УДК 517.983

# ОБ АПОСТЕРИОРНЫХ ОЦЕНКАХ ТОЧНОСТИ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ НЕКОРРЕКТНО ПОСТАВЛЕННЫХ ЗАДАЧ И ЭКСТРАОПТИМАЛЬНЫХ РЕГУЛЯРИЗУЮЩИХ АЛГОРИТМАХ

**А. С. Леонов**[1]

Предлагается новая схема апостериорной оценки точности приближенных решений линейных некорректно поставленных задач и алгоритм ее вычисления. Вводится новое понятие экстраоптимального регуляризующего алгоритма как метода решения некорректных задач, имеющего оптимальную по порядку апостериорную оценку точности. Приводится пример оптимального по порядку метода, который не является экстраоптимальным. Разработанная теория иллюстрируется численным экспериментом. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (коды проектов 08–01–00160-а и 07–01–92103-ГФЕН-а), Аналитической ведомственной целевой программы "Развитие научного потенциала Высшей школы" (код проекта 2.1.1/6827), а также проектов ГК Рособразования П268 и П943.

---

**Ключевые слова:** некорректно поставленные задачи, регуляризующие алгоритмы, апостериорная оценка точности, экстраоптимальный алгоритм.

**1. Постановка задачи.** Пусть $Z, U$ — нормированные пространства, $A: Z \to U$ — линейный ограниченный инъективный оператор, а $\mathcal{D} \subset Z$ — заданное непустое множество "априорных ограничений". Будем рассматривать операторное уравнение

$$Az = u, \quad z \in \mathcal{D}, \tag{1}$$

предполагая, что для правой части $u \in U$, $u \neq 0$, оно разрешимо и его единственное решение есть $\overline{z} \in \mathcal{D}$. Заметим, что тогда $\overline{z} \neq 0$.

Пусть, далее, вместо точных данных задачи известны их приближения $\{A_h, u_\delta\}$ (линейный ограниченный оператор $A_h : Z \to U$ и элемент $u_\delta \in U$) с точностями $\eta = (\delta, h)$, $\|\eta\| > 0$, причем выполнены условия аппроксимации $\|u - u_\delta\| \leqslant \delta$, $\|Az - A_h z\| \leqslant h\|z\|$ $\forall z \in \mathcal{D}$. Таким образом,

$$\|A_h\overline{z} - u_\delta\| \leqslant \delta + h\|\overline{z}\|. \tag{2}$$

Будем искать по приближенным данным $\{A_h, u_\delta, h, \delta\}$ устойчивое приближение к решению $\overline{z}$, т.е. такой элемент $z_\eta \in \mathcal{D}$, для которого

$$\lim_{\eta \to 0} \|z_\eta - \overline{z}\| = 0. \tag{3}$$

Хорошо известно, что для этих целей следует применять регуляризующие алгоритмы (РА). При этом приближенное решение задают в форме $z_\eta = R_\eta(A_h, u_\delta, h, \delta) \in \mathcal{D}$, где $\{R_\eta\}$ — некоторое параметрическое семейство операторов, действующих на приближенные данные и явно зависящих от погрешностей данных $\eta$. Операторы $R_\eta$ можно вводить различными способами. Мы будем использовать вариационные РА [1–5] с некоторым регуляризующим функционалом $\Omega[z]$.

Предположим, что функционал $\Omega[z]$ обладает следующими свойствами [4, 5]:

В1) он определен, непрерывен и ограничен снизу на $\mathcal{D}$ (без ограничения общности будем считать, что $\Omega[z] \geqslant 0$ на $\mathcal{D}$);

В2) непустые множества вида $\Omega_C = \{z \in \mathcal{D} : \Omega[z] \leqslant C\}$ сильно замкнуты и компактны.

Если при сделанных предположениях В1 и В2 рассматриваемый алгоритм $R_\eta$ гарантирует выполнение условий регулярности

$$\overline{\lim_{\eta \to 0}}\, \Omega[z_\eta] \leqslant \mathrm{const}, \quad \lim_{\eta \to 0} \|A_h z_\eta - u_\delta\|_U = 0 \tag{4}$$

[1] Национальный исследовательский ядерный университет (МИФИ), Каширское шоссе, д. 31, 115409, Москва; профессор, e-mail: inv_illposed@yahoo.com

и решение $\overline{z}$ задачи (1) единственно, то, как известно [3–5], он обеспечивает сходимость (3), а значит, в силу B1, и сходимость $\Omega[z_\eta] \to \Omega[\overline{z}]$.

Нашей целью является получение апостериорной оценки точности приближенного решения $z_\eta$, вычисленного с помощью такого РА.

**2. Равномерные априорные и апостериорные оценки.** Теория *равномерных априорных оценок точности* методов решения некорректных задач развита в работах [2, 4, 7, 10] и др. Оценки строятся для некоторого класса $M$ ($M \subset \mathcal{D}$) решений $\overline{z}$ задач вида (1) с фиксированным точным оператором $A$ и с различными приближенными данными. Получение оценок базируется на использовании следующей характеристики точности метода (регуляризующего алгоритма) $R_\eta$:

$$\Delta(R_\eta, h, \delta, M; A) = \sup_{\overline{z}, A_h, u_\delta} \Big\{ \big\| R_\eta(A_h, u_\delta, h, \delta) - \overline{z} \big\| : \overline{z} \in M,\ u_\delta \in U,\ \|A\overline{z} - u_\delta\| \leqslant \delta,\ \|A - A_h\| \leqslant h \Big\}.$$

Равномерные априорные оценки имеют вид $\Delta(R_\eta, h, \delta, M; A) \leqslant K_1 \xi(h, \delta)$. Здесь $K_1$ не зависит от $\eta$, а функция $\xi(h, \delta)$ определяется рассматриваемым методом решения задачи и видом множества $M$. Характеризацию допустимых множеств $M$ можно найти в [2, 6].

