline{P}_N \widehat{z}\big)(s) : \ \forall \widehat{z} \in \widehat{\mathcal{D}}\Big\}$ множества $\mathcal{D}$.

Далее, мы будем считать, что вместо точных данных задачи (1), т.е. величин $\{A, u\}$, используются приближенные конечномерные данные $\big\{\widehat{A}, \widehat{u}\big\}$. Здесь $\widehat{A} : Z_N \to U_M$ — заданный конечномерный оператор, аппроксимирующий оператор A на множестве $\mathcal{D}$, а $\widehat{u} \in U_M$ — конечномерный элемент, аппроксимирующий элемент $u \in U$. Аппроксимация точных данных приближенными производится так, что выполнены оценки

$$\big\|u - \overline{Q}_M \widehat{u}\big\|_U \leqslant \delta, \quad \big\|Az - \overline{Q}_M \widehat{A} P_N z\big\|_U \leqslant \widehat{\psi}\big(h, \Omega[z]\big) \quad \forall z \in \mathcal{D}. \tag{8}$$

Величины $\delta = \delta(M)$ и $h = h(N, M)$ представляют собой известные числовые характеристики точности аппроксимации. Считается, что для них выполнены предельные соотношения $\delta(M) \to 0$, $h(N, M) \to 0$ при M и $N \to \infty$. Предполагается, что функция $\widehat{\psi}(h, \Omega)$ — мера конечномерной аппроксимации оператора — известна и обладает теми же свойствами, что и функция $\Psi(h, \Omega)$ из раздела 2. Меры конечномерной аппроксимации $\widehat{\psi}$ могут быть вычислены аналитически для многих задач [2, 6]. Из (8) следует, что точный оператор A по той же схеме, что и в разделе 2, аппроксимируется на множестве $\mathcal{D}$ приближенным оператором $A_h = \overline{Q}_M \widehat{A} P_N : Z(T) \to U$, а точная правая часть u — элементом $u_\delta = \overline{Q}_M \widehat{u}$.

При сделанных предположениях мы ищем по конечномерным данным $\big\{\widehat{A}, \widehat{u}, \widehat{\psi}, h, \delta, N, M, Z_N, U_M\big\}$ конечномерное приближенное решение задачи (1), т.е. элемент $\widehat{z}_\eta = \Big\{\big(\widehat{z}_\eta\big)_j\Big\}_{j=1}^N \in \widehat{\mathcal{D}}$, такой, что получаемое с его помощью приближенное решение $z_\eta = \overline{P}_N \widehat{z}_\eta \in \overline{\mathcal{D}}$ τ-сходится при N, $M \to \infty$ (т.е. при $\eta = (h, \delta) \to 0$) к множеству Ω-оптимальных решений $\overline{Z}$: $\overline{P}_N \widehat{z}_\eta \xrightarrow{\tau} \overline{Z}$. С этой целью можно применить, например, конечномерные регуляризующие алгоритмы из [2, 6], использующие следующие конечномерные аналоги функционала $\Omega[z]$ и невязки $\|A_h z - u_\delta\|$:

$$\widehat{\Omega}\big[\widehat{z}\big] = \Omega\big[\overline{P}_N \widehat{z}\big], \quad \widehat{N}_\eta\big[\widehat{z}\big] = \big\|\overline{Q}_M \widehat{A} \widehat{z} - \overline{Q}_M \widehat{u}\big\|_U = \big\|A_h \overline{P}_N \widehat{z} - u_\delta\big\|_U. \tag{9}$$

В равенстве (9) использовано свойство $P_N \overline{P}_N = E_N$. Можно получить, вычислив величины $\widehat{\Delta}_\eta = \widehat{N}_\eta\big[\widehat{z}_\eta\big]$, $\widehat{R}_\eta = C\widehat{\Omega}\big[\widehat{z}_\eta\big]$, поточечную апостериорную оценку точности приближения $z_\eta = z_\eta(s) = \big(\overline{P}_N \widehat{z}_\eta\big)(s)$ как частный случай неравенства (2) с оценочной функцией

$$\begin{aligned}\widehat{E}_s(\eta) &= \sup\Big\{\big|z(s) - z_\eta(s)\big| : \forall z(s) \in \overline{\mathcal{D}}, \ \|A_h z(s) - u_\delta\|_U \leqslant \widehat{\Delta}_\eta, \ \Omega\big[z(s)\big] \leqslant \widehat{R}_\eta\Big\} = \\ &= \sup\bigg\{\Big|\big(\overline{P}_N \widehat{z}\big)(s) - \big(\overline{P}_N \widehat{z}_\eta\big)(s)\Big| : \forall \widehat{z} \in \widehat{\mathcal{D}}, \ \big\|A_h \overline{P}_N \widehat{z} - u_\delta\big\|_U \leqslant \widehat{\Delta}_\eta, \ \Omega\big[\overline{P}_N \widehat{z}\big] \leqslant \widehat{R}_\eta\bigg\}.\end{aligned}$$

Она отличается от $E_s(\eta)$, определенной как в (2) для приближенных данных $(A_h, u_\delta) = \big(\overline{Q}_M \widehat{A} P_N, \overline{Q}_M \widehat{u}\big)$, тем, что супремум берется по подмножеству $\overline{\mathcal{D}}$, $\overline{\mathcal{D}} \subset \mathcal{D}$, определяемому пространством Z_N. Следовательно, $\widehat{E}_s(\eta) \leqslant E_s(\eta)$, и поэтому для $\widehat{E}_s(\eta)$ справедливы результаты теоремы 1. Для точек $s_i \in S_N$ $(i = 1, \ldots, N)$ в силу свойств операторов P_N и $\overline{P}_N$, учитывая (9), можно записать, что

$$\widehat{E}_{s_i}(\eta) = \sup\bigg\{\Big|\widehat{z}_i - \big(\widehat{z}_\eta\big)_i\Big| : \forall \widehat{z} \in \widehat{\mathcal{D}}, \ \widehat{N}_\eta\big[\widehat{z}\big] \leqslant \widehat{\Delta}_\eta, \ \widehat{\Omega}\big[\widehat{z}\big] \leqslant \widehat{R}_\eta\bigg\}. \tag{10}$$

Поэтому апостериорная оценка точности для таких s_i имеет вид

$$\left|\left(\widehat{z}_\eta\right)_i - \overline{z}(s_i)\right| \leqslant \widehat{E}_{s_i}(\eta) \tag{11}$$

и выполнена, если для всех $\overline{z} \in \overline{Z}$ при $0 < \|\eta\| \leqslant \eta_0$ справедливы неравенства $\widehat{N}_\eta\left[P_N\overline{z}\right] \leqslant \widehat{\Delta}_\eta$ и $\widehat{\Omega}\left[P_N\overline{z}\right] \leqslant \widehat{R}_\eta$. Последние выражают конечномерный аналог включения $\overline{Z} \in \mathcal{Z}_\eta$ (см. раздел 1). Таким образом, для получения поточечных апостериорных оценок точности вида (11) достаточно найти величину $\widehat{E}_{s_i}(\eta)$.

5. Алгоритм поточечного апостериорного оценивания точности. Изучим экстремальную задачу (10) вычисления величины $\widehat{E}_{s_i}(\eta)$.

Лемма 1. *Пусть $F[z]$ — функционал, ограниченный на множестве $\mathcal{Z}$, $\mathcal{Z} \subset Z(T)$, и*

$$F^* = \sup\Big\{\big|F[z]\big| : z \in \mathcal{Z}\Big\}, \quad F^{(+)} = \sup\big\{F[z] : z \in \mathcal{Z}\big\}, \quad F^{(-)} = \sup\big\{-F[z] : z \in \mathcal{Z}\big\}.$$

Тогда $F^* = \max\left\{F^{(+)}, F^{(-)}\right\}$.

Доказательство. Введем множества $\mathcal{Z}^{(+)} = \big\{z \in \mathcal{Z} : F[z] \geqslant 0\big\}$, $\mathcal{Z}^{(-)} = \big\{z \in \mathcal{Z} : F[z] < 0\big\}$. Тогда, если $\mathcal{Z}^{(-)} = \varnothing$, т.е. $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}^{(+)}$, то $F^* = F^{(+)} \geqslant 0$, $F^{(-)} \leqslant 0$, и поэтому $F^* = \max\big\{F^{(+)}, F^{(-)}\big\}$. Такое же равенство получается и в случае, если $\mathcal{Z}^{(+)} = \varnothing$, когда $F^* = F^{(-)} \geqslant 0$, $F^{(+)} \leqslant 0$. Наконец, в случае если $\mathcal{Z}^{(+)} \neq \varnothing$ и $\mathcal{Z}^{(-)} \neq \varnothing$, доказываемое равенство следует из соотношений

$$\begin{aligned}
F^{(+)} &= \sup\left\{F[z] : z \in \mathcal{Z}\right\} = \sup\big\{F[z] : z \in \mathcal{Z}^{(+)}\big\} = \sup\Big\{\big|F[z]\big| : z \in \mathcal{Z}^{(+)}\Big\},\\
F^{(-)} &= \sup\left\{-F[z] : z \in \mathcal{Z}\right\} = \sup\big\{-F[z] : z \in \mathcal{Z}^{(-)}\big\} = \sup\Big\{\big|F[z]\big| : z \in \mathcal{Z}^{(-)}\Big\}
\end{aligned}$$

и представления $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}^{(+)} \cup \mathcal{Z}^{(-)}$. Лемма доказана.

