

УДК 519.6

## ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ И СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ СКВОЗНОГО СЧЕТА ПОВЫШЕННОГО ПОРЯДКА

А. В. Сафронов<sup>1</sup>

Представлены результаты исследования реального порядка точности известных численных методов сквозного счета разрывных решений гиперболических законов сохранения. Подход основан на определении сходимости численных расчетов задач, имеющих решения различного порядка дифференцируемости. Проанализирован широкий класс разностных схем от первого до пятого порядков по разложению в ряд Тейлора. Дается ряд рекомендаций по применению схем повышенного порядка.

**Ключевые слова:** гиперболические законы сохранения, TVD-ограничители, метод Рунге–Кутты, задача Римана, метод Годунова, схема третьего порядка.

**Введение.** В настоящее время для сквозного расчета разрывных решений гиперболических систем законов сохранения широко применяются численные схемы повышенного порядка аппроксимации на основе принципа невозрастания полной вариации решения, или TVD-схемы (Total-Variation-Diminishing) [1]. Для повышения порядка численного метода применяются полиномиальные реконструкции параметров к границам ячеек сетки с определенными ограничениями или локальными изменениями коэффициентов соответствующих полиномов, для того чтобы численные решения удовлетворяли условию TVD. Современный обзор этого подхода можно найти, например, в работе [2]. Основными достоинствами TVD-схем является отсутствие нефизических осцилляций на разрывах и выполнение условия неубывания энтропии. Однако порядок точности разностной схемы при наличии разрывов самих решений и их производных не соответствует ее классическому порядку аппроксимации по тейлоровскому разложению на гладких решениях, поэтому определение реальной точности разностных схем при расчете разрывов представляет собой проблему. В настоящей статье с целью оценки точности разностных схем применяется метод, основанный на экспериментальном определении сходимости численных расчетов к точным решениям исходной задачи согласно подходу С. К. Годунова и В. С. Рябенского. Представлены результаты экспериментальных оценок точности известных численных схем и их анализ.

**1. Постановка задачи.** Рассматривается численное и аналитическое решение следующей модельной дифференциальной краевой задачи:

$$U_t + U_x = 0, \quad U(x, 0) = V(x), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < t_0 < 1. \quad (1)$$

Данная задача имеет точное решение  $U(x, t) = V(x - t_0)$ .

Задача (1) решается также численно с помощью известных разностных схем. Определение порядка точности или сходимости  $q$  разностных схем имеет вид  $D = \|U_m - V_m\| \leq Ch^q$  при  $h \rightarrow 0$ , где  $U_m$  — численное решение в узлах сетки,  $V_m$  — проекция точного решения на сетку,  $C$  — константа ( $C > 0$ ),  $h$  — шаг разностной сетки.

Заметим, что на достаточно гладких решениях, когда порядок дифференцируемости решения больше порядка аппроксимации разностной схемы по разложению в ряд Тейлора, порядок точности совпадает с порядком аппроксимации схемы по тейлоровскому разложению.

Положим следующую норму:  $D_N = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^{m=M} |U_m - V_m|$ ,  $M = 100 \times 2^N$ . Здесь  $M$  — число узлов сетки, которое удваивается при последовательном возрастании  $N$ :  $N = 0, 1, 2, \dots$

Шаг разностной сетки  $h = 1/M$  и норма  $D_N \approx 2^{-Nq}$ . Отсюда сходимость находится с помощью вычислений нормы  $D$  на последовательности сеток:  $q = \frac{\log(D_{N-1}/D_N)}{\log(2)}$ ,  $N \geq 1$ .

Численные расчеты проводятся до значений параметра  $N$ , при которых величина  $q$  практически не зависит от шага сетки; этим достигается “сходимость по сетке”.

<sup>1</sup> Центральный научно-исследовательский институт машиностроения (ЦНИИМаш), ул. Пионерская, д. 4, Московская область, 141070, г. Королев; нач. лаборатории, e-mail: avsafron@gmail.com

Величина сходимости  $q = 1$  при расчете скачков означает, что разрыв “размазывается” на постоянное число ячеек при сгущении сетки или распространение разрыва с течением времени не приводит к увеличению его “размазывания”. Очевидно, что при сквозном счете скачков следует ожидать  $q \leq 1$ . Для схем первого порядка теоретическое значение  $q = 0.5$ .

