УДК 519.6

ПРИВЕДЕННЫЙ МЕТОД ЛИНЕАРИЗАЦИИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НЕЛИНЕЙНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

С. В. Панфёров[1]

Предлагается подход к решению задачи оптимизации с ограничениями. Описывается алгоритм, использующий синтез таких методов, как разделение переменных, редукция размерности, сведение основной задачи к вспомогательной. Формулируются условия применимости алгоритма и теорема о линейной сходимости метода.

Ключевые слова: задачи нелинейной оптимизации, метод линеаризации, линейные ограничения, метод приведенного градиента, линейная сходимость.

1. Постановка задачи. Среди оптимизационных задач исследования операций одно из центральных мест занимают нелинейные задачи с ограничениями:

$$f(x) \to \min, \quad x \in X.$$

Рассматриваемая в настоящей статье задача характеризуется тем, что допустимое множество представлено в виде пересечения двух множеств, одно из которых задано системой нелинейных уравнений, а другое системой линейных ограничений (для простоты будем считать, что в формировании допустимого множества участвуют только линейные ограничения-неравенства):

$$\begin{aligned} &f(x) \to \min, \quad x \in X, \quad X = X_1 \cap X_2, \\ &X_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : g_i(x) = 0, \ \ i = 1,\ 2, \ldots,\ m\}, \\ &X_2 = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leqslant b\}, \ \ A = a_{ij} \in \mathbb{R}_{k\times n}, \ \ b = b_{ij} \in \mathbb{R}_{k\times 1}, \ \ m < n, \ \ k < n. \end{aligned}$$

Такого рода оптимизационные задачи возникают в различных областях человеческой деятельности, включая инженерию, экономику и химию.

Будем считать, что функции $f(x)$ и $g_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ дважды непрерывно дифференцируемы на множестве X, удовлетворяют условию Липшица и для всех $x \in X$ векторы $\nabla g_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ линейно независимы.

Множество точек, удовлетворяющих необходимым условиям оптимальности первого порядка

$$X_{\text{stat}} = \{x \in X \mid \forall x' \in X, \ \ \langle \nabla f(x),\ x' - x\rangle \geqslant 0\}$$

в исходной задаче, будем называть множеством стационарных точек.

Нашей задачей является построение эффективного вычислительного алгоритма для отыскания стационарных точек рассмотренного класса задач нелинейной оптимизации [1]. В дополнение к условиям гладкости мы потребуем от нашей задачи классических условий регулярности [2].

Предположение 1. Для всех $x \geqslant f_{\text{opt}}$ существуют $k > 0$ и $\eta > 0$, такие, что

$$\rho(x, X_{\text{stat}}) \leqslant k\|x - \pi_X(x - \nabla f(x))\|;$$

$$\forall x \in X \ \ : \ \ f(x) \leqslant \nu; \ \ \|x - \pi_X(x - \nabla f(x))\| \leqslant \eta.$$

Предположение 2. Для всех $\nu \geqslant f_{\text{opt}}$ множество

$$f(\{x \in X_{\text{stat}} \mid f(x) \leqslant \nu\}) \subset \mathbb{R}^1$$

является конечным.

[1] Международный университет природы, общества и человека "Дубна", Моск. обл., Талдомский район, 141980, г. Дубна; доцент, e-mail: svp74@bk.ru

В настоящей статье предлагается алгоритм “последовательных приближений”, генерирующий очередную $(n+1)$-ю итерацию как оптимальное решение линейной вспомогательной задачи, являющейся аппроксимацией исходной задачи в окрестности точки x^n.

2. Построение вспомогательной задачи. Рассмотрим допустимую точку x^k исходной задачи и построим задачу линейной оптимизации редуцированной размерности, которая впоследствии будет использована при построении алгоритма оптимизации.

Пусть $e = (e_1,\ e_2,\ \dots\ ,\ e_n)$ — ортонормированный базис пространства $\mathbb{R}^n$. Через $I = (i_1,\ i_2,\ \dots\ ,\ i_{n-m})$ обозначим набор индексов $i_1,\ i_2,\ \dots,\ i_{n-m}$, таких, что

$$1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_{n-m} \leqslant n.$$

Через

$$I_n^{n-m} = \{I = (i_1,\ i_2,\ \dots,\ i_{n-m}) : 1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_{n-m} \leqslant n\}$$

обозначим множество всех таких наборов.