Будем считать, что τ есть топология поточечной (или равномерной) сходимости. В силу предположения Б семейство функций $\Big\{\big(\overline{P}_N\widehat{z}\big)(s) : \widehat{z} \in \widehat{\mathcal{D}}, \Omega\big[\overline{P}_N\widehat{z}\big] = \widehat{\Omega}\big[\widehat{z}\big] \leqslant \widehat{R}_\eta\Big\}$ τ-секвенциально компактно и, следовательно, для каждого $s_i \in S_N$ ограничены значения $\big(\overline{P}_N\widehat{z}\big)(s_i) = \widehat{z}_i$. Поэтому функционал $F\big[\widehat{z}\big] = \widehat{z}_i - \big(\widehat{z}_\eta\big)_i$ ограничен, если для $\widehat{z}$ выполнены ограничения задачи (10). Тогда из леммы 1, примененной к задаче (10), получается равенство

$$\widehat{E}_{s_i}(\eta) = \max\Big\{\widehat{E}^{(+)}_{s_i}(\eta),\, \widehat{E}^{(-)}_{s_i}(\eta)\Big\}, \quad \text{где} \tag{12}$$

$$\begin{aligned}
\widehat{E}^{(+)}_{s_i}(\eta) &= \sup\Big\{\widehat{z}_i - \big(\widehat{z}_\eta\big)_i : \forall\widehat{z} \in \widehat{\mathcal{D}},\ \widehat{N}_\eta\big[\widehat{z}\big] \leqslant \widehat{\Delta}_\eta,\ \widehat{\Omega}\big[\widehat{z}\big] \leqslant \widehat{R}_\eta\Big\} =\\
&= \inf\Big\{\big(\widehat{z}_\eta\big)_i - \widehat{z}_i : \forall\widehat{z} \in \widehat{\mathcal{D}},\ \widehat{N}_\eta\big[\widehat{z}\big] \leqslant \widehat{\Delta}_\eta,\ \widehat{\Omega}\big[\widehat{z}\big] \leqslant \widehat{R}_\eta\Big\},
\end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}
\widehat{E}^{(-)}_{s_i}(\eta) &= \sup\Big\{\big(\widehat{z}_\eta\big)_i - \widehat{z}_i : \forall\widehat{z} \in \widehat{\mathcal{D}},\ \widehat{N}_\eta\big[\widehat{z}\big] \leqslant \widehat{\Delta}_\eta,\ \widehat{\Omega}\big[\widehat{z}\big] \leqslant \widehat{R}_\eta\Big\} =\\
&= \inf\Big\{\widehat{z}_i - \big(\widehat{z}_\eta\big)_i : \forall\widehat{z} \in \widehat{\mathcal{D}},\ \widehat{N}_\eta\big[\widehat{z}\big] \leqslant \widehat{\Delta}_\eta,\ \widehat{\Omega}\big[\widehat{z}\big] \leqslant \widehat{R}_\eta\}.
\end{aligned} \tag{14}$$

Таким образом, можно сформулировать следующий алгоритм вычисления оценочной функции $\widehat{E}_{s_i}(\eta)$ в заданной точке $s_i \in T$.

Шаг 1. Вычислить число $\widehat{E}^{(+)}_{s_i}(\eta)$, решая задачу (13) минимизации функционала $\big(\widehat{z}_\eta\big)_i - \widehat{z}_i$.

Шаг 2. Вычислить число $\widehat{E}^{(-)}_{s_i}(\eta)$, решая задачу (14) минимизации функционала $\widehat{z}_i - \big(\widehat{z}_\eta\big)_i$.

Шаг 3. Найти величину $\widehat{E}_{s_i}(\eta)$ по формуле (12).

Применив этот алгоритм, можно найти поточечную апостериорную оценку (11).

Можно показать, пользуясь той же методикой, что и в теореме 1, что точные грани в задачах (13) и (14) достигаются на некоторых элементах.

Если $\mathcal{D} = Z(T)$, оператор A_h линеен, а функционал $\Omega[z]$ выпуклый, то задачи на минимум (13) и (14) — это задачи выпуклого программирования. Для их решения можно применить, например, минимизационные модули пакета МАТЛАБ.

6. Поточечная оптимальность регуляризующих алгоритмов. В работах [2, 15–19] развита теория глобально оптимальных (по порядку) регуляризующих алгоритмов. Эта теория была применена для исследования глобально экстраоптимальных РА в работах [7–10]. В данном разделе даются основные положения теории поточечно оптимальных (по порядку) РА, которые будут далее использоваться для построения теории поточечно экстраоптимальных РА.

Вернемся к задаче (1), предполагая выполненными условия А–В. Будем считать, что в линейном пространстве $Z(T)$ задана топология τ поточечной (или равномерной) сходимости. Предположим также, что если уравнение (1) разрешимо при какой-либо правой части, то это решение единственно в существенном. В частности, этим свойством обладает решение $\overline{z}(s) \in \mathcal{D}$, определяемое точными данными (A, u) и имеющее множество Ω-оптимальных значений $\overline{Z} = \overline{Z}(s; A, u)$. Введем специальное множество элементов $M_R = \{z \in \mathcal{D} : \Omega[z] \leqslant R\}$, где $R \geqslant \Omega\big[\,\overline{Z}\,\big]$. Очевидно, что $\overline{Z} \subset M_R$. Из предположения Б следует τ-компактность множества M_R, т.е., по крайней мере, компактность относительно поточечной сходимости функциональных последовательностей из этого множества. Отсюда получается, что функция $b_R(s) = \sup\Big\{\big|z(s)\big| : \forall z \in M_R\Big\}$ конечна при каждом $s \in T$.

Определим специальный класс разрешимых на $\mathcal{D}$ операторных уравнений вида $\overline{A}z = \overline{u},\ z \in \mathcal{D}$. Для этого при фиксированном множестве M_R и при известных приближенных данных задачи (1) $(A_h, u_\delta, h, \delta)$ введем класс $\Sigma_{M_R}(\eta)$ всех задач типа (1) с точными данными $\big(\overline{A}, \overline{u}\big)$, которые имеют единственные в существенном решения $\overline{z}\big(s; \overline{A}, \overline{u}\big)$, принадлежащие множеству M_R, причем выполнено условие аппроксимации

$$\Big|\Big\|A_h\overline{z}\big(s; \overline{A}, \overline{u}\big) - u_\delta\Big\| - \Big\|\overline{A}\overline{z}\big(s; \overline{A}, \overline{u}\big) - \overline{u}\Big\|\Big| = \Big\|A_h\overline{z}\big(s; \overline{A}, \overline{u}\big) - u_\delta\Big\| \leqslant C\big(\delta + \Psi(h, R)\big) \equiv H$$

точных данных $\big(\overline{A}, \overline{u}\big)$ приближенными (A_h, u_δ) на точном решении $\overline{z}\big(s; \overline{A}, \overline{u}\big)$. Обозначим множество Ω-оптимальных значений решения $\overline{z}\big(s; \overline{A}, \overline{u}\big)$ через $\overline{Z}\big(s; \overline{A}, \overline{u}\big)$. Оно однозначно определяется данными $\big(\overline{A}, \overline{u}\big)$ и в точках непрерывности функции $\overline{z}\big(s; \overline{A}, \overline{u}\big)$ состоит из одного числа. Описанный класс $\Sigma_{M_R}(\eta)$ задается аналитически как $\Sigma_{M_R}(\eta) = \Big\{\big(\overline{A}, \overline{u}\big) : \overline{A}\,\overline{Z}\big(s; \overline{A}, \overline{u}\big) = \overline{u},\ \overline{Z}\big(s; \overline{A}, \overline{u}\big) \subset M_R,\ \Big\|A_h\overline{Z}\big(s; \overline{A}, \overline{u}\big) - u_\delta\Big\| \leqslant H\Big\}$.

Множество $\Sigma_{M_R}(\eta)$ не пусто, так как содержит точные данные (A, u) задачи (1). Будем искать приближенное решение $z_\eta(s)$ операторного уравнения (1) с помощью некоторого РА P_η: $z_\eta(s) = P_\eta(s; A_h, u_\delta, \eta)$. Зададим следующую характеристику точности регуляризующего алгоритма P_η в точке $s \in T$:

$$\Delta_s(\eta, P_\eta) = \Delta_s(\eta, P_\eta; A_h, u_\delta; M_R) =$$
$$= \sup\nolimits_{\overline{A}, \overline{u}, \overline{z}}\Big\{\Big|P_\eta(s; A_h, u_\delta, \eta) - \overline{z}\big(s;\, \overline{A},\, \overline{u}\big)\Big| :\ \forall\,\big(\overline{A},\, \overline{u}\big) \in \Sigma_{M_R}(\eta),\ \forall\,\overline{z}\big(s; \overline{A}, \overline{u}\big) \in \overline{Z}\big(s; \overline{A}, \overline{u}\big)\Big\}.$$

Величины $\Delta_s(\eta, P_\eta)$ конечны при каждом $s \in T$, так как для всех элементов $\overline{z}\big(s; \overline{A}, \overline{u}\big) \in M_R$ выполнено неравенство $\Big|\overline{z}\big(s; \overline{A}, \overline{u}\big)\Big| \leqslant b_R(s)$. Используя τ-компактность множества M_R, можно доказать

Утверждение 2. *Если в точках непрерывности единственного в существенном точного решения* $\overline{z}(s; A, u)$ *задачи* (1) *имеется сходимость* $z_\eta(s) = P_\eta(s; A_h, u_\delta, \eta) \to \overline{z}(s; A, u)$ *при* $\eta \to 0$*, то для таких точек* $\Delta_s(\eta, P_\eta; A_h, u_\delta; M_R) \to 0$.