Равномерные априорные оценки можно получить в случае, когда $Z$ — рефлексивное банахово пространство. Для этого с технической точки зрения удобно, чтобы множество $M$ имело следующий вид: $M = M_r = \big\{ z : z = Bv,\ v \in V,\ \|v\| \leqslant r \big\}$. Здесь $V$ — некоторое вспомогательное рефлексивное банахово пространство, $B : V \to Z$ — заданный линейный непрерывный оператор, а $r$ — фиксированное число. Таким образом, априорно предполагается, что точное решение представимо как $\overline{z} = B\overline{v}$, где $\|\,\overline{v}\,\| \leqslant r$.

Обычно априорные оценки точности имеют своей целью доказать некоторые оптимальные свойства погрешности рассматриваемого метода или сравнить различные методы по порядку точности. Именно поэтому центральным моментом теории является определение оптимальной точности, оптимального метода решения задачи и понятие метода, оптимального по порядку.

Точностью метода $R_\eta$ на классе $M_r$ называется величина $\Delta(R_\eta, h, \delta, M_r; A)$, а *оптимальной точностью* на классе $\mathcal{R}$ различных методов $R$ — величина $\Delta_{\rm opt}(h, \delta, M_r) = \inf \big\{ \Delta(R, h, \delta, M_r; A) : R \in \mathcal{R} \big\}$. Метод $R_\eta$ называется *оптимальным по порядку* на множестве $M_r$, если для его точности выполнено соотношение $\dfrac{\Delta(R_\eta, h, \delta, M_r; A)}{\Delta_{\rm opt}(h, \delta, M_r)} \leqslant k = {\rm const}$ при $h, \delta \to 0$, где $k$ не зависит от $h, \delta$ и $r$. В работах [2, 4, 7, 8] показано, что многие известные регуляризующие алгоритмы являются оптимальными по порядку на классах $M_r$, определяемых оператором $B$ компактного вложения пространства $V$ в $Z$. К их числу относятся обобщенный принцип (метод) невязки, обобщенный принцип (метод) сглаживающего функционала и обобщенный принцип (метод) квазирешений, для которых в работах [2, 4, 7] установлено, что $\Delta(R_\eta, h, \delta, M_r; A) \leqslant 2\Delta_{\rm opt}(h, \delta, M_r)$. Поэтому само использование этих методов уже гарантирует оптимальность по порядку точности получаемых приближенных решений.

Отметим, что порядок точности, представляемый функцией $\xi(h, \delta) = \Delta_{\rm opt}(h, \delta, M_r)$, как правило, не может быть вычислен явно (аналитически). Это можно сделать лишь для сравнительно узкого круга обратных задач и множеств $M_r$ [2, 5, 7–11].

Основной недостаток априорных оценок — невозможность их использования в общем случае для реального нахождения точности полученного приближения — привел к развитию теории *равномерных апостериорных оценок точности*. Имеется несколько схем такой оценки. Приведем традиционную схему, ведущую свое начало от работ [12, 13]. Применим для решения уравнения (1) какой-либо из регуляризующих алгоритмов, которые дают приближенное решение в форме $z_\eta = Bv_\eta \in \mathcal{D}$, $v_\eta \in V$, и обеспечивают хотя бы слабую сходимость элементов $v_\eta$ к $\overline{v}$ в пространстве $V$ при $\eta \to 0$ . Вычислим величины $r_\eta = \|v_\eta\|$ и $R_\eta = \|z_\eta\|$. Далее, введем оценочную константу $C > 1$, число $\Delta = \delta + ChR_\eta$ и определим множества $M_\eta = \big\{ z \in \mathcal{D} : z = Bv, v \in V, \|v\| \leqslant Cr_\eta \big\}$ и $Z_\eta = \big\{ z \in M_\eta : \|A_h z - u_\delta\| \leqslant \Delta \big\}$. Множество $M_\eta$ содержит (по крайней мере, для достаточно малых $h, \delta$) точное решение $\overline{z}$ . Это вытекает из соотношения $\varliminf\limits_{\eta \to 0} r_\eta = \varliminf\limits_{\eta \to 0} \|v_\eta\| \geqslant \|\,\overline{v}\,\|$, которое обеспечено слабой сходимостью $v_\eta \rightharpoonup \overline{v}$. Аналогично, $\overline{z} \in Z_\eta$. Действительно, в силу слабой непрерывности линейного оператора $B$ и слабой полунепрерывности снизу нормы в $Z$ получается, что $\varliminf\limits_{\eta \to 0} R_\eta = \varliminf\limits_{\eta \to 0} \|z_\eta\| = \varliminf\limits_{\eta \to 0} \|Bv_\eta\| \geqslant \|B\overline{v}\| = \|\,\overline{z}\,\|$. Отсюда и из (2) следует, что $\|A_h \overline{z} - u_\delta\| \leqslant \delta + h\|\,\overline{z}\,\| \leqslant \delta + ChR_\eta = \Delta$ при $\eta \to 0$.

Установленное включение $\overline{z} \in Z_\eta$ порождает оценку

$$\|z_\eta - \overline{z}\,\| \leqslant \sup \big\{ \|z_\eta - z\| : z \in Z_\eta \big\} \equiv \varepsilon(\eta). \tag{5}$$

Функцию $\varepsilon(\eta)$, в принципе, можно найти численно, вычисляя точную верхнюю грань из (5). Эта функция имеет важное свойство: $\varlimsup\limits_{\eta\to 0} \varepsilon(\eta) = 0$ [13]. Формула (5) дает равномерную апостериорную оценку точности приближенного решения на множестве $Z_\eta$.

Апостериорные оценки точности, основанные на (5), в последнее время интенсивно изучались в работах [14–16] для различных модификаций постановки задачи и различных априорных множеств $\mathcal{D}$.

В настоящей статье предлагается несколько иная схема апостериорной оценки точности, исследуются ее свойства и приводятся вычислительные эксперименты по ее нахождению.