Пусть $E(I) = \mathrm{Lin}(e_{i_1},\ e_{i_2},\ \dots\ ,\ e_{i_{n-m}})$ — подпространство в $\mathbb{R}^n$, образованное базисными векторами $e_{i_1},\ e_{i_2},\ \dots\ ,\ e_{i_{n-m}}$.

Рассмотрим k-ю итерацию алгоритма. Сначала строится касательное подпространство $N(x^k)$ размерности $n-m$ к множеству ограничений X_1 и выбирается координатное подпространство $E(I)$ той же размерности $n-m$. Через $E(I)^{\perp}$ обозначим ортогональное дополнение к $E(i)$.

Аналогично алгоритмам с исключением переменных координат происходит разбиение переменной x^k на пару переменных $(y^k,\ z^k)$ следующим образом: $x^k = y^k + z^k$, $y^k \in E(I)^{\perp}$, $z^k \in E(I)$. Функция $y^k = \varphi(z^k)$ определяется как решение системы нелинейных уравнений.

В условиях теоремы о неявных функциях [4] в окрестности точки x^k определена приведенная целевая функция $y = \varphi(z)$ — решение системы нелинейных уравнений

$$g(x) = g(y, z) = 0.$$

Следовательно, определена приведенная целевая функция исходной задачи $F(z) = f(\varphi(z), z)$.

Более того, в окрестности точки x^k допустимые точки системы нелинейных ограничений-неравенств $g(x) = g(y, z) = 0$ могут быть аппроксимированы линейным подпространством:

$$X = x_0\ +\ (Dh,\ h),\ \|h\| \leqslant r.$$

Здесь матрица D определяется следующим образом: $D = -\nabla_Y g(x) \nabla_Z g(x_0)$.

Далее сформулируем вспомогательную оптимизационную задачу $\mathrm{Lp}(x^k)$ размерности $n-m$:

$$\langle \nabla F(z),\ h \rangle \to \min, \quad A(Dh,\ h) + Ax_0 \leqslant b, \quad \|h\| \leqslant r.$$

В качестве нормы $\|\cdot\|$ будем рассматривать произвольную полиэдральную норму.

Сформулируем теперь основной алгоритм.

Алгоритм SLP

Пусть k — номер итерации и μ_k — номер подзадачи, которую мы решаем на k-й итерации. Введем параметры $\delta > 0$, $r_* > 0$ и $0 < \theta < 1$. Пусть $z^1 \in Z$.

Шаг 0. Положим $k := 0$, $r_k := r_*$, $k_{\text{stop}} := \infty$.

Шаг 1. Положим $k := k+1$, $\mu := 1$, $r := r_{k-1}$. В точке x^k выполняем разделение переменных $x = (y,\ z)$ (как это было рассмотрено выше) и строим вспомогательную задачу $\mathrm{Lp}(x^k)$. Решая задачу $\mathrm{LP}(z^k,\ r)$, получим значение $h_*(x^k,\ r) \in H(x^k,\ r)$.

Далее строим вспомогательную аппроксимацию

$$\bar{x}^k = (\bar{y}^k,\ z^k + h_*(x^k,\ z_k)),$$

где $\bar{y}^k = \varphi(z^k\ +\ h_*(x^k,\ r))$ находится методом Ньютона из уравнения

$$g(y,\ z^k + h_*(x^k,\ z^k)) = 0.$$

Положим $\nu_*(x^k,\ r) = \langle \nabla F(z^k),\ h_*(x^k,\ r) \rangle$ и

$$\nu := \begin{cases} \ \ 0 & \text{if } \nu_*(z^k,\ r) = \langle \nabla F(z^k),\ h_*(z^k,\ r) \rangle = 0, \\ -1 & \text{if } \nu_*(z^k,\ r) \neq 0 \text{ and } f(x^k) - f(\overline{x^k}) \geqslant \delta\, r^2/2, \\ \ \ 1 & \text{if } \nu_*(z^k,\ r) \neq 0 \text{ and } f(x^k) - f(\overline{x^k}) < \delta\, r^2/2. \end{cases}$$

Если $\nu = 0$, то переходим к шагу 5.

Шаг 2. Положим $\mu := \mu + 1$, $r := r\theta$. Решая задачу $\mathrm{LP}(z^k,\ r)$, получим решение $h_*(z^k,\ r) \in H(z^k,\ r)$.