Доказательство для краткости опускается.

Определение 2. Пусть $\mathcal{P} = \{P\}$ — класс всех возможных регуляризующих алгоритмов P для задачи (1). При фиксированном множестве M_R, *оптимальной точностью* приближенного решения этой задачи в точке $s \in T$ будем называть число $\Delta_s^{\rm opt}(\eta) = \Delta_s^{\rm opt}(\eta; A_h, u_\delta; M_R) = \inf\big\{\Delta_s(\eta, P) : \forall P \in \mathcal{P}\big\}$. РА P_η будем называть *поточечно оптимальным по порядку* в точке $s \in T$, если найдется такая константа $k > 0$, что $\Delta_s(\eta, P_\eta; A_h, u_\delta; M_R) \leqslant k\Delta_s^{\rm opt}(\eta; A_h, u_\delta; M_R)$ для любых η, $\|\eta\| < \eta_0 = {\rm const}$, и всяких соответствующих этому η допустимых приближенных данных (A_h, u_δ).

Подчеркнем, что константа k в определении 2 не зависит от s, η, A_h, u_δ и R. По аналогии с теорией глобальных оценок точности из [15] введем поточечные (в точках $s \in T$) оценочные функции

$$\Theta_s(H, R) = \sup\Big\{\Big|\overline{z}\big(s; \overline{A}_1, \overline{u}_1\big) - \overline{z}\big(s; \overline{A}_2, \overline{u}_2\big)\Big| : \forall\,\big(\overline{A}_1, \overline{u}_1\big), \big(\overline{A}_2, \overline{u}_2\big) \in \Sigma_{M_R}(\eta),$$
$$\forall\overline{z}\big(s; \overline{A}_1, \overline{u}_1\big) \in \overline{Z}\big(s; \overline{A}_1, \overline{u}_1\big), \forall\overline{z}\big(s; \overline{A}_2, \overline{u}_2\big) \in \overline{Z}\big(s; \overline{A}_2, \overline{u}_2\big)\Big\},$$
$$\omega_s(t, R) = \sup\Big\{\big|z_1(s) - z_2(s)\big| : \forall z_{1,2} \in M_R,\ \|A_h z_{1,2} - u_\delta\| \leqslant t\Big\}.$$

Они конечны для каждого $s \in T$, так как для всех $z(s) \in M_R$ выполнено неравенство $\big|z(s)\big| \leqslant b_R(s) < \infty$, а все функции, определяющие величины $\Theta_s(H, R)$ и $\omega_s(t, R)$, принадлежат множеству M_R.

Из включения точного решения задачи (1): $\overline{Z} = \overline{Z}(s; A, u) \in M_R$, и вытекающего из условий аппроксимации неравенства $\left\|A_h\overline{z} - u_\delta\right\| \leqslant \delta + \Psi\Big(h, \Omega\big[\,\overline{Z}\,\big]\Big) \leqslant H$ следует, что функция $\omega_s(t, R)$ определена для каждого $s \in T$ по крайней мере при $t \geqslant H$. Следующие две леммы являются аналогами известных утверждений, используемых в теории глобальных оценок точности [2], а также [15, 18].

Лемма 2. *При любом $s \in T$ выполнена оценка $\Delta_s^{\rm opt}(\eta; A_h, u_\delta; M_R) \geqslant \dfrac{1}{2}\,\Theta_s(H, R)$.*

Доказательство. По определению функции $\Theta_s(H, R)$ как точной верхней грани, для каждого $\varepsilon > 0$ найдутся пары $\big(\,\overline{A}_1, \overline{u}_1\big)$, $\big(\,\overline{A}_2, \overline{u}_2\big) \in \Sigma_{M_R}(\eta)$ и значения $\overline{z}\big(s; \overline{A}_1, \overline{u}_1\big) \in \overline{Z}\big(s; \overline{A}_1, \overline{u}_1\big)$, $\overline{z}\big(s; \overline{A}_2, \overline{u}_2\big) \in \overline{Z}\big(s; \overline{A}_2, \overline{u}_2\big)$, такие, что $\Big|\overline{z}\big(s; \overline{A}_1, \overline{u}_1\big) - \overline{z}\big(s; \overline{A}_2, \overline{u}_2\big)\Big| \geqslant \Theta_s(H, R) - \varepsilon$ при данном $s \in T$. Тогда для любого метода $P \in \mathcal{P}$ выполнено неравенство

$$\Delta_s(\eta, P; A_h, u_\delta; M_R) \geqslant \max\bigg\{\Big|P(s; A_h, u_\delta, \eta) - \overline{z}\big(s;\, \overline{A}_1,\, \overline{u}_1\big)\Big|,\ \Big|P(s; A_h, u_\delta, \eta) - \overline{z}\big(s;\, \overline{A}_2,\, \overline{u}_2\big)\Big|\bigg\} \geqslant$$
$$\geqslant \frac{1}{2}\,\Big|\overline{z}\big(s; \overline{A}_1, \overline{u}_1\big) - \overline{z}\big(s; \overline{A}_2, \overline{u}_2\big)\Big| \geqslant \frac{1}{2}\,\Theta_s(H, R) - \varepsilon.$$

Отсюда в силу произвольности метода $P \in \mathcal{P}$ и числа $\varepsilon > 0$ получается доказываемая оценка. Лемма доказана.

Лемма 3. Для всех $s \in T$ выполнено неравенство $\Theta_s(H, R) \geqslant \omega_s(H, R)$.

Доказательство. Так как множество M_R компактно в топологии поточечной (или равномерной) сходимости, то из определения функции $\omega_s(t, R)$ следует, что найдутся элементы z_1, $z_2 \in M_R$, для которых $\|A_h z_{1,2} - u_\delta\| \leqslant H$ и при данном $s \in T$ выполнено равенство $\big|z_1(s) - z_2(s)\big| = \omega_s(H, R)$. Рассмотрим пары (A, u_1), (A, u_2), где $u_{1,2} = Az_{1,2}$. Пары (A, u_1) и (A, u_2) как точные данные уравнений $Az = u_{1,2}$, принадлежат множеству $\Sigma_{M_R}(\eta)$. Действительно, эти уравнения имеют единственные в существенном решения $z_{1,2}$, причем $\|A_h z_{1,2} - u_\delta\| \leqslant H$.

Тогда по определению функции $\Theta_s(H, R)$: $\Theta_s(H, R) \geqslant \big|z_1(s) - z_2(s)\big| = \omega_s(H, R)$. Лемма доказана.

Из приведенных лемм получается

Следствие 1. Для всех $s \in T$ выполнены неравенства $\Delta_s^{\rm opt}(\eta; A_h, u_\delta; M_R) \geqslant \dfrac{1}{2}\,\Theta_s(H, R) \geqslant \dfrac{1}{2}\,\omega_s(H, R)$.

Это следствие и утверждение 2 обеспечивают сходимость $\omega_s(H, R) \to 0$ при $\eta \to 0$, т.е. при $H \to 0$, в точках непрерывности $s \in T$ точного решения задачи (1).

7. Поточечно экстраоптимальные РА. Считаем выполненными предположения раздела 6, полагая, что $R > \Omega\big[\,\overline{Z}\,\big]$. Используем множество ограничений $\mathcal{Z}_\eta = \big\{z \in \mathcal{D} :\ \Omega[z] \leqslant R_\eta,\ \|A_h z - u_\delta\| \leqslant \Delta_\eta\big\}$ из определения (2) функции $E_s(\eta)$ в виде $\mathcal{Z}_\eta = \big\{z \in \mathcal{D} :\ z \in M_{R_\eta},\ \|A_h z - u_\delta\| \leqslant \Delta_\eta\big\}$.

Теорема 3. *Пусть при сделанных предположениях для каждого η, $0 < \|\eta\| \leqslant \eta_0$, выполнены неравенства*

$$R_\eta \leqslant R, \quad \Delta_\eta \leqslant C\big(\delta + \Psi(h, R)\big) \equiv H. \tag{15}$$

Тогда оценочная функция $E_s(\eta)$ имеет при каждом $s \in T$ оптимальный порядок точности, а именно $E_s(\eta) \leqslant 2\Delta_s^{\rm opt}(\eta; A_h, u_\delta; M_R)$.