В настоящей статье приняты четыре варианта функции  $V(x)$ :

$$\begin{aligned} \text{а) } V(x) &= \begin{cases} 1 & \text{при } z < 1, \\ 0 & \text{при } z \geq 1, \end{cases} \\ \text{б) } V(x) &= \begin{cases} 1 - z & \text{при } z < 1, \\ 0 & \text{при } z \geq 1, \end{cases} \\ \text{в) } V(x) &= \begin{cases} 1 - 3z^2 + 2z^3 & \text{при } z < 1, \\ 0 & \text{при } z \geq 1, \end{cases} \\ \text{г) } V(x) &= \begin{cases} 1 - 10z^3 + 15z^4 - 6z^5 & \text{при } z < 1, \\ 0 & \text{при } z \geq 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь  $z = 10|x - 0.2|$ .

В случае исходных данных (2а) имеется разрыв самой функции, а в случаях (2б), (2в) и (2г) — разрывы 1-й, 2-й и 3-й производных при гладкой функции и младших производных соответственно.

**2. Численные методы.** Разностная аппроксимация уравнения (1) представляется в виде

$$U_m^{n+1} = U_m^n - \sigma(U_{m+1/2}^n - U_{m-1/2}^n), \quad (3)$$

где  $n$  — номер шага по времени с интервалом  $\Delta t$ ,  $\sigma = \frac{\Delta t}{h}$  — число Куранта,  $U_{m+1/2}$  — аппроксимация переменной  $U$  на границе ячеек разностной сетки.

Определение полной вариации дискретной функции имеет вид  $TV^n = \sum_m |U_{m+1}^n - U_m^n|$ . Численная схема, удовлетворяющая свойству  $TV^{n+1} \leq TV^n$ , называется TVD-схемой [1].

В дальнейшем обозначение переменной  $U$  без верхнего индекса соответствует ее величине на  $n$ -м временном слое и под порядком аппроксимации подразумевается порядок по тейлоровскому разложению.

В настоящей работе проанализированы следующие аппроксимации на границе ячеек сетки  $U_{m+1/2}$  с помощью известных численных методов различного порядка:

$$U_{m+1/2} = U_m, \quad (4)$$

$$U_{m+1/2} = U_m + 0.5f_m(U_m - U_{m-1}), \quad (5)$$

$$U_{m+1/2} = U_m + 0.5(1 - \sigma)f_m(U_m - U_{m-1}). \quad (6)$$

В соотношениях (5) и (6) берется функция  $f_m = f(r)$ , в которой параметр  $r$  имеет вид  $r = \frac{U_{m+1} - U_m}{U_m - U_{m-1}}$ .

Разностная схема (3), (4) представляет метод Годунова [3] первого порядка аппроксимации. Эта схема монотонна и устойчива при числе Куранта  $CFL < 1$ . Здесь, следует отметить, TVD-условие является более слабым, чем требование монотонности схемы, и монотонные схемы удовлетворяют TVD-условию.

Численный метод (3), (6) при  $f(r) = r$ ,  $\frac{1+r}{2}$  представляет классические схемы Лакса–Вендрофа (LxW), Бима–Уорминга (BW) и Фромма соответственно. Как известно, эти схемы второго порядка не удовлетворяют условию TVD (рис. 1), что приводит к нефизическим осцилляциям на разрывах, которые затрудняют расчеты и требуют применения процедур сглаживания решения.

Область изменения функции  $f(r)$ , соответствующая второму порядку аппроксимации и условию TVD, представлена на рис. 1 (затененная) по данным работы [4].

В настоящей статье рассматривается следующий набор наиболее характерных TVD-ограничителей:

$$f(r) = \max [0, \min (r, 1)], \quad (7)$$

$$f(r) = \max [0, \min (2r, 1), \min (r, 2)], \quad (8)$$

$$f(r) = \max [0, \min (2r, kr + 1 = k, 2)], \quad k = \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}. \quad (9)$$

Здесь (7) — монотонный ограничитель minmod (Harten, 1983), (8) — SuperBee (Roe, 1986), (9) — параметрический  $k$ -limiter, где  $k = \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{2}{3}$ , отвечает MC (van Leer, 1997), QUICK (квадратичная интерполяция) и Koren (Koren, 1993) ограничителям соответственно.

Из рис. 1 следует, что область TVD-схем второго порядка аппроксимации находится между ограничителями minmod и SuperBee, причем  $k$ -limiter при  $0 \leq k \leq 1$  входит в эту область.

Отметим, что TVD-ограничитель Корена (Koren) единственный имеет третий порядок аппроксимации по переменной при  $f(r) = \frac{2r}{3} + \frac{1}{3}$  на рассматриваемом трехточечном шаблоне вычисления  $U_{m+1/2}$ .