**3. Используемая схема апостериорной оценки.** Уточним постановку задачи. Откажемся от требования $\overline{z} = B\overline{v}$. Вместе с тем, предположим, как это сказано в разделе 1, что в применяемом регуляризующем алгоритме используется функционал $\Omega[z]$ со свойствами B1 и B2, и этот РА порождает семейство приближенных решений $\{z_\eta\} \subset \mathcal{D}$ со свойством сходимости в нормированном пространстве $Z$: $z_\eta \to \overline{z}$. Сходимость гарантируется, например, при выполнении условий регулярности (4).

После применения РА известны величины $\|A_h z_\eta - u_\delta\|$ и $\Omega[z_\eta]$. Фиксируем оценочную константу $C > 1$ и вычислим числа $\Delta_\eta = C\|A_h z_\eta - u_\delta\|$, $R_\eta = C\Omega[z_\eta]$. Тогда справедлива равномерная апостериорная оценка точности приближения $z_\eta \in \mathcal{D}$:

$$\|z_\eta - \overline{z}\| \leqslant \sup\left\{\|z_\eta - z\| \,:\, z \in \mathcal{D},\, \Omega[z] \leqslant R_\eta,\, \|A_h z - u_\delta\| \leqslant \Delta_\eta\right\} \equiv \varepsilon_\Omega(\eta), \tag{6}$$

если точное решение $\overline{z}$ удовлетворяет ограничениям экстремальной задачи (6). Вопрос о выполнении этого требования для $\overline{z}$, а также для $z_\eta$ решает

**Лемма 1.** *Предположим, что $\Omega[\,\overline{z}\,] > 0$ и хотя бы для достаточно малых $\eta$ выполнено условие*

$$\delta + h\|\,\overline{z}\,\| \leqslant C\|A_h z_\eta - u_\delta\|. \tag{7}$$

*Тогда* 1) *справедливы неравенства $\|A_h\overline{z} - u_\delta\| \leqslant \Delta_\eta$, $\|A_h z_\eta - u_\delta\| < \Delta_\eta$ и*

2) *по крайней мере при достаточно малых $\eta$ верны неравенства $\Omega[\,\overline{z}\,] < R_\eta$, $\Omega[z_\eta] < R_\eta$.*

В дальнейшем слова "при достаточно малых $\eta$" мы будем иногда заменять следующим неравенством: $0 < \|\eta\| \leqslant \eta_0 = \text{const}$.

**Доказательство.** Из (2) и (7) следует, что $\|A_h\overline{z} - u_\delta\| \leqslant \delta + h\|\,\overline{z}\,\| \leqslant C\|A_h z_\eta - u_\delta\| = \Delta_\eta$. Отсюда получается требуемое неравенство $\|A_h\overline{z} - u_\delta\| \leqslant \Delta_\eta$, а также неравенство $\Delta_\eta = C\|A_h z_\eta - u_\delta\| > 0$, так как $\delta + h\|\,\overline{z}\,\| > 0$. Но тогда $\Delta_\eta = C\|A_h z_\eta - u_\delta\| > \|A_h z_\eta - u_\delta\|$, и это доказывает второе неравенство из п. 1 леммы. Далее, если предположить, что при $0 < \|\eta\| \leqslant \eta_0$ выполнено неравенство $\Omega[\,\overline{z}\,] \geqslant C\Omega[z_\eta] = R_\eta$, то, переходя в нем к пределу и используя сходимость $\Omega[z_\eta] \to \Omega[\,\overline{z}\,]$, которая в силу условия B1 вытекает из сходимости $z_\eta \to \overline{z}$, получим $\Omega[\,\overline{z}\,] \geqslant C\Omega[\,\overline{z}\,] > 0$. Однако это не может выполняться для $C > 1$. Полученное противоречие доказывает, что $\Omega[\,\overline{z}\,] < R_\eta$ при $0 < \|\eta\| \leqslant \eta_0$. Аналогично доказывается второе неравенство из п. 2 леммы. Лемма доказана.

Отметим, что условие (7) обеспечивается для многих регуляризующих алгоритмов. Например, при решении линейных некорректных задач по обобщенному методу (принципу) невязки с регуляризатором $\Omega[z] = \|z\|^2$ выполнено равенство $\|A_h z_\eta - u_\delta\| = \overline{C}\big(\delta + h\|z_\eta\|\big)$, $\overline{C} = \text{const} > 1$ [4, 5], из которого условие (7) получается при $0 < \|\eta\| \leqslant \eta_0$ вследствие сходимости $z_\eta \to \overline{z}$. Можно привести и другие примеры.

Из леммы 1 вытекает, что апостериорная оценка (6) справедлива по крайней мере для достаточно малых $\eta$. Изучим оценочную функцию $\varepsilon_\Omega(\eta)$ и экстремальную задачу (6).

**Теорема 1.** *При выполнении условий* B1 *и* B2 *точная верхняя грань*

$$\varepsilon_\Omega(\eta) = \sup\left\{\|z_\eta - z\| \,:\, z \in \mathcal{D},\, \Omega[z] \leqslant R_\eta,\, \|A_h z - u_\delta\| \leqslant \Delta_\eta\right\} \tag{8}$$

*при каждом фиксированном $\eta$, $0 < \|\eta\| \leqslant \eta_0$, достигается на некотором элементе $\widetilde{z}_\eta \in \mathcal{D}$. Выполнено предельное соотношение $\lim\limits_{\eta\to 0} \varepsilon_\Omega(\eta) = \lim\limits_{\eta\to 0} \|\,\widetilde{z}_\eta - z_\eta\| = 0$.*