Доказательство. Рассмотрим неравенства (15). Первое неравенство означает, что $z_\eta \in M_R$, а второе — что $\|A_h z_\eta - u_\delta\| \leqslant \Delta_\eta \leqslant C\big(\delta + \Psi(h, R)\big) = H$. Поэтому

$$\begin{aligned} E_s(\eta) &= \sup_z\Big\{\big|z(s) - z_\eta(s)\big| :\ z \in M_{R_\eta},\ \|A_h z - u_\delta\| \leqslant \Delta_\eta\Big\} \leqslant \\ &\leqslant \sup_z\Big\{\big|z(s) - z_\eta(s)\big| :\ z \in M_R,\ \|A_h z - u_\delta\| \leqslant H\Big\} \leqslant \\ &\leqslant \sup_{z_1, z_2}\Big\{\big|z_1(s) - z_2(s)\big| :\ z_{1,2} \in M_R,\ \|A_h z_{1,2} - u_\delta\| \leqslant H\Big\} = \omega_s(H, R). \end{aligned} \tag{16}$$

Отсюда и из следствия 1 получается, что $E_s(\eta) \leqslant 2\Delta_s^{\rm opt}(\eta; A_h, u_\delta; M_R)$. Что и требовалось доказать.

Замечание 4. Условия (15) выполнены для любого РА, приближенные решения которого удовлетворяют (хотя бы при достаточно малых h, δ) неравенствам

$$\Omega[z_\eta] \leqslant \Omega\big[\overline{z}\big], \quad \|A_h z_\eta - u_\delta\| \leqslant C\Big(\delta + \Psi\big(h, \Omega[z_\eta]\big)\Big). \tag{17}$$

Рассмотрим пример такого регуляризующего алгоритма. Будем искать единственное решение $\overline{z} = \overline{z}(A, u)$ линейного уравнения (1) в гильбертовом пространстве Z по приближенным данным (A_h, u_δ), считая, что

$\Psi = h\Omega[z]$, и предполагая выполнение условий А и Б. Кроме того, предположим, что функционал $\Omega[z]$ является строго выпуклым в Z и $\Omega[z] \geqslant \Omega[0]$ для всех $z \in Z$. Применим метод регуляризации Тихонова со сглаживающим функционалом вида

$$M^\alpha[z] = \alpha\Omega[z] + \|A_h z - u_\delta\|_U^2, \quad z \in Z. \tag{18}$$

При сформулированных условиях функционал (18) будет иметь для каждого $\alpha > 0$ единственную экстремаль z^α, реализующую его минимум в Z. Выберем параметр $\alpha = \alpha_\eta$ по одному из вариантов обобщенного принципа невязки (ОПН), а именно из условия $\left\|A_h z^{\alpha_\eta} - u_\delta\right\|_U = \delta + h\Omega\left[z^{\alpha_\eta}\right]$. Возможность такого выбора для η, $0 < \|\eta\| \leqslant \eta_0$, при условии $\overline{z} \neq 0$ обоснована в [2, 6]. Зададим приближенное решение в виде $z_\eta = z^{\alpha_\eta}$. Условие выбора параметра α_η сразу обеспечивает выполнение второго неравенства из (17) при $0 < \|\eta\| \leqslant \eta_0$. Из этого же условия и соотношения

$$\begin{aligned}\alpha_\eta\Omega[z_\eta] + \big(\delta + h\Omega[z_\eta]\big)^2 &= \alpha_\eta\Omega[z_\eta] + \|A_h z_\eta - u_\delta\|_U^2 = M^{\alpha_\eta}[z_\eta] \leqslant M^{\alpha_\eta}\left[\overline{z}\right] = \\ &= \alpha_\eta\Omega\left[\overline{z}\right] + \left\|A_h\overline{z} - u_\delta\right\|^2 \leqslant \alpha_\eta\Omega\left[\overline{z}\right] + \Big(\delta + h\Omega\left[\overline{z}\right]\Big)^2\end{aligned}$$

следует, что $\Omega[z_\eta] \leqslant \Omega\left[\overline{z}\right]$ при любых η, $0 < \|\eta\| \leqslant \eta_0$, т.е. выполнено первое неравенство из (17). Аналогичные рассуждения верны и для выбора параметра регуляризации по обобщенному принципу сглаживающего функционала, а также при использовании обобщенного метода невязки и некоторых других алгоритмов из [2, 6].

Определение 3. Регуляризующий алгоритм $z_\eta(s) = P_\eta(s; A_h, u_\delta, \eta)$ называется *поточечно экстраоптимальным* (на M_R) *для точек s из заданного множества* T_0, $T_0 \subset T$, если апостериорная оценка его точности — функция $E_s(\eta)$ вида (2) — является оптимальной по порядку при каждом $s \in T_0$, т.е. найдется определяемая этим алгоритмом константа $k_0 > 0$, такая, что $E_s(\eta) \leqslant k_0\Delta_s^{\text{opt}}(\eta; A_h, u_\delta; M_R)$ для всех $s \in T_0$ (хотя бы при достаточно малых $\|\eta\|$). Если $T_0 = T$, то будем называть такой РА коротко — *поточечно экстраоптимальным.*

Из теоремы 3 и замечания 4 ясно, что достаточным условием поточечной экстраоптимальности регуляризующего алгоритма является выполнение неравенств (17). Из замечания 4 следует также, что примером поточечно экстраоптимального РА является метод регуляризации Тихонова с выбором α по (обобщенному) принципу невязки. Отметим следствие определений 2, 3 и неравенства (2): на множестве M_R любой поточечно экстраоптимальный РА поточечно оптимален по порядку при всех $s \in T$. Обратное, вообще говоря, неверно: не всякий поточечно оптимальный по порядку для множества T_0, $T_0 \subset T$, точек s регуляризующий алгоритм будет поточечно экстраоптимальным на T_0. Чтобы привести соответствующий пример, рассмотрим более детально связь понятий поточечной экстраоптимальности и поточечной оптимальности по порядку для задач (1) с линейным и точно заданным оператором A (т.е. при $\eta = \delta$) и с непрерывными решениями $\overline{z}(s)$. Примем здесь обозначения $R_\eta = R_\delta$, $\Delta_\eta = \Delta_\delta$, $\Delta_s^{\text{opt}}(\eta; A_h, u_\delta; M_R) = \Delta_s^{\text{opt}}(\delta; u_\delta; M_R)$.

Лемма 4. *Справедливы неравенства*

$$\frac{1}{2}\,\frac{\omega_s(\Delta_\delta, R_\delta)}{\omega_s(2\delta, R)} \leqslant \frac{E_s(\delta)}{\Delta_s^{\text{opt}}(\delta; u_\delta; M_R)} \leqslant 4\,\frac{\omega_s(\Delta_\delta, R_\delta)}{\omega_s(2\delta, R)}\,. \tag{19}$$

Доказательство. Из определения функции $\omega_s(t, R_\delta)$ и τ-компактности множества $M_{R_\delta} \subset M_R$ следует, что найдутся функции $z_1(s)$, $z_2(s) \in M_{R_\delta}$, для которых справедливы соотношения $\omega_s(\Delta_\delta, R_\delta) = \left|z_1(s) - z_2(s)\right|$ и $\|A_h z_{1,2} - u_\delta\| \leqslant \Delta_\delta$. Тогда

$$\begin{aligned}E_s(\delta) &= \sup\Big\{\left|z(s) - z_\delta(s)\right| : \forall z \in M_{R_\delta},\ \|A_h z - u_\delta\| \leqslant \Delta_\delta\Big\} \geqslant \\ &\geqslant \max\Big\{\left|z_1(s) - z_\delta(s)\right|,\ \left|z_2(s) - z_\delta(s)\right|\Big\} \geqslant \frac{1}{2}\left|z_1(s) - z_2(s)\right| = \frac{1}{2}\,\omega_s(\Delta_\delta, R_\delta).\end{aligned}$$

Кроме того, $E_s(\delta) \leqslant \sup_{z_1, z_2}\Big\{\left|z_1(s) - z_2(s)\right| : z_{1,2} \in M_{R_\delta},\ \|Az_{1,2} - u_\delta\| \leqslant \Delta_\delta\Big\} = \omega_s(\Delta_\delta, R_\delta)$. Поэтому

$$\frac{1}{2}\,\omega_s(\Delta_\delta, R_\delta) \leqslant E_s(\delta) \leqslant \omega_s(\Delta_\delta, R_\delta). \tag{20}$$

Рассуждения, аналогичные приведенным в [18], дают

$$\frac{1}{4}\,\omega_s(2\delta, R) \leqslant \Delta_s^{\text{opt}}(\delta; u_\delta; M_R) \leqslant \omega_s(2\delta, R). \tag{21}$$

Из соотношений (20), (21) вытекает оценка (19). Что и требовалось доказать.

Используя (19), можно получить следующую теорему.

Теорема 4. *Для того чтобы регуляризующий алгоритм решения линейной задачи* (1) *с точно заданным оператором A был поточечно экстраоптимальным в точках $s \in T_0$, необходимо и достаточно существование такой константы $k_1 > 0$, не зависящей от s, что*

$$\frac{\omega_s(\Delta_\delta, R_\delta)}{\omega_s(2\delta, R)} \leqslant k_1 \quad \forall s \in T_0;\ \forall \delta:\ 0 < \delta \leqslant \delta_0 = \text{const}. \tag{22}$$

Из теоремы 4 следует, что поточечно оптимальный по порядку РА не будет экстраоптимальным, если $\lim\limits_{\delta \to 0} \dfrac{\omega_s(\Delta_\delta, R_\delta)}{\omega_s(2\delta, R)} = \infty$ хотя бы в одной точке s. Приведем пример, когда это реализуется.