Разностная схема (3), (5) с ограничителем minmod представляет метод Колгана [5], в котором впервые применен принцип минимальных производных для разработки монотонной схемы повышенного порядка, что оказалось по существу основополагающим [6] для теории TVD-схем. Схема Колгана устойчива при числе Куранта CFL < 0.5.

Численная схема (3), (6) с различными TVD-ограничителями представляет методы предиктор-корректор второго порядка аппроксимации (ПК2) MUSCL-Hancock Method (1985) [2, 6] и Родионова [7]. Схема ПК2 устойчива при числе Куранта CFL < 1.0.

В работе рассматриваются также схемы Рунге–Кутты 2-го, 3-го и 4-го порядков интегрирования по времени согласно [8]. Введем обозначение:

$$L_m(U^*) = -\sigma(U_{m+1/2}^* - U_{m-1/2}^*). \tag{10}$$

Далее величины  $U$  и  $L$  без нижнего индекса относятся к параметрам в ячейке сетки “ $m$ ”. Схема Рунге–Кутты 2-го порядка по времени (RK2) имеет вид:

$$\begin{aligned} U^{(1)} &= U^n + \Delta t L(U^n), \\ U^{n+1} &= \frac{1}{2} U^n + \frac{1}{2} U^{(1)} + \frac{1}{2} \Delta t L(U^{(1)}). \end{aligned} \tag{11}$$

Схема Рунге–Кутты 3-го порядка по времени (RK3) имеет вид:

$$\begin{aligned} U^{(1)} &= U^n + \Delta t L(U^n), \\ U^{(2)} &= \frac{3}{4} U^n + \frac{1}{4} U^{(1)} + \frac{1}{4} \Delta t L(U^{(1)}), \\ U^{n+1} &= \frac{1}{3} U^n + \frac{2}{3} U^{(2)} + \frac{2}{3} \Delta t L(U^{(2)}). \end{aligned} \tag{12}$$

Схемы RK2 (11) и RK3 (12) отвечают TVD-условию в случае применения TVD-ограничителей при вычислении параметров на границе ячеек в (10) и устойчивы при числе Куранта CFL < 1 [4].

В рассмотрение включены также схемы Рунге–Кутты 4-го порядка (RK4) по времени и WENO-реконструкция параметров на границе ячеек сетки пятого (WENO5) порядка по пространству, описание которых приведено в работах [8, 9]. Схема RK4 WENO5 устойчива при числе Куранта CFL <  $\frac{2}{3}$  [9].

Практически схемы Рунге–Кутты состоят из соответствующих шагов по схеме Колгана с применением различных ограничителей или способов реконструкции при аппроксимации параметров на границе ячеек сетки в вычислениях (10) и поэтому легко обобщаются на случай гиперболических систем уравнений.

При численном решении систем нелинейных гиперболических уравнений TVD-реконструкция проводится справа и слева к границе ячейки разностной сетки, после чего определяется аппроксимация параметров на границе ячеек сетки на основе решения модельной задачи о распаде разрыва. Такой подход трактуется как TVD-схемы повышенного порядка типа Годунова. Для численного решения уравнений газодинамики в работе [10] предложены экономичные и энтропийно обоснованные приближенные методы решения задачи о распаде разрыва.

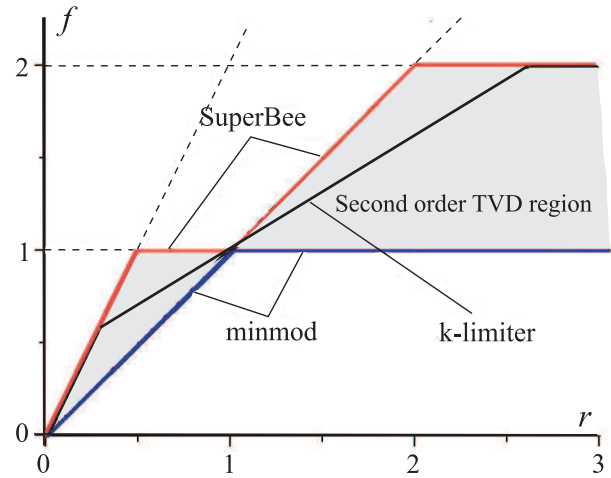


Рис. 1. Диаграмма Sweby

**3. Результаты.** С помощью изложенных численных схем и TVD-ограничителей проведены расчеты задачи (1) с набором решений различного порядка дифференцируемости (2) при значениях чисел Куранта  $CFL = 0.5$  и  $CFL = 0.1$ . Время решения  $t_0 = 0.5$ .