**Доказательство.** При произвольном фиксированном $\eta$, $0 < \|\eta\| \leqslant \eta_0$, возьмем максимизирующую последовательность $\{z_n\}$ для задачи (8): $\|z_n - z_\eta\| \to \varepsilon_\Omega(\eta)$ при $n \to \infty$. Для нее выполнено неравенство $\Omega[z_n] \leqslant R_\eta$. Поэтому из свойства B2 функционала $\Omega$ следует, что найдется сходящаяся подпоследовательность $\{z_{n_k}\}$: $z_{n_k} \to \widetilde{z}_\eta \in \mathcal{D}$, для которой из свойства B1 получим $R_\eta \geqslant \lim\limits_{k\to\infty} \Omega[z_{n_k}] = \Omega[\,\widetilde{z}_\eta]$. Из непрерывности оператора $A_h$ и из ограничения задачи (8) следует также, что $\Delta_\eta \geqslant \lim\limits_{k\to\infty} \|A_h z_{n_k} - u_\delta\| = \|A_h\widetilde{z}_\eta - u_\delta\|$. Это означает, что элемент $\widetilde{z}_\eta$ удовлетворяет всем ограничениям задачи на экстремум (8):

$$\Omega[\,\widetilde{z}_\eta] \leqslant R_\eta, \quad \|A_h\widetilde{z}_\eta - u_\delta\| \leqslant \Delta_\eta, \tag{9}$$

причем $\varepsilon_\Omega(\eta) = \lim_{k\to\infty} \|z_{n_k} - z_\eta\| = \|\widetilde{z}_\eta - z_\eta\|$. Следовательно, элемент $\widetilde{z}_\eta$ реализует точную верхнюю грань (8). Из сходимости $z_\eta \to \overline{z}$ и неравенства $\Delta_\eta = C\,\|A_h z_\eta - u_\delta\| \leqslant C\big[\|A_h - A\|\,\|z_\eta\| + \|Az_\eta - u\| + \delta\big]$ вытекает, что $\Delta_\eta \to 0$. Поэтому, переходя к пределу при $\eta \to 0$ в (9) и учитывая отмеченную ранее сходимость $\Omega[z_\eta] \to \Omega[\overline{z}]$, получим вариант условий регулярности (4) для семейства $\{\widetilde{z}_\eta\}$:

$$\overline{\lim_{\eta\to 0}}\ \Omega[\widetilde{z}_\eta] \leqslant \overline{\lim_{\eta\to 0}}\ C\Omega[z_\eta] = C\Omega[\overline{z}], \quad \lim_{\eta\to 0} \|A_h\widetilde{z}_\eta - u_\delta\| \leqslant \lim_{\eta\to 0} \Delta_\eta = 0.$$

Как сказано в разделе 1, эти условия вместе с предположением единственности решения $\overline{z}$ ведут к сходимости $\widetilde{z}_\eta \to \overline{z}$. Следовательно, $\lim_{\eta\to 0} \varepsilon_\Omega(\eta) = \lim_{\eta\to 0} \|\widetilde{z}_\eta - z_\eta\| = \|\overline{z} - \overline{z}\| = 0$. Теорема доказана.

Теорема 1 показывает, что функцию $\varepsilon_\Omega(\eta)$ можно вычислить для каждого фиксированного $\eta = (h,\delta)$, решая экстремальную задачу (8) нахождения глобального максимума функционала $E[z] = \|z - z_\eta\|$ на множестве $Z_{\Omega\eta} = \big\{z \in \mathcal{D} : \Omega[z] \leqslant R_\eta,\ \|A_h z - u_\delta\| \leqslant \Delta_\eta\big\}$. Нетрудно на примерах убедиться, что эта задача может иметь много экстремалей, реализующих локальные и глобальные максимумы. Один из возможных подходов к ее решению, который мы и будем далее рассматривать, состоит в нахождении всех точек, "подозрительных" на локальный максимум, вычислении функционала $E[z]$ в этих точках и выборе из полученных значений максимального.

**4. Вспомогательные утверждения.** Для дальнейшего исследования задачи (8) будут полезными некоторые леммы.

**Лемма 2.** *Предположим, что при данном $\eta$ справедливо включение $\overline{z} \in Z_{\Omega\eta}$ и приближенное решение $z_\eta$ получено с помощью нетривиального регуляризующего алгоритма, т.е. $z_\eta = R_\eta(A_h, u_\delta, h, \delta) \neq \overline{z}$. Тогда все решения задачи* (8) *лежат на границе множества $Z_{\Omega\eta}$, т.е. находятся среди решений следующих экстремальных задач:*

$$\arg\sup\big\{\|z - z_\eta\|^2 : \Omega[z] = R_\eta,\ \|A_h z - u_\delta\|^2 = \Delta_\eta^2\big\}, \tag{10}$$

$$\arg\sup\big\{\|z - z_\eta\|^2 : \Omega[z] < R_\eta,\ \|A_h z - u_\delta\|^2 = \Delta_\eta^2\big\}, \tag{11}$$

$$\arg\sup\big\{\|z - z_\eta\|^2 : \Omega[z] = R_\eta,\ \|A_h z - u_\delta\|^2 < \Delta_\eta^2\big\}. \tag{12}$$

**Доказательство.** Прежде всего, заметим, что $\varepsilon_\Omega(\eta) = \|\widetilde{z} - z_\eta\| \geqslant \|\overline{z} - z_\eta\| > 0$ в силу условий теоремы. Предположим теперь, что какое-либо решение $\widetilde{z}$ задачи (8) является внутренней точкой множества $Z_{\Omega\eta}$. Рассмотрим прямую, состоящую из элементов $z(t) = (1-t)\widetilde{z} + tz_\eta$, $t \in \mathbb{R}$, и проходящую через точки $\widetilde{z}$ и $z_\eta$. Так как точка $\widetilde{z}$ — внутренняя, то найдется "шар" $B_r(\widetilde{z}) = \big\{z \in \mathcal{D} :\ \|z - \widetilde{z}\| \leqslant r\big\}$, $r > 0$, лежащий в $Z_{\Omega\eta}$. Значит, пересечение прямой и этого шара также лежит в $Z_{\Omega\eta}$. Одна из точек этого пересечения есть $z(t^*)$, где $t^* = -\dfrac{r}{\|\widetilde{z} - z_\eta\|}$. Но тогда $\|z(t^*) - z_\eta\| = \big(1 + |t^*|\big)\|\widetilde{z} - z_\eta\| > \|\widetilde{z} - z_\eta\|$, а это противоречит тому, что на элементе $\widetilde{z}$ достигается точная верхняя грань (8). Таким образом, элемент $\widetilde{z}$ лежит на границе множества $Z_{\Omega\eta}$ и поэтому является решением одной из задач (10)–(12). Что и требовалось доказать.