Пример. *Задача, для которой тихоновский алгоритм с априорным выбором $\alpha(\delta)$, будучи оптимальным по порядку в некоторой точке, не будет экстраоптимальным в этой точке.*

Предположим, что $Z = U = \{z(s) \in L_2[0,1] : z'(0) = z'(1) = 0\}$. Зададим в этом подпространстве гильбертова пространства $L_2[0,1]$ ортонормированный базис $\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty} = \{\gamma_k \cos \pi k s\}_{k=0}^{\infty}$, где γ_k — нормирующие коэффициенты. Тогда разложения $z(s) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} z_k \varphi_k(s)$, $u(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} u_k \varphi_k(x)$ справедливы для элементов $z \in Z$, $u \in U$. Введем линейный самосопряженный оператор $A : Z \to U$ по формуле $Az = \sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k z_k \varphi_k(x)$, где $0 < q = \text{const} < 1$, и определим $\mathcal{D} = \{z = Av : \forall v \in Z,\ \|v\| \leqslant r = C\|A\|^{-1}\}$, $C > 1$. Рассмотрим операторное уравнение (1) с таким оператором A и правой частью $u = \varphi_0(x) = 1$. Оно имеет единственное непрерывное решение $\overline{z} = \varphi_0(s) = 1$. Зададим приближенную правую часть уравнения (1): $u_n = \varphi_0(x) - q^n \varphi_n(x)$, так что $\delta_n = q^n$. Применим для нахождения приближенного решения задачи (1) метод регуляризации Тихонова с $\Omega[z] = \|z\|_{L_2}^2$:

$$z^\alpha = (\alpha E + A^* A)^{-1} A^* u_n = z_0^\alpha \varphi_0(s) + z_n^\alpha \varphi_n(s); \quad z_0^\alpha = \frac{1}{1+\alpha}, \quad z_n^\alpha = \frac{-q^{2n}}{\alpha + q^{2n}}. \tag{23}$$

Можно убедиться, что $\mathcal{D} \subset C[0,1]$ и для такого $\Omega[z]$ выполнены условия А и Б с топологией равномерной сходимости. Выберем $\alpha = \alpha_n = \sqrt{\delta_n} = q^{n/2}$. Такой выбор параметра обеспечивает оптимальный порядок точности на множестве $M_R = \{z \in \mathcal{D} :\ \|z\|_{L_2[0,1]} \leqslant R\}$, $R = \|A\| r = C$, $R > \|\overline{z}\| = 1$, для приближенного решения в точке $s = 0$. Действительно, при $n \to \infty$

$$\left|z^{\alpha_n}(0) - \overline{z}(0)\right| = \left|z_0^{\alpha_n}\varphi_0(0) + z_n^{\alpha_n}\varphi_n(0) - \varphi_0(0)\right| = \frac{\alpha_n}{1+\alpha_n} + \frac{q^{2n}}{\alpha_n + q^{2n}} \sim \alpha_n = \sqrt{\delta_n}, \tag{24}$$

а из методики оценок работы [20] следует, что $\Delta_{s=0}^{\text{opt}}(\delta_n; u_{\delta_n}; M_R) \asymp \omega_{s=0}(\delta_n, R) \asymp \sqrt{\delta_n R}$. Используя (23), можно также вычислить, что при $n \to \infty$

$$\left\|Az^{\alpha_n} - u_n\right\|_{L_2} = \Delta_{\delta_n} \asymp q^{n/2} = \sqrt{\delta_n}. \tag{25}$$

Убедимся, принимая во внимание соотношение (25) и сходимость $R_{\delta_n} = C\left\|z^{\alpha_n}\right\| \to C\left\|\overline{z}\right\| = C = R$, что условие (22) не выполнено:

$$\lim_{\delta_n \to 0} \frac{\omega_{s=0}(\Delta_{\delta_n}, R_{\delta_n})}{\omega_{s=0}(2\delta_n, R)} = \lim_{\delta_n \to 0} \sqrt{\frac{\Delta_{\delta_n} R_{\delta_n}}{2\delta_n R}} = \lim_{n \to \infty} \sqrt{\frac{q^{n/2}}{2q^n}} = \infty.$$

Таким образом, рассматриваемый РА не может быть поточечно экстраоптимальным.

8. Численные эксперименты.

8.1. Модельная задача 1 — оценка точности гладкого решения. Рассмотрим линейное интегральное уравнение первого рода

$$Az = \int\limits_{-1}^{1} \frac{z(s)\, dx}{1 + 100(s-x)^2} = u(x), \quad x \in [-1,1], \tag{26}$$

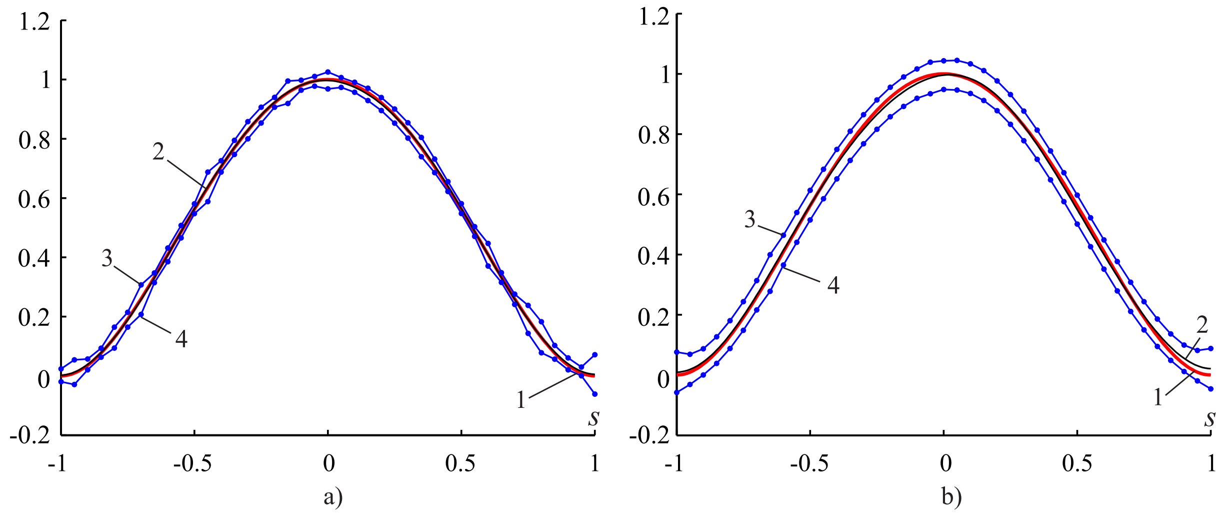

Рис. 1. Точное решение задачи 1 (линия 1), приближенное решение (линия 2) — иногда графически близко к точному решению, коридор ошибок в избранных точках (линии с точками 3 и 4): a) $\delta = 0.01$; b) $\delta = 0.03$

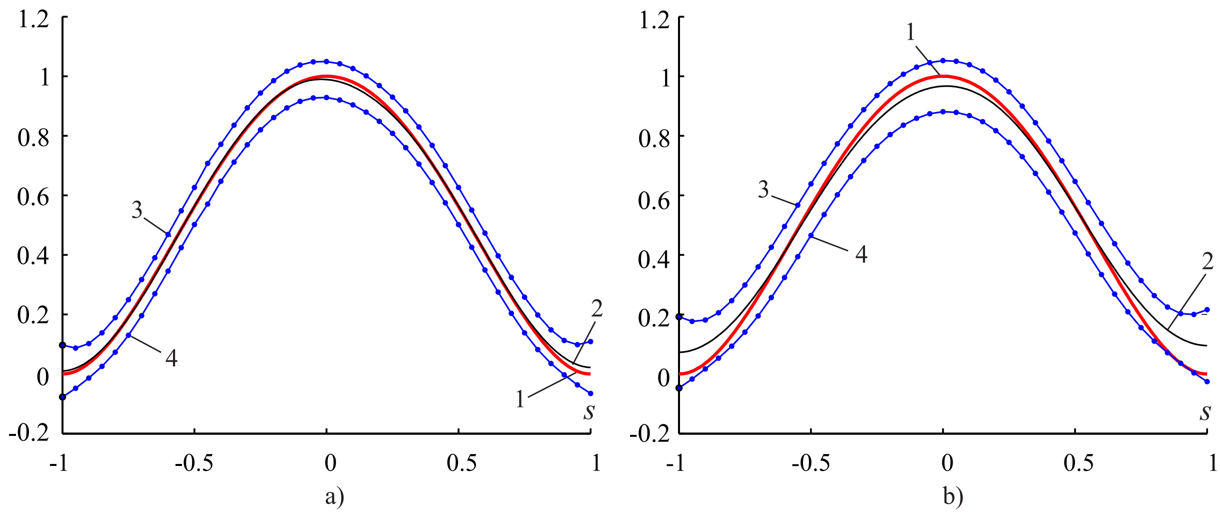

Рис. 2. Точное решение задачи 1 (линия 1), приближенное решение (линия 2) — иногда графически близко к точному решению, коридор ошибок в избранных точках (линии с точками 3 и 4): a) $\delta = 0.05$; b) $\delta = 0.09$

с точным решением $\overline{z}(s) = \left(1 - s^2\right)^2 \in W_2^1[-1,1]$. Считаем $Z = U = L_2[-1,1]$, $\mathcal{D} = W_2^1[-1,1]$ и будем использовать регуляризатор $\Omega[z] = \|z\|^2_{W_2^1[-1,1]}$. Вычислим по решению $\overline{z}(s)$ правую часть уравнения $u(x)$ и наложим на нее аддитивную нормально распределенную помеху с нулевым средним так, чтобы приближенная правая часть u_δ имела относительная ошибку $\dfrac{\|u_\delta - u\|_{L_2[-1,1]}}{\|u\|_{L_2[-1,1]}} = \delta$. После дискретизации задачи на равномерных сетках $\left\{x_i = s_i = -1 + \dfrac{2(i-1)}{N-1}\,,\ i = 1, \dots, N\right\}$ с шагом $h = \dfrac{2}{N-1}$ по x, s для $N = 201$ и аппроксимации оператора A по формуле трапеций, решим полученную систему линейных уравнений с приближенными (сеточными) данными $\widehat{A} = \left[\dfrac{h}{1 + 100(x_i - s_j)^2}\right]$, $\dim \widehat{A} = N \times N$; $\widehat{u} = \left[u_\delta(x_i)\right]$, $\dim \widehat{u} = N \times 1$, по методу регуляризации Тихонова. Параметр регуляризации выберем по обобщенному принципу невязки [2].