Результаты численных решений задач с разрывами на основе описанных разностных методов приведены во многих работах, поэтому ниже представлены только новые данные по экспериментальному определению порядка точности в рассматриваемой постановке.

Анализируется 21 численная схема. Результаты расчетов при  $N = 5$  представлены в табл. 1 и 2. В столбцах этих таблиц под общим названием “дифференцируемость решения” приведены результаты расчетов точности и нормы  $D_5$ , соответствующие вариантам исходных функции (2). Данные расчетов порядка сходимости отображены также на рис. 2 и 3.

Таблица 1

CFL = 0.5

№	Разностная схема	Дифференцируемость решения							
		разрыв функции (2а)		разрыв 1-ой производной (2б)		разрыв 2-ой производной (2в)		разрыв 3-ей производной (2г)	
		$D_5$	$q$	$D_5$	$q$	$D_5$	$q$	$D_5$	$q$
1	Годунов	$1.41 \times 10^{-02}$	0.500	$1.56 \times 10^{-03}$	1.000	$2.31 \times 10^{-03}$	0.977	$2.84 \times 10^{-03}$	0.957
2	LxW	$7.53 \times 10^{-03}$	0.599	$2.03 \times 10^{-04}$	1.279	$2.38 \times 10^{-05}$	1.934	$2.79 \times 10^{-05}$	1.989
3	BW	$7.53 \times 10^{-03}$	0.599	$2.03 \times 10^{-04}$	1.279	$2.38 \times 10^{-05}$	1.934	$2.79 \times 10^{-05}$	1.989
4	Колган minmod	$3.13 \times 10^{-04}$	1.000	$1.56 \times 10^{-03}$	1.001	$2.33 \times 10^{-03}$	1.012	$2.89 \times 10^{-03}$	1.042
5	ПК2 minmod	$4.01 \times 10^{-03}$	0.659	$1.59 \times 10^{-04}$	1.321	$3.53 \times 10^{-05}$	1.881	$2.70 \times 10^{-05}$	1.961
6	ПК2 MC	$1.76 \times 10^{-03}$	0.754	$3.11 \times 10^{-05}$	1.550	$1.00 \times 10^{-06}$	2.389	$3.85 \times 10^{-07}$	2.835
7	ПК2 QUICK	$2.63 \times 10^{-03}$	0.666	$7.49 \times 10^{-05}$	1.314	$1.47 \times 10^{-05}$	1.924	$1.41 \times 10^{-05}$	2.001
8	ПК2 Koren	$2.30 \times 10^{-03}$	0.677	$5.60 \times 10^{-05}$	1.354	$9.96 \times 10^{-06}$	1.944	$9.39 \times 10^{-06}$	2.002
9	ПК2 SuperBee	$5.48 \times 10^{-04}$	1.000	$3.50 \times 10^{-05}$	1.494	$2.47 \times 10^{-05}$	1.869	$2.82 \times 10^{-05}$	1.997
10	RK2 minmod	$5.17 \times 10^{-03}$	0.661	$2.48 \times 10^{-04}$	1.324	$7.01 \times 10^{-05}$	1.862	$5.43 \times 10^{-05}$	1.980
11	RK2 MC	$3.28 \times 10^{-03}$	0.659	$1.06 \times 10^{-04}$	1.296	$2.72 \times 10^{-05}$	1.899	$2.81 \times 10^{-05}$	1.996
12	RK2 QUICK	$1.82 \times 10^{-03}$	0.771	$3.80 \times 10^{-05}$	1.582	$1.57 \times 10^{-06}$	2.489	$4.03 \times 10^{-07}$	2.883
13	RK2 Koren	$2.27 \times 10^{-03}$	0.684	$5.17 \times 10^{-05}$	1.395	$9.46 \times 10^{-06}$	1.949	$9.38 \times 10^{-06}$	1.999
14	RK2 SuperBee	$5.62 \times 10^{-04}$	1.000	$2.52 \times 10^{-04}$	1.259	$9.99 \times 10^{-05}$	1.763	$6.77 \times 10^{-05}$	2.104
15	RK3 WENO5	$1.27 \times 10^{-03}$	0.812	$1.13 \times 10^{-05}$	1.629	$1.01 \times 10^{-07}$	2.561	$4.93 \times 10^{-08}$	2.891
16	RK3 minmod	$5.11 \times 10^{-03}$	0.660	$2.50 \times 10^{-04}$	1.321	$6.88 \times 10^{-05}$	1.873	$5.38 \times 10^{-05}$	1.963
17	RK3 MC	$2.85 \times 10^{-03}$	0.670	$7.59 \times 10^{-05}$	1.329	$1.84 \times 10^{-05}$	1.914	$1.87 \times 10^{-05}$	1.999
18	RK3 QUICK	$2.40 \times 10^{-03}$	0.704	$6.27 \times 10^{-05}$	1.396	$1.05 \times 10^{-05}$	1.966	$9.42 \times 10^{-06}$	2.008
19	RK3 Koren	$2.07 \times 10^{-03}$	0.755	$4.05 \times 10^{-05}$	1.512	$1.16 \times 10^{-06}$	2.381	$6.85 \times 10^{-07}$	2.785
20	RK3 SuperBee	$5.52 \times 10^{-04}$	1.000	$7.87 \times 10^{-05}$	1.076	$4.72 \times 10^{-05}$	1.830	$5.64 \times 10^{-05}$	1.992
21	RK4 WENO5	$1.18 \times 10^{-03}$	0.839	$1.02 \times 10^{-05}$	1.663	$1.29 \times 10^{-07}$	2.606	$1.21 \times 10^{-08}$	3.706