**Замечание 1.** В лемме 2 попутно установлено, что $\widetilde{z} \neq z_\eta$ в случае, когда уравнение (1) решается с помощью нетривиального алгоритма $R_\eta$ и $\overline{z} \in Z_{\Omega\eta}$.

**Лемма 3.** *Если приближенное решение $z_\eta$ получено с помощью нетривиального регуляризующего алгоритма и выполнены условия леммы* 1, *то по крайней мере для достаточно малых $\eta$ все решения экстремальной задачи* (8) *находятся среди решений задачи* (11).

**Доказательство.** По лемме 1 имеем $\overline{z} \in Z_{\Omega\eta}$ при $0 < \|\eta\| \leqslant \eta_0$, так что справедливы условия леммы 2. Остается доказать, что для любого решения $\widetilde{z}_\eta$ задачи (8) выполнено неравенство $\Omega[\widetilde{z}_\eta] < R_\eta$, и тогда в силу леммы 2 элемент $\widetilde{z}_\eta$ может быть решением только задачи (11). Пусть это не так и найдется последовательность $\eta_n \to 0$, $\|\eta_n\| > 0$, такая, что $\Omega[\widetilde{z}_n] = R_n$, т.е. $\Omega[\widetilde{z}_n] = C\Omega[z_n]$. Здесь приняты обозначения: $\widetilde{z}_n = \widetilde{z}_{\eta_n}$, $z_n = z_{\eta_n}$, $R_n = R_{\eta_n}$. Из сходимости регуляризующего алгоритма и сходимости, доказанной в теореме 1, следует: $z_n \to \overline{z}$, $\widetilde{z}_n \to \overline{z}$. Отсюда, учитывая B1, получим $\Omega[\overline{z}] = \lim_{n\to\infty} \Omega[\widetilde{z}_n] = \lim_{n\to\infty} C\Omega[z_n] = C\Omega[\overline{z}] > 0$, что невозможно при $C > 1$. Лемма доказана.

Отметим, что в леммах 2 и 3 нет предположений о дифференцируемости функционала $\Omega[z]$.

**5. Необходимые условия локальных максимумов в задачах (10)–(12).** Прежде всего, приведем некоторое вспомогательное утверждение. Пусть $X$ — банахово пространство, в котором определены функционалы $f_0(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$. Рассмотрим задачу на экстремум: найти элемент $\widetilde{x} \in X$, для которого

$$f_0(\widetilde{x}) = \inf\big\{f_0(x) : x \in X,\quad f_1(x) \leqslant 0,\ f_2(x) \leqslant 0\big\}, \tag{13}$$

полагая множество ограничений этой задачи непустым. Применим для ее решения метод множителей Лагранжа. Из соответствующей теории, изложенной, например, в [17–19], получается следующее

**Утверждение 1.** Если $\widetilde{x}$ — какое-либо решение задачи (13), а функционалы непрерывны в $X$ и дифференцируемы по Фреше в некоторой окрестности точки $\widetilde{x}$, то существуют числа $\lambda_0,\ \lambda_1,\ \lambda_2 \geqslant 0$, $(\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2)\neq(0,0,0)$, такие, что $\lambda_0 f_0'(\widetilde{x}) + \lambda_1 f_1'(\widetilde{x}) + \lambda_2 f_2'(\widetilde{x}) = 0$ и $\lambda_1 f_1(\widetilde{x}) = \lambda_2 f_2(\widetilde{x}) = 0$. Если, кроме того, найдется такой вектор $x\in X$, что $\left\langle f_i'(\widetilde{x}), x\right\rangle < 0$ для тех $i = 1,2$, при которых $f_i(\widetilde{x}) = 0$, то $\lambda_0 \neq 0$ и можно считать, что $\lambda_0 = 1$.

Здесь $f_i'(\widetilde{x})$, $i = 0,1,2,$ — производные Фреше в точке $\widetilde{x}$, а $\left\langle f_i'(\widetilde{x}), x\right\rangle$ — линейные функционалы в $X$, порождаемые этими производными. Из утверждения 1 нетрудно вывести

**Следствие 1.** Предположим, что $f_0'(\widetilde{x}),\ f_1'(\widetilde{x}),\ f_2'(\widetilde{x}) \neq 0$. Тогда возможны следующие варианты:

а) или $f_1(\widetilde{x}) = f_2(\widetilde{x}) = 0$ и элементы $f_1'(\widetilde{x}),\ f_2'(\widetilde{x})$ линейно независимы; в этом случае существуют такие числа $\lambda_1,\ \lambda_2 \geqslant 0$, $(\lambda_1,\lambda_2)\neq(0,0)$, что $f_0'(\widetilde{x}) + \lambda_1 f_1'(\widetilde{x}) + \lambda_2 f_2'(\widetilde{x}) = 0$;

б) или $f_1(\widetilde{x}) = f_2(\widetilde{x}) = 0$ и элементы $f_1'(\widetilde{x}),\ f_2'(\widetilde{x})$ — линейно зависимые; в этом случае существуют такие числа $\lambda_1,\ \lambda_2 \geqslant 0$, $(\lambda_1,\lambda_2)\neq(0,0)$, что $\lambda_1 f_1'(\widetilde{x}) + \lambda_2 f_2'(\widetilde{x}) = 0$;

в) или $f_1(\widetilde{x}) = 0,\ f_2(\widetilde{x}) < 0$; в этом случае найдется число $\lambda_1 > 0$, такое, что $f_0'(\widetilde{x}) + \lambda_1 f_1'(\widetilde{x}) = 0$;

г) или $f_1(\widetilde{x}) < 0,\ f_2(\widetilde{x}) = 0$; в этом случае найдется число $\lambda_2 > 0$, такое, что $f_0'(\widetilde{x}) + \lambda_2 f_2'(\widetilde{x}) = 0$.