Оценим точность конечномерного приближенного решения $\widehat{z}_\eta = \left\{\widehat{z}_\eta(s_j)\right\}_{j=1}^N$, используя алгоритм из раздела 5 для избранных точек сетки с номерами из некоторого множества $\mathcal{M} \subset \{1, 2, \dots, N\}$.

На рис. 1 и 2 изображены точное решение задачи 1, приближенные решения для различных значений δ и полученные в избранных точках сетки ($\dim \mathcal{M} = 41$) апостериорные оценки точности в виде коридоров

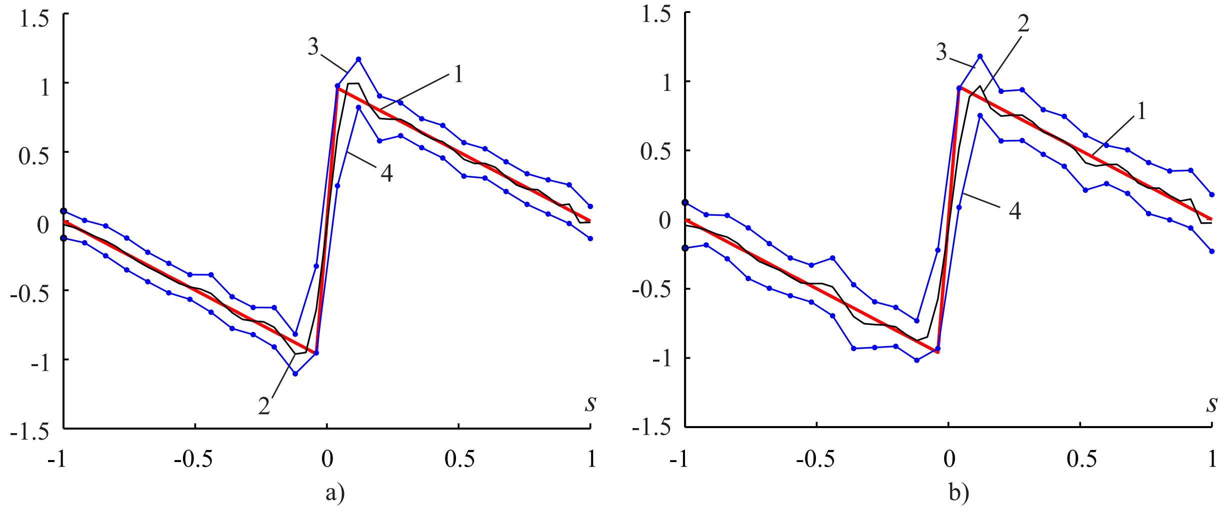

Рис. 3. Точное решение задачи 2 (линия 1), приближенное решение (линия 2) — иногда графически близко к точному решению, коридор ошибок в избранных точках (линии с точками 3 и 4): a) $\delta = 0.01$; b) $\delta = 0.03$

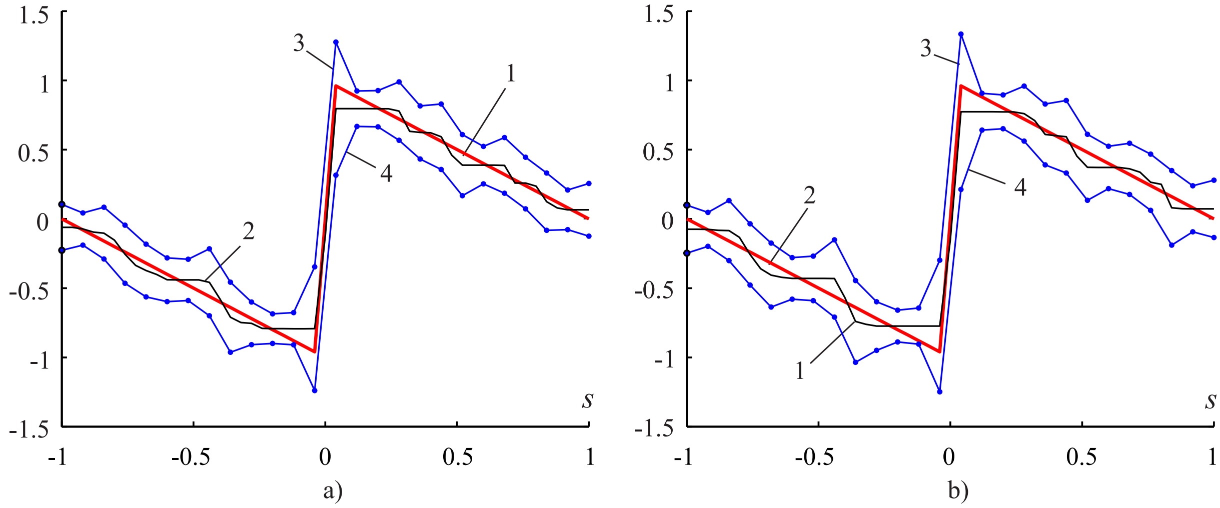

Рис. 4. Точное решение задачи 2 (линия 1), приближенное решение (линия 2) — иногда графически близко к точному решению, коридор ошибок в избранных точках (линии с точками 3 и 4): a) $\delta = 0.05$; b) $\delta = 0.07$

ошибок $\left[\widehat{z}_\eta(s_i) - \widehat{E}_{s_i}(\eta),\ \widehat{z}_\eta(s_i) + \widehat{E}_{s_i}(\eta)\right]$ для всех $i \in \mathcal{M}$.

8.2. Модельная задача 2 — оценка точности разрывного решения. Рассмотрим снова уравнение (26), предполагая, однако, что $\mathcal{D} = V[-1,1]$ — банахово пространство функций ограниченной вариации на отрезке $[-1,1]$, а точное решение имеет вид $\overline{z}(s) = \operatorname{sign}(s)\bigl(1 - |s|\bigr) \in V[-1,1]$.

Для нахождения приближенного решения используем метод регуляризации Тихонова с функционалом $\Omega[z] = \|z\|_{V[-1,1]} = \bigl|z(-1)\bigr| + \bigl|z(1)\bigr| + \bigvee_{-1}^{1}(z)$, в котором $\bigvee_{-1}^{1}(z)$ — вариация функции на $[-1,1]$. Тогда $\overline{z}(s)$ будет единственным в существенном Ω-оптимальным решением задачи [2]. Применим ту же сеточную аппроксимацию, что и в модельной задаче 1, и заменим функционал $\Omega[z]$ на его сглаженный конечномерный аналог $\widehat{\Omega}_\varkappa\bigl[\widehat{z}\bigr] = f_\varkappa(z_1) + f_\varkappa(z_N) + \sum\limits_{j=1}^{N-1} f_\varkappa(z_{j+1} - z_j)$, где $f_\varkappa(t) = \sqrt{t^2 + (\varkappa/N)^2}$ с "достаточно малым" параметром $\varkappa > 0$. В расчетах принималось $\varkappa = 10^{-6}$. Тогда метод регуляризации в дискретном виде сводится к минимизации конечномерного функционала Тихонова вида $M^\alpha\bigl[\widehat{z}\bigr] = \alpha\widehat{\Omega}_\varkappa\bigl[\widehat{z}\bigr] + \bigl\|\widehat{A}\widehat{z} - \widehat{u}\bigr\|_E^2$. Будем снова выбирать параметр регуляризации по обобщенному принципу невязки. Обоснование такого подхода и описание процедур минимизации можно найти в [6]. Оценим точность полученного конечномерного приближенного решения $\widehat{z}_\eta$, используя алгоритм из раздела 5 с заменой в нем функционала $\widehat{\Omega}\bigl[\widehat{z}\bigr]$

на $\widehat{\Omega}_{\varkappa}\big[\widehat{z}\big]$.

Результаты оценки точности показаны на рис. 3 и 4. Видно, что точное решение попадает в найденный коридор ошибок около приближенного решения.