Как можно видеть, схема первого порядка (№ 1) в случае разрыва решения (2а) имеет экспериментальную точность  $q = 0.500$ . Эта величина вполне объясняется схемной вязкостью в дифференциальном приближении этой схемы. При получении решения непрерывной функции, имеющей разрывы производных, по схеме первого порядка порядок точности близок к 1.0, что соответствует ее порядку аппроксимации.

Немонотонные схемы второго порядка LxW и BW (№ 2 и № 3) при расчете разрывов функции имеют точность  $q = 0.599$ . В случае непрерывности самой функции и ее первой производной, но при наличии разрывов второй производной и выше ((2в), (2г)), степень точности этих схем близка к 2 в соответствии с их порядком аппроксимации.

Схема Колгана (№ 4) при  $CFL = 0.5$  реализует порядок точности, близкий к 1 во всех рассматриваемых случаях, включая разрыв функции (табл. 1). В случае  $CFL = 0.1$  порядок точности схемы Колгана при расчете скачка составляет 0.855, а в расчетах непрерывной функции с разрывами производных сходимость близка к 1.

Ограничитель SuperBee для схем ПК2, RK2 и RK3 (№ 9, № 14, № 20) в расчете разрыва функции (2а) независимо от значения числа Куранта реализует предельное значение точности на скачке  $q = 1.0$ .

Проведем анализ численных схем ПК2 (№№ 5–9) и RK2 (№№ 10–14). Как можно видеть, степень точности данных схем зависит как от ограничителей антидиффузии, так и от числа Куранта.