Шаг 3. Если $\nu = -1$ и $F(z^k) - F(z^k + h_*(z^k,\ r)) < \delta\, r^2/2$ или $\nu = 1$ и $F(z^k) - F(z^k + h_*(z^k,\ r)) \geqslant \delta\, r^2/2$, то переходим к шагу 4, иначе к шагу 2.

Шаг 4. Если $\nu = -1$, то полагаем $r_k = \theta r$, иначе $r_k = r$. Положим $\mu_k = \mu$ и $z^{k+1} = z^k + h_*(z^k,\ r_k)$. Перейти к шагу 1.

Шаг 5. Положим $\mu_k := 1$, $k_{\mathrm{stop}} = k$, $x^{k_{\mathrm{stop}}} = x^k$. Конец работы алгоритма.

Отметим, что на шаге 1 параметр ν может принимать одно из трех значений. Если $\nu = 0$, то стационарная точка может быть найдена и алгоритм завершает свою работу. Если $\nu = 1$, то необходимо уменьшение параметра шага r. Если $\nu = -1$, то необходимо увеличение параметра шага r. Алгоритм останавливается на том номере итерации, на котором достигается необходимое для сходимости отклонение от оптимального решения.

3. Теорема о сходимости. Обоснование замены касательной плоскости координатной той же размерности обеспечивают различные оценки косинуса угла между этими подпространствами [3, 5]: для любого $N(x^k)$ найдется $E(I)$, такое, что

$$\cos\varphi = \cos(N(x^k), \quad E(i)) \geqslant \frac{1}{\sqrt{m(n-m)+1}}.$$

Отметим, что введенная величина $\cos\varphi = \cos(N(x^k),\ E(i))$ является числовой характеристикой качества разделения переменных. С ее помощью получаем оценки норм градиента и гессиана приведенной целевой функции, необходимые для доказательства сходимости метода:

$$\|\nabla F(z^k)\| \leqslant \frac{1}{\cos\varphi}\,\|\nabla f(x)\|, \quad \|\nabla^2 F(z^k)\| \leqslant \frac{1}{\cos^2\varphi}\,\frac{\rho_{\max}\nabla^2 L(x,\ \lambda)}{\rho_{\min}\nabla^2 L(x,\ \lambda)},$$

где $\rho_{\max}$ и $\rho_{\min}$ — наибольшее и наименьшее сингулярные числа матрицы вторых производных функции Лагранжа задачи

$$f(x) \to \min, \quad x \in X.$$

Из полученных выше результатов следует следующая теорема о сходимости.

Терема. *Пусть выполнены Предположения 1 и 2, тогда каждая бесконечная последовательность итераций алгоритма сходится к точке $x^* \in X_{\mathrm{stat}}$. Более того, для всех $\nu \geqslant f_{\mathrm{opt}}$ существуют q_1, q_2, $0 \leqslant q_1, q_2 < 1$, такие, что для любой бесконечной последовательности $\{x^k\}$, у которой $f(x^1) \leqslant \nu$, справедливы следующие оценки*:

$$\lim_{k\to\infty}\sup\frac{f(x^{k+1}) - f(x^*)}{f(x^k) - f(x^*)} \leqslant q_1,$$

$$\lim_{k\to\infty}\sup q_2^{-k}\rho(x^k,\ X_{\mathrm{stat}}) < \infty.$$

Всякая же конечная последовательность итераций алгоритма останавливается в стационарной точке $x^{k_{\mathrm{stop}}} \in X_{\mathrm{stat}}$.

Автор благодарит профессора С.К. Завриева за помощь в подготовке этой работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ferris M.C., Zavriev S.K.* The linear convergence of a successive linear programming algorithm. Technical Report 96-112. Computer Sciences Department, University of Wisconsin. Madison, 1996.
2. *Bertsecas D.P.* Nonlinear Programming. Belmont: Athena Scientific, 1995.
3. *Goreinov S.A., Tyrtyshnikov E.E., Zamarashkin N.L.* A theory of pseudoskeleton approximations // Linear Algebra and its Applications. 1997. N 261. 1–21.
4. *Сухарев А.Г., Тимохов А.В., Федоров В.В.* Курс методов оптимизации. М.: Физматлит, 2005.
5. *Панферов С.В.* Гарантированная оценка угла между касательной и координатной плоскостью // Прикладная математика и информатика. Вып. 8. М.: МАКС Пресс, 2001. 154–158.

Поступила в редакцию
18.08.2012