8.3. Модельная задача 3. Теперь рассмотрим двумерную обратную задачу — хорошо известную задачу продолжения трехмерного потенциального поля $v(x_1,x_2,x_3)$, создаваемого источниками, которые лежат в полупространстве $x_3<0$ [1]. В этой задаче требуется по функции $u(x_1,x_2)=v(x_1,x_2,\nu)$ на плоскости $x_3=\nu$ найти функцию $\overline{z}(x_1,x_2)=v(x_1,x_2,\zeta)$ на плоскости $x_3=\zeta$ при условии $0<\zeta<\nu$. Функции $\overline{z}(x_1,x_2)$ и $u(x_1,x_2)$ связаны равенством $A\overline{z}=u$. Здесь

$$A\overline{z}=\frac{\nu-\zeta}{2\pi}\iint\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\overline{z}(s_1,s_2)\,ds_1\,ds_2}{\big[(x_1-s_1)^2+(x_2-s_2)^2+(\nu-\zeta)^2\big]^{3/2}}\equiv T_{\nu-\zeta}\overline{z}. \tag{27}$$

Оператор $A=T_{\nu-\zeta}$ непрерывен из $Z=L_2\big(\mathbb{R}^2\big)$ в $U=L_2\big(\mathbb{R}^2\big)$ и инъективен [21]. Кроме того [21, 22],

$$\overline{z}=T_{\zeta}\overline{w}=\frac{\zeta}{2\pi}\iint\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\overline{w}(\xi_1,\xi_2)\,d\xi_1\,d\xi_2}{\big[(s_1-\xi_1)^2+(s_2-\xi_2)^2+\zeta^2\big]^{3/2}}\,, \tag{28}$$

где функция $\overline{w}\in L_2\big(\mathbb{R}^2\big)$ — решение уравнения $\dfrac{\nu}{2\pi}\displaystyle\iint\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\overline{w}(\xi_1,\xi_2)\,d\xi_1\,d\xi_2}{\big[(x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2+\nu^2\big]^{3/2}}=u(x_1,x_2)$. Будем считать, что $\overline{z}(s_1,s_2)\in W_2^2\big(\mathbb{R}^2\big)=\mathcal{D}$, т.е. $\overline{z}\in C\big(\mathbb{R}^2\big)$. Пусть правая часть $u(x_1,x_2)$ уравнения $A\overline{z}=u$ известна с ошибкой δ, т.е. задана функция u_δ, такая, что $\|u_\delta-u\|_{L_2(\mathbb{R}^2)}\leqslant\delta$. Применим для решения этого уравнения с данными $\{A,u_\delta,\delta\}$ один из вариантов метода регуляризации Тихонова (18) со стабилизирующим функционалом $\Omega[z]=\dfrac{1}{2}\,\|z\|^2_{W_2^2}=\dfrac{1}{2}\,\big(\|z\|^2_{L_2}+\|\Delta z\|^2_{L_2}\big)$, где Δ — двумерный оператор Лапласа. Метод сводится к нахождению решения $z=z_\delta^\alpha$ операторного уравнения второго рода

$$\Big[\alpha\big(E+\Delta^2\big)+A^*A\Big]z=A^*u_\delta \tag{29}$$

с выбором параметра регуляризации $\alpha=\alpha(\delta)$ как корня уравнения $B(\alpha)\equiv\big\|Az_\delta^\alpha-u_\delta\big\|=\tilde{C}\delta$, $\tilde{C}=\mathrm{const}\geqslant 1$, т.е. по принципу невязки [14]. В итоге, приближенное решение имеет вид $z_\delta=z_\delta^{\alpha(\delta)}(s)$.

С вычислительной точки зрения, метод регуляризации Тихонова удобно применять здесь в спектральной форме [23, 8, 10]. Для этого введем двумерное преобразование Фурье $F[z](\omega)$ функции $z(s_1,s_2)$, в котором $\omega=(\omega_1,\omega_2)$. Решение уравнения (29) с интегральным оператором типа свертки (27) записывается в виде $z_\delta^\alpha(s_1,s_2)=F^{-1}\Big\{F\big[z_\delta^\alpha\big](\omega)\Big\}(s_1,s_2)$, где

$$F[z_\delta^\alpha](\omega)=\frac{F^*[K](\omega)F[u_\delta](\omega)}{\alpha r^2(\omega)+\big|F[K](\omega)\big|^2}\,, \tag{30}$$

$K=K(x_1,x_2)=\dfrac{\nu-\zeta}{2\pi}\,\big[(x_1)^2+(x_2)^2+(\nu-\zeta)^2\big]^{-3/2}$ является ядром интегрального оператора (27), $F^*[\cdot]\,(\omega)$ — комплексное сопряжение преобразования Фурье $F[\cdot]\,(\omega)$, $F^{-1}[\cdot](s_1,s_2)$ — двумерное обратное преобразование Фурье, $r(\omega)=\sqrt{1+\big(\omega_1^2+\omega_2^2\big)^2}$. Используя теорему Планшереля, можно выписать функционалы $\|Az-u_\delta\|_{L_2}=\dfrac{1}{2\pi}\,\big\|F[K](\omega)F[z](\omega)-F[u_\delta](\omega)\big\|_{L_2}$, $\Omega[z]=\dfrac{1}{2}\,\|z\|^2_{W_2^2}=\dfrac{1}{8\pi^2}\,\big\|r^2(\omega)F[z](\omega)\big\|^2_{L_2}$, используемые при выборе параметра регуляризации и в алгоритме из раздела 5 вычисления апостериорной оценки $E_s(\eta)$. Процедуру вычисления регуляризованного решения (30) и оценки точности приближенного решения $z_\delta^{\alpha(\delta)}(s)$ можно записать в дискретной форме. Для этого применим стандартную методику конечномерной аппроксимации, которая подробно описана, например, в [23] и использует двумерную равномерную сетку $\widehat{x}=\widehat{x}_1\times\widehat{x}_2=\big\{(x_{1i},x_{2j})\big\}$, $i,j=0,1,\ldots,N-1$, с шагами Δx_1, Δx_2, заданную в области $\Pi=[0,a_1]\times[0,a_2]$ (или иногда в $\Pi=[-a_1,a_1]\times[-a_2,a_2]$) при "достаточно больших" $a_{1,2}>0$. Спектральная переменная ω заменяется тогда на $\widehat{\omega}=\widehat{\omega}_1\times\widehat{\omega}_2=\big\{(\omega_{1i},\omega_{2j})\big\}$, где $\widehat{\omega}_1=\widehat{x}_1=\{x_{1i}\}_{i=0}^{N-1}$, $\widehat{\omega}_2=\widehat{x}_2=\{x_{2j}\}_{j=0}^{N-1}$. В приведенных выше вычислительных формулах функции двух переменных K, z, u_δ заменяются на матрицы $\widehat{K}=\big[K(x_{1i},x_{2j})\Delta x_1\Delta x_2\big]$, $\widehat{z}=\big[z(x_{1i},x_{2j})\big]$, $\widehat{u}=\big[u(x_{1i},x_{2j})\big]$; $i,\,j=0,1,\ldots,N-1$,

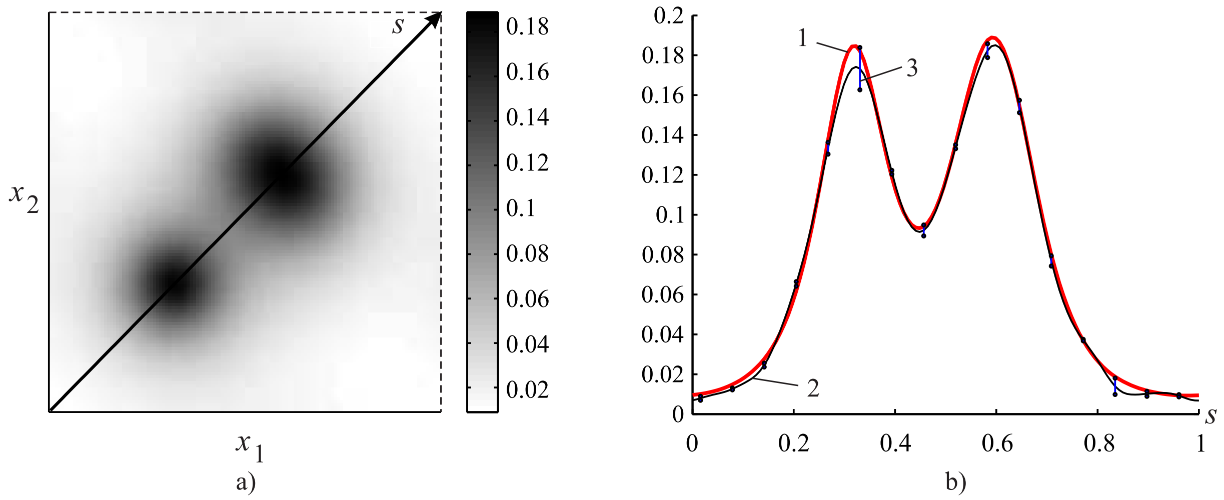

Рис. 5. Точное решение двумерной обратной задачи (27) и линия, на которой оценивается точность (a). Сужение точного решения (линия 1), сужение приближенного решения (линия 2) и коридор ошибок в избранных точках для $\overline{\delta} = 0.01$ (вертикальные отрезки 3) (b)