Таблица 2

CFL = 0.1

№	Разностная схема	Дифференцируемость решения							
		разрыв функции (2а)		разрыв 1-ой производной (2б)		разрыв 2-ой производной (2в)		разрыв 3-ей производной (2г)	
		$D_5$	$q$	$D_5$	$q$	$D_5$	$q$	$D_5$	$q$
1	Годунов	$1.89 \times 10^{-02}$	0.5	$2.81 \times 10^{-03}$	0.999	$4.10 \times 10^{-03}$	0.958	$4.99 \times 10^{-03}$	0.927
2	LxW	$1.14 \times 10^{-02}$	0.609	$3.03 \times 10^{-04}$	1.284	$3.24 \times 10^{-05}$	1.934	$3.69 \times 10^{-05}$	1.986
3	BW	$9.29 \times 10^{-03}$	0.597	$3.35 \times 10^{-04}$	1.275	$5.26 \times 10^{-05}$	1.927	$6.35 \times 10^{-05}$	1.988
4	Kolgan minmod	$2.73 \times 10^{-03}$	0.855	$3.70 \times 10^{-04}$	1.145	$4.75 \times 10^{-04}$	1.032	$5.88 \times 10^{-04}$	1.010
5	ПК2 minmod	$4.92 \times 10^{-03}$	0.66	$2.35 \times 10^{-04}$	1.321	$6.24 \times 10^{-05}$	1.871	$4.84 \times 10^{-05}$	1.957
6	ПК2 MC	$2.57 \times 10^{-03}$	0.679	$6.51 \times 10^{-05}$	1.355	$1.37 \times 10^{-05}$	1.931	$1.35 \times 10^{-05}$	2.001
7	ПК2 QUICK	$2.53 \times 10^{-03}$	0.686	$7.19 \times 10^{-05}$	1.368	$1.30 \times 10^{-05}$	1.950	$1.19 \times 10^{-05}$	2.007
8	ПК2 Koren	$2.07 \times 10^{-03}$	0.744	$4.39 \times 10^{-05}$	1.499	$4.34 \times 10^{-06}$	2.045	$3.41 \times 10^{-06}$	2.031
9	ПК2 SuperBee	$5.79 \times 10^{-04}$	1.000	$4.54 \times 10^{-05}$	1.453	$4.28 \times 10^{-05}$	1.837	$5.07 \times 10^{-05}$	1.995
10	RK2 minmod	$5.11 \times 10^{-03}$	0.66	$2.51 \times 10^{-04}$	1.321	$6.90 \times 10^{-05}$	1.872	$5.38 \times 10^{-05}$	1.964
11	RK2 MC	$2.87 \times 10^{-03}$	0.667	$7.77 \times 10^{-05}$	1.323	$1.88 \times 10^{-05}$	1.914	$1.91 \times 10^{-05}$	1.999
12	RK2 QUICK	$2.37 \times 10^{-03}$	0.705	$6.27 \times 10^{-05}$	1.403	$1.02 \times 10^{-05}$	1.972	$9.05 \times 10^{-06}$	2.010
13	RK2 Koren	$2.04 \times 10^{-03}$	0.756	$4.01 \times 10^{-05}$	1.531	$1.44 \times 10^{-06}$	2.337	$7.45 \times 10^{-07}$	2.664
14	RK2 SuperBee	$5.78 \times 10^{-04}$	1.000	$4.16 \times 10^{-05}$	1.433	$4.72 \times 10^{-05}$	1.83	$5.64 \times 10^{-05}$	1.992
15	RK3 WENO5	$1.17 \times 10^{-03}$	0.839	$1.00 \times 10^{-05}$	1.663	$1.26 \times 10^{-07}$	2.622	$1.19 \times 10^{-08}$	3.707
16	RK3 minmod	$5.11 \times 10^{-03}$	0.660	$2.51 \times 10^{-04}$	1.321	$6.90 \times 10^{-05}$	1.872	$5.38 \times 10^{-05}$	1.963
17	RK3 MC	$2.85 \times 10^{-03}$	0.668	$7.67 \times 10^{-05}$	1.325	$1.84 \times 10^{-05}$	1.915	$1.87 \times 10^{-05}$	1.999
18	RK3 QUICK	$2.39 \times 10^{-03}$	0.703	$6.39 \times 10^{-05}$	1.398	$1.06 \times 10^{-05}$	1.969	$9.42 \times 10^{-06}$	2.010
19	RK3 Koren	$2.04 \times 10^{-03}$	0.756	$4.04 \times 10^{-05}$	1.530	$1.25 \times 10^{-06}$	2.428	$6.49 \times 10^{-07}$	2.793
20	RK3 SuperBee	$5.80 \times 10^{-04}$	1.000	$4.03 \times 10^{-05}$	1.451	$4.72 \times 10^{-05}$	1.830	$5.64 \times 10^{-05}$	1.992
21	RK4 WENO5	$1.17 \times 10^{-03}$	0.839	$1.00 \times 10^{-05}$	1.663	$1.27 \times 10^{-07}$	2.62	$1.18 \times 10^{-08}$	3.722

Дифференциальное приближение схемы ПК2 показало, что данная схема реализует третий порядок аппроксимации при

$$f(r) = kr + 1 - k, \quad k = \frac{1}{3}(2 - CFL). \tag{13}$$

Аналогично, схема RK2 имеет третий порядок аппроксимации в случае

$$k = \frac{1}{3}(2 + CFL^2). \tag{14}$$

Зависимости (13) и (14) обуславливают влияние числа Куранта на эффективность ограничителей схем второго порядка. Согласно (13) и (14), при CFL = 0.5 (табл. 1) схемы ПК2 MC (№ 6) и RK2 QUICK (№ 12) имеют экспериментальную точность на гладком решении (2г), близкую к третьему порядку:  $q = 2.835$  и  $q = 2.883$  соответственно. В случае CFL = 0.1 (табл. 2) для этих схем наиболее эффективен ограничитель Корена (№ 8, № 13), в котором  $k = 2/3$ . Кроме того, в случае CFL = 0.1 ограничитель Корена более точен для схемы RK2 вследствие второй степени влияния числа Куранта в формуле (14).