Перейдем теперь непосредственно к необходимым условиям максимума в задаче (8). Рассмотрим их для уточненной постановки задачи. Предположим, что $Z$ и $U$ — гильбертовы пространства и $\mathcal{D} = H$, где $H$ — вложенное в $Z$ банахово пространство, на котором определен дифференцируемый по Фреше в $Z$ функционал $\Omega[z]$. Для $\Omega[z]$ считаем по-прежнему выполненными условия B1, B2 (требование непрерывности из B1 будет выполняться автоматически вследствие дифференцируемости $\Omega[z]$). Задачу (8) можно переписать в виде (13) с $X = H$ и с $f_0 = -\|z - z_\eta\|_Z^2$, $f_1 = \|A_h z - u_\delta\|^2 - \Delta_\eta^2$, $f_2 = \Omega[z] - R_\eta$. Очевидно, что для таких функционалов $f_0,\ f_1,\ f_2$ выполнены условия дифференцируемости из утверждения 1. Поэтому, вычислив их производные и применив следствие 1 с учетом замечания 1, получим теорему.

**Теорема 2.** *Предположим, что выполняются условия леммы* 2, *и пусть* $\widetilde{z}$ — *произвольное решение задачи* (8). *Если справедливы неравенства* $A_h^*A_h\widetilde{z} \neq A_h^*u_\delta$ *и* $\Omega'[\widetilde{z}] \neq 0$, *то возможны следующие варианты:*

а) *или* $\widetilde{z}$ *есть решение задачи* (10) *и существуют такие числа* $\alpha,\ \beta > 0$, *что обеспечены равенства*

$$-(\widetilde{z} - z_\eta) + \alpha\,(A_h^*A_h\widetilde{z} - A_h^*u_\delta) + \beta\Omega'[\widetilde{z}] = 0, \quad \Omega[\widetilde{z}] = R_\eta, \quad \|A_h\widetilde{z} - u_\delta\|^2 = \Delta_\eta^2;$$

б) *или* $\widetilde{z}$ *есть решение задачи* (10) *и существует такое число* $\beta > 0$, *что выполнены равенства*

$$A_h^*A_h\widetilde{z} - A_h^*u_\delta + \beta\Omega'[\widetilde{z}] = 0, \quad \Omega[\widetilde{z}] = R_\eta, \quad \|A_h\widetilde{z} - u_\delta\|^2 = \Delta_\eta^2;$$

в) *или* $\widetilde{z}$ *есть решение задачи* (11) *и существует такое число* $\alpha > 0$, *что справедливы соотношения*

$$\alpha\,(A_h^*A_h\widetilde{z} - A_h^*u_\delta) - (\widetilde{z} - z_\eta) = 0, \quad \Omega[\widetilde{z}] < R_\eta, \ \ \|A_h\widetilde{z} - u_\delta\|^2 = \Delta_\eta^2;$$

г) *или* $\widetilde{z}$ *есть решение задачи* (12) *и существует такое число* $\beta > 0$, *что выполнены соотношения*

$$\beta\Omega'[\widetilde{z}] - (\widetilde{z} - z_\eta) = 0, \ \Omega[\widetilde{z}] = R_\eta, \quad \|A_h\widetilde{z} - u_\delta\|^2 < \Delta_\eta^2.$$

**Замечание 2.** Пусть удовлетворяются условия леммы 3 и функционал $\Omega[z]$ непрерывно дифференцируем по Фреше в некоторой окрестности точки $\overline{z}$, причем $\Omega'[\overline{z}] \neq 0$. Тогда можно доказать, что при достаточно малых $\eta$ выполняются неравенства из условий теоремы 2 и, кроме того, неравенство $\Omega[\widetilde{z}] < R_\eta$. Это означает, что при сделанных предположениях в этой теореме реализуется только вариант из пункта в). Для краткости доказательство этого утверждения опускается.

**6. Алгоритм приближенного вычисления точной верхней грани (8).** С практической точки зрения алгоритм должен формулироваться для задачи (1) и задач (10)–(12), подвергнутых конечномерной аппроксимации. Схему такой аппроксимации можно найти, например, в [4, 5]. Однако это потребует введения большого числа новых величин и обозначений. Поэтому ради краткости мы сформулируем алгоритм для введенных выше данных $\{A_h, u_\delta, \Omega, z_\eta, R_\eta, \Delta_\eta\}$ в рамках постановки задачи из раздела 4, считая справедливой теорему 2. Схема алгоритма такова.

*Предварительный шаг.* Задание множества допустимых значений параметров $\alpha,\beta$, которые будут использованы в алгоритме.