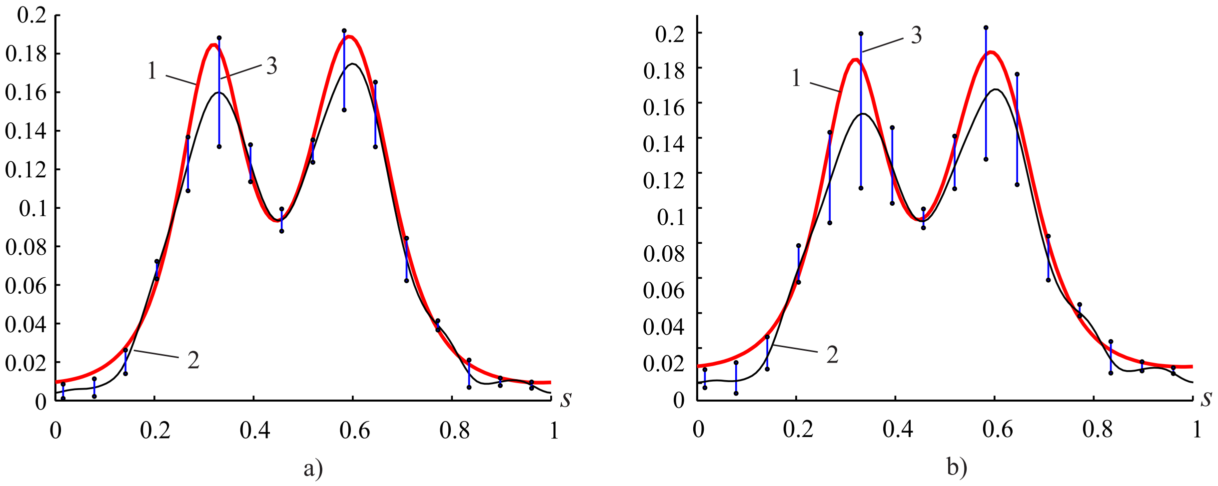

Рис. 6. Сужение точного решения (линия 1), сужение приближенного решения (линия 2) и коридор ошибок в избранных точках (вертикальные отрезки 3):
a) $\overline{\delta} = 0.05$, b) $\overline{\delta} = 0.09$

символы преобразования Фурье $F[K](\omega)$, $F[z](\omega)$, $F[u_\delta](\omega)$ заменяются на символы двумерного дискретного преобразования Фурье $\widehat{F}(\widehat{K})$, $\widehat{F}(\widehat{z})$, $\widehat{F}(\widehat{u})$, а множители $\dfrac{1}{2\pi}$ заменяются на $\dfrac{1}{N}$.

Такой подход был применен для решения уравнения $A\overline{z} = u$ при $\zeta = 0.15$, $\nu = 0.25$ с точным решением $\overline{z}(x_1, x_2)$, вычисляемым по формуле (28) для функции источника $\overline{w}(\xi_1, \xi_2) = 20\chi(T_1) + \chi(T_2)$. Здесь множества T_1, T_2 задаются как $T_1 = \big\{(x_1, x_2) : (x_1 - 0.32)^2 + (x_2 - 0.32)^2 < 0.0004\big\}$, $T_2 = \big\{(x_1, x_2) : (x_1 - 0.6)^2 + (x_1 - 0.6)(x_2 - 0.6) + (x_2 - 0.6)^2 < 0.01\big\}$, а $\chi(\cdot)$ есть характеристическая функция множества. Вид точного решения в области $\Pi = [0, 1] \times [0, 1]$ представлен на рис. 5a. По этому решению с помощью вытекающей из (27) формулы $u = F^{-1}\Big\{F[K](\omega)F\big[\overline{z}\big](\omega)\Big\}$ вычислялась функция $u(x_1, x_2)$ — модельная точная правая часть уравнения $A\overline{z} = u$. Расчеты велись на сетках $\widehat{x} = \widehat{\omega}$ с $N = 512$. Затем функция $u(x_1, x_2)$ возмущалась нормально распределенной случайной ошибкой так, что полученная приближенная правая часть уравнения $u_\delta(x_1, x_2)$ удовлетворяла неравенству $\|u - u_\delta\|_{L_2(\Pi)} \|u_\delta\|^{-1}_{L_2(\Pi)} \leqslant \overline{\delta}$, где число $\overline{\delta}$ есть уровень относительной ошибки приближенных данных $u_\delta(x_1, x_2)$ задачи. Обратная задача нахождения функции $\overline{z}(x_1, x_2)$ по функции $u_\delta(x_1, x_2)$ решалась на сетках $\widehat{x} = \widehat{\omega}$ с $N = 128$ для различных уровней погрешности данных $\overline{\delta}$. Затем производилось поточечное оценивание точности полученного приближенного решения с использованием алгоритма из раздела 5.

Оценки вычислялись для точек (x_1, x_2), лежащих на отрезке прямой $\mathcal{L}$, который отмечен слева на рис. 5 жирной линией. Результаты решения обратной задачи и оценки его точности отображены на рис. 5 (справа) и рис. 6. На этих рисунках жирной линией изображено сужение точного решения $\overline{z}(x_1, x_2)$ на отрезок $\mathcal{L}$. Тонкая линия представляет аналогичное сужение $\widehat{z}_\eta(s),\ s \in \mathcal{L}$, полученного двумерного приближенного решения. Координаты точек s отнесены к длине отрезка $\mathcal{L}$. Вертикальные отрезки с точками изображают "коридор ошибок" $\left[\widehat{z}_\eta(s_i) - \widehat{E}_{s_i}(\eta),\, \widehat{z}_\eta(s_i) + \widehat{E}_{s_i}(\eta)\right]$ для избранных точек $s_i \in \mathcal{L}$.

Приведенные численные примеры показывают достаточную эффективность предлагаемой процедуры поточечного апостериорного оценивания точности решений некорректно поставленных обратных задач.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979.
2. *Тихонов А.Н., Леонов А.С., Ягола А.Г.* Нелинейные некорректные задачи. М.: Наука, 1995.
3. *Гапоненко Ю.Л., Винокуров В.А.* Апостериорные оценки решения некорректных обратных задач // Доклады АН СССР. 1982. **263**, № 2. 277–280.
4. *Дорофеев К.Ю., Титаренко В.Н., Ягола А.Г.* Алгоритмы построения апостериорных оценок погрешностей для некорректных задач // ЖВМ и МФ. 2003. **43**, № 1. 12–25.
5. *Ягола А.Г., Николаева Н.Н., Титаренко В.Н.* Оценка погрешности решения уравнения Абеля на множествах монотонных и выпуклых функций // Сиб. ЖВМ. 2003. **6**, № 2. 171–180.
6. *Леонов А.С.* Решение некорректно поставленных обратных задач. Очерк теории, практические алгоритмы и демонстрации в МАТЛАБ. М.: Книжный дом "ЛИБРОКОМ", 2009.
7. *Леонов А.С.* Об апостериорных оценках точности решения линейных некорректно поставленных задач и экстраоптимальных регуляризующих алгоритмах // Вычислительные методы и программирование. 2010. **11**, № 1. 14–24.
8. *Леонов А.С.* Экстраоптимальные апостериорные оценки точности решения некорректных задач продолжения потенциальных геофизических полей // Физика Земли. 2011. № 6. 69–78.
9. *Леонов А.С.* Апостериорные оценки точности решения некорректно поставленных обратных задач и экстраоптимальные регуляризующие алгоритмы их решения // Сиб. ЖВМ. 2012. **15**, № 1. 85–102.
10. *Leonov A.S.* Extra-optimal methods for solving ill-posed problems // J. of Inverse and Ill-posed Problems. **20**, Issue 5–6. 637–665.
11. *Бакушинский А.Б.* Апостериорные оценки точности для приближенных решений нерегулярных операторных уравнений // Доклады РАН. 2011. **437**, № 4. 439–440.
12. *Bakushinsky A.B., Smirnova A., Liu Hui.* A posteriori error analysis for unstable models // J. of Inverse and Ill-posed Problems. 2012. **20**, Issue 4. 411–428.
13. *Korolev Yu.M., Yagola A.G.* On inverse problems in partially ordered spaces with a priori information // J. of Inverse and Ill-posed Problems. 2012. **20**, Issue 4. 567–573.
14. *Морозов В.А.* Регулярные методы решения некорректно поставленных задач. М.: Наука, 1987.
15. *Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П.* Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978.
16. *Танана В.П.* Методы решения операторных уравнений. М.: Наука, 1981.
17. *Вайникко Г.М.* Методы решения линейных некорректно поставленных задач в гильбертовых пространствах. Тарту: Изд-во ТГУ, 1982.
18. *Танана В.П., Рекант М.А., Янченко С.И.* Оптимизация методов решения операторных уравнений. Свердловск: Изд-во Уральского ун-та, 1987.
19. *Бакушинский А.Б., Гончарский А.В.* Итеративные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1989.
20. *Иванов В.Л., Королюк Т.И.* Об оценке погрешностей при решении линейных некорректно поставленных задач // ЖВМ и МФ. 1969. **9**, № 1. 30–41.
21. *Хилл Э.* Функциональный анализ и полугруппы. М.: ИЛ, 1951.
22. *Леонов А.С.* Численная реализация специальных регуляризующих алгоритмов для решения одного класса некорректных задач с истокообразно представимыми решениями // Сиб. ЖВМ. 2001. **4**, № 3. 269–280.
23. *Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г.* Численные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1990.

Поступила в редакцию
12.03.2013