Отметим, что эффективность нелинейных ограничителей для схем второго порядка при различных числах Куранта определяется величиной производной  $k = f'(1)$ , поэтому приведенных данных достаточно для анализа и этих ограничителей.

Точность схемы RK3 с ограничителем Корена (№ 19) в рассматриваемых случаях практически не зависит от числа Куранта. Эта схема реализует близкий к третьему порядку точности на гладких решениях (2г):  $q = 2.785 \div 2.793$ , а в случае скачка (2а) имеет точность  $q = 0.755 \div 0.756$  (табл. 1 и 2). Схема третьего порядка RK3 Koren имеет тот же шаблон по пространству, что и схемы второго порядков ПК2 и RK2. В связи с этим, по-видимому, в решениях гиперболических систем уравнений в задачах, включающих в себя зоны с разрывами и гладкими решениями, а также требующих минимизации погрешностей при вычислении конвективных членов, схема RK3 с TVD-ограничителем третьего порядка типа Корена более эффективна, чем схемы второго порядка.

Как можно видеть, схема RK3 с реконструкцией пятого порядка WENO5 (№ 15) при решении рассматриваемой задачи при CFL = 0.1 превышает точность схемы RK3 с ограничителем Корена третьего порядка (№ 19), однако при CFL = 0.5 это превышение практически отсутствует.

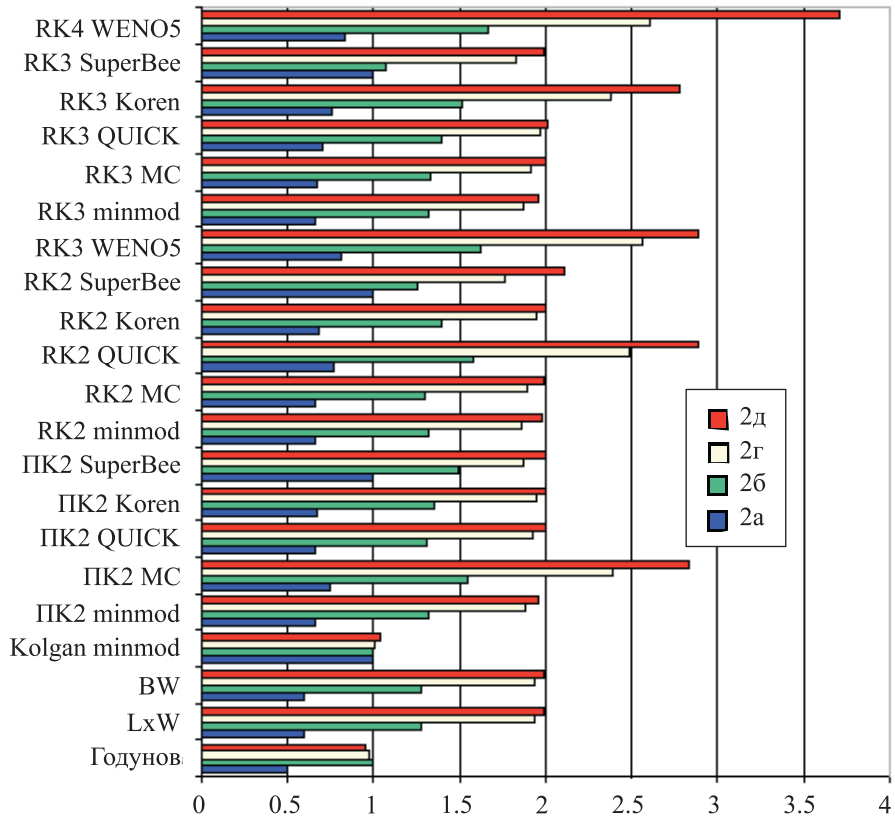


Рис. 2. Порядок точности (CFL = 0.5)