*Шаг 1.* Решение задачи (10) с помощью необходимых условий из п. а) теоремы 2:

А) нахождение решений $z^{\alpha\beta}$ уравнения $(E - \alpha A_h^* A_h - \beta\Omega')z = z_\eta - \alpha A_h^* u_\delta$ для допустимых значений параметров $\alpha > 0, \beta > 0$;
Б) выбор множества $\mathcal{A}_1 = \{(\alpha^*, \beta^*)\}$ параметров, для которых равенства $\Omega[z^{\alpha\beta}] = R_\eta$, $\|A_h z^{\alpha\beta} - u_\delta\| = \Delta_\eta$ выполнены с заданной (относительной) точностью $\varepsilon > 0$: $\dfrac{\big|\|A_h z^{\alpha^*\beta^*} - u_\delta\| - \Delta_\eta\big|}{\Delta_\eta} < \varepsilon$, $\dfrac{\big|\Omega[z^{\alpha^*\beta^*}] - R_\eta\big|}{R_\eta} < \varepsilon$;
В) нахождение числа $M_1 = \max\{\|z^{\alpha^*\beta^*} - z_\eta\| : (\alpha^*, \beta^*) \in \mathcal{A}_1\}$; если множество $\mathcal{A}_1$ пусто, то считаем $M_1 = 0$.

*Шаг 2.* Решение задачи (10) с помощью необходимых условий из п. б) теоремы 2:
А) нахождение решений $z^\beta$ уравнения $(\beta\Omega' + A_h^* A_h)z = A_h^* u_\delta$ для допустимых значений $\beta > 0$;
Б) выбор множества $\mathcal{A}_2 = \{\beta^*\}$ значений параметра, для которых с заданной точностью $\varepsilon$ выполнены равенства $\Omega[z^{\beta^*}] = R_\eta$, $\|A_h z^{\beta^*} - u_\delta\| = \Delta_\eta$;
В) нахождение числа $M_2 = \max\{\|z^{\beta^*} - z_\eta\| : \beta^* \in \mathcal{A}_2\}$; если $\mathcal{A}_2 = \emptyset$, то считаем $M_2 = 0$.

*Шаг 3.* Решение задачи (11) с помощью необходимых условий из п. в) теоремы 2:
А) нахождение решений $z^\alpha$ уравнения $(E - \alpha A_h^* A_h)z = z_\eta - \alpha A_h^* u_\delta$ для допустимых значений параметра $\alpha > 0$;
Б) выбор множества $\mathcal{A}_3 = \{\alpha^*\}$ тех значений параметра, для которых с заданной точностью $\varepsilon$ выполнено равенство $\|A_h z^{\alpha^*} - u_\delta\| = \Delta_\eta$ и $\Omega[z^{\alpha^*}] < R_\eta$;
В) нахождение числа $M_3 = \max\{\|z^{\alpha^*} - z_\eta\| : \alpha^* \in \mathcal{A}_3\}$; если $\mathcal{A}_3 = \emptyset$, то $M_3 = 0$.

*Шаг 4.* Решение задачи (12) с помощью необходимых условий из п. г) теоремы 2:
А) нахождение решений $z^\beta$ уравнения $(E - \beta\Omega')z = z_\eta$ для допустимых значений $\beta > 0$;
Б) выбор множества $\mathcal{A}_4 = \{\beta^*\}$ тех значений параметра, для которых с точностью $\varepsilon$ выполнено равенство $\Omega[z^{\beta^*}] = R_\eta$ и $\|A_h z^{\beta^*} - u_\delta\| < \Delta_\eta$;
В) нахождение числа $M_4 = \max\{\|z^{\beta^*} - z_\eta\| : \beta^* \in \mathcal{A}_4\}$; если $\mathcal{A}_4 = \emptyset$, то $M_4 = 0$.

*Шаг 5.* Нахождение элементов $z_1$, $z_2$, для которых нарушаются условия теоремы 2, т.е. решение уравнений $A_h^* A_h z_1 = A_h^* u_\delta$, $\Omega'[z_2] = 0$ и проверка ограничений $\Omega[z_{1,2}] \leqslant R_\eta$, $\|A_h z_{1,2} - u_\delta\| \leqslant \Delta_\eta$; нахождение числа $M_0 = \max\{\|z_1 - z_\eta\|, \|z_2 - z_\eta\|\}$. Если такие элементы $z_1$, $z_2$ не существуют, то считается, что $M_0 = 0$.

*Шаг 6.* Вычисление точной верхней грани (8): $\varepsilon_\Omega(\eta) = \max\{M_1, M_2, M_3, M_4, M_0\}$.

Справедливость последнего равенства следует из теоремы 2. Таким образом, предлагаемый алгоритм дает искомую апостериорную оценку точности приближенного решения $z_\eta$. Структура алгоритма не изменится при замене данных задачи $\{A_h, u_\delta, \Omega, z_\eta, R_\eta, \Delta_\eta\}$ на их конечномерные аналоги.

Сделаем некоторые замечания.

(i) На шаге 1 алгоритма допустимые параметры $\alpha$ и $\beta$ при практических расчетах обычно берутся на сетках вида

$$\alpha = \{\alpha_0 q_1^i,\ i = 0, 1, \ldots, m\}, \quad \beta = \{\beta_0 q_2^j,\ j = 0, 1, \ldots, n\}, \tag{14}$$

где $\alpha_0$, $\beta_0 > 0$, $0 < q_1, q_2 < 1$ и $m, n \in \mathbb{N}$ — заданные константы. Иногда максимальные значения параметров $\alpha_0$, $\beta_0$ удается оценить по схеме из [4, с. 154; 5, с. 308].

(ii) Уравнения, решаемые в пунктах А алгоритма, — это операторные (вообще говоря, нелинейные) уравнения 2-го рода, так что при некоторых параметрах $\alpha$, $\beta > 0$ они могут не иметь единственного решения.

(iii) Если верны условия из замечания 2, то при $0 < \|\eta\| \leqslant \eta_0$ можно выполнять только шаги 3 и 6 алгоритма. При этом в пункте А шага 3 нужно решать линейные операторные уравнения 2-го рода.

**7. Оптимальность по порядку оценочной функции (8) и экстраоптимальные алгоритмы.** В этом разделе считается, что $Z, U$ — банаховы пространства, функционал $\Omega[z]$ удовлетворяет условиям B1 и B2, операторы $A$, $A_h : Z \to U$ — линейные и ограниченные, причем оператор $A$ по-прежнему инъективный.