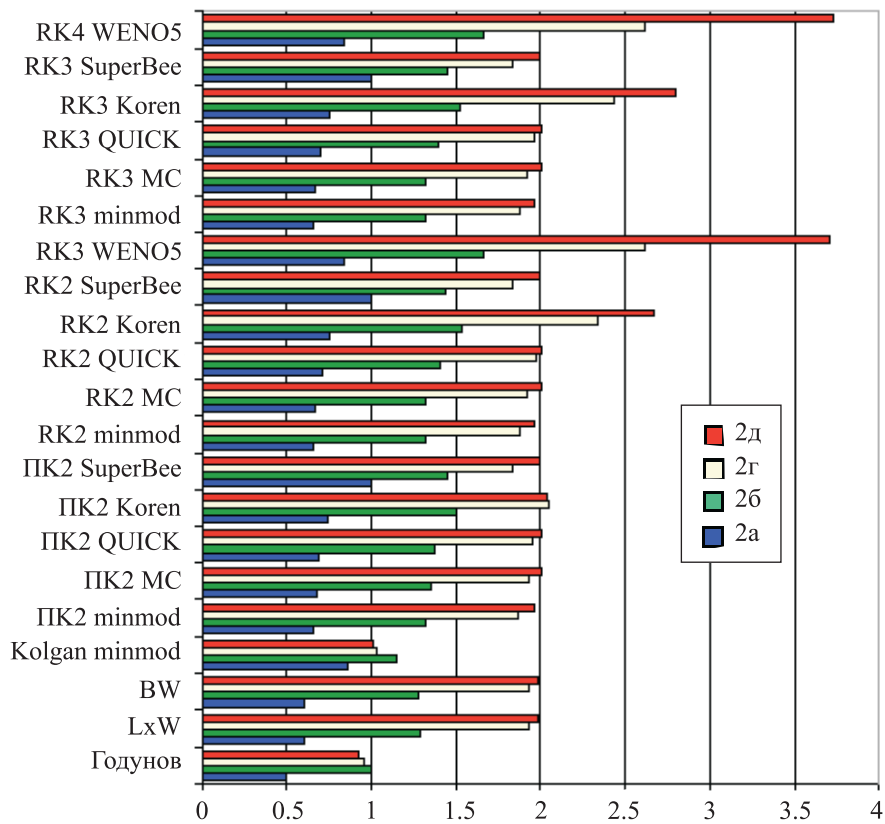


Рис. 3. Порядок точности (CFL = 0.1)

Увеличение порядка по времени в схеме RK4 WENO5 дает некоторое преимущество по отношению к схеме RK3 Коуна независимо от числа Куранта. Следует учитывать, что аппроксимация пятого порядка проводится на большем шаблоне, чем третьего и требует специальных процедур на границах расчетной области.

**Выводы.** Предложен метод оценки реальной точности численных методов сквозного счета, с помощью которого проведен сравнительный анализ известных TVD-схем. Порядок точности схемы на гладких решениях равен порядку аппроксимации схемы, однако в случаях разрывов самих решений и их производных точность численных схем ограничивается как порядком аппроксимации схемы, так и порядком дифференцируемости решения. В расчете скачков порядок точности не превышает 1.

Установлена зависимость точности TVD-ограничителей в схемах второго порядка аппроксимации от числа Куранта, которая помогает выбрать эффективные ограничители для расчетов по этим схемам.

В численных решениях гиперболических систем уравнений с разрывами и зонами гладких решений рекомендуется TVD-схема типа Годунова на основе метода Рунге–Кутты 3-го порядка по времени с TVD-ограничителем третьего порядка по пространству типа Коуна и приближенным решением задачи о распаде разрыва методом, изложенным в [10].

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Harten A. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws // J. of Computational Physics. 1983. **49**. 347–393.
2. Toro E.F. Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics. Berlin: Springer-Verlag, 1999.
3. Годунов С.К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Матем. сборник. 1959. **47**, вып. 3. 271–306.
4. Sweby P.K. High resolution schemes using flux limiters for hyperbolic conservation laws // SIAM J. on Numerical Analysis. 1984. **21**, N 5. 995–1011.
5. Колган В.П. Применение принципа минимальных производных к построению конечно-разностных схем для расчета разрывных решений газовой динамики // Ученые записки ЦАГИ. 1972. **3**, В 6. 68–77.
6. Van Leer B. Upwind and high-resolution methods for compressible flow: from donor cell to residual-distribution schemes // Commun. Comput. Phys. 2006. **1**, N 2. 192–206.
7. Родионов А.В. Повышение порядка аппроксимации схемы С.К. Годунова // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. 1987. **27**, № 12. 1853–1860.
8. Shu C.-W., Osher S. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock capturing schemes // J. of Computational Physics. 1988. **77**. 439–471.
9. Liu X.-D., Osher S., Chan T. Weighted essentially non-oscillatory schemes // J. of Computational Physics. 1994. **115**. 200–212.
10. Сафронов А.В. Кинетические схемы для уравнений газодинамики // Вычислительные методы и программирование. 2009. **10**, № 1. 51–63.

Поступила в редакцию  
21.03.2010

---