Введем число $R = \Omega[\overline{z}]$, множество $M_R = \{z \in \mathcal{D} : \Omega[z] \leqslant R\}$ и снова будем использовать множество ограничений $Z_{\Omega\eta} = \{z \in \mathcal{D} : \Omega[z] \leqslant R_\eta,\ \|A_h z - u_\delta\| \leqslant \Delta_\eta\}$ задачи (8).

**Теорема 3**. *Пусть, кроме перечисленных условий, при $0 < \|\eta\| \leqslant \eta_0$ выполнены неравенства*

$$R_\eta \leqslant C_0 R, \quad \Delta_\eta \leqslant C_0(\delta + hb), \tag{15}$$

*где $C_0 > 1$ — некоторая фиксированная константа, $b = \sup\{\|z\| : z \in M_R\}$. Тогда оценочная функция $\varepsilon_\Omega(\eta)$ из (8) имеет оптимальный порядок точности на множестве $M_R$: $\varepsilon_\Omega(\eta) \leqslant 16 C_0 \Delta_{\rm opt}(h, \delta, M_R)$.*

**Доказательство.** Сначала отметим, что вследствие условия B2 множество $M_R$ будет замкнутым и компактным, а значит, ограниченным в $Z$. Таким образом, величина $b$ — конечна.

Будем использовать оценочную функцию $\overline{\omega}(\tau, R) = \sup\{\|z_1 - z_2\| : z_1, z_2 \in M_R, \|A_h z_1 - A_h z_2\| \leqslant \tau\}$, которая, согласно [10, с. 11], имеет следующие свойства:

$$\begin{aligned}
&\overline{\omega}(\tau_1, R) \leqslant \overline{\omega}(\tau_2, R) && \forall \tau_1,\, \tau_2 : 0 < \tau_1 \leqslant \tau_2,\\
&\overline{\omega}(\gamma\tau, \gamma R) = \gamma\overline{\omega}(\tau, R) && \forall \tau > 0, \quad \gamma > 0,\\
&\overline{\omega}(\tau, C_1 R) \leqslant \overline{\omega}(\tau, C_2 R) && \forall \tau > 0, \quad \forall C_1,\, C_2 : 0 < C_1 \leqslant C_2.
\end{aligned}$$

Из первого неравенства (15) вытекает, что $z_\eta \in M_{C_0 R}$. Далее, из условий (15) для произвольного элемента $z \in Z_{\Omega\eta}$ следует: $z \in M_{C_0 R}$ и $\|A_h z - A_h z_\eta\| \leqslant \|A_h z - u_\delta\| + \|A_h z_\eta - u_\delta\| \leqslant 2\Delta_\eta \leqslant 2C_0(\delta + hb)$. Поэтому, используя определения величины $\varepsilon_\Omega(\eta)$ и вытекающее из (15) включение $z_\eta \in M_{C_0 R}$, с помощью свойств функции $\overline{\omega}(\tau, R)$ получим цепочку неравенств

$$\begin{aligned}
\varepsilon_\Omega(\eta) &= \sup_z \{\|z - z_\eta\| : z \in M_R, \|A_h z - u_\delta\| \leqslant \Delta_\eta\} \leqslant\\
&\leqslant \sup_z \{\|z - z_\eta\| : z \in M_{C_0 R}, \|A_h z - A_h z_\eta\| \leqslant 2C_0(\delta + hb)\} \leqslant\\
&\leqslant \sup_{z_1, z_2} \{\|z_1 - z_2\| : z_{1,2} \in M_{C_0 R}, \|A_h z_1 - A_h z_2\| \leqslant 2C_0(\delta + hb)\} = \overline{\omega}\big(2C_0(\delta + hb), C_0 R\big) =\\
&= 4C_0\overline{\omega}\left(\frac{\delta + hb}{2}, \frac{R}{4}\right) \leqslant 4C_0\overline{\omega}\left(2\delta + \frac{hb}{2}, \frac{R}{4}\right) \leqslant 4C_0\overline{\omega}\left(2\delta + \frac{hb}{2}, R\right) \leqslant 16C_0\Delta_{\mathrm{opt}}(h, \delta, M_R).
\end{aligned}$$

Последнее неравенство следует из оценки для оптимальной точности алгоритма, приведенной в [10, с. 17]: $\frac{1}{4}\overline{\omega}\left(2\delta + \frac{hb}{2}, R\right) \leqslant \Delta_{\mathrm{opt}}(h, \delta, M_R)$. Теорема доказана.

**Замечание 3.** Условия (15) выполнены (при достаточно малых $h$, $\delta$) для любого РА, приближенные решения которого удовлетворяют неравенствам

$$\Omega[z_\eta] \leqslant C^*\Omega[\overline{z}], \quad \|A_h z_\eta - u_\delta\| \leqslant C^*\big(\delta + h\,\|z_\eta\|\big) \tag{16}$$

с некоторой константой $C^* > 1$. Такие приближенные решения можно получить, например, применяя метод регуляризации А.Н. Тихонова со сглаживающим функционалом $M^\alpha[z] = \alpha\Omega[z] + \|A_h z - u_\delta\|_U^2$, $z \in Z$. Будем выбирать параметр $\alpha = \alpha_\eta$ по одному из вариантов обобщенного принципа невязки (ОПН), а именно: из условия $\|A_h z^{\alpha_\eta} - u_\delta\|_U = \delta + h\,\|z^{\alpha_\eta}\|_Z$ (см., например, [4, 5]), и задавать приближенное решение в виде $z_\eta = z^{\alpha_\eta}$. В случае если $Z$ — гильбертово пространство, выполнены условия B1 и B2 и уравнение (1) имеет единственное решение $\overline{z} \in Z$, то такой вариант ОПН обеспечивает сходимости $z^{\alpha_\eta} \to \overline{z}$, $\Omega[z^{\alpha_\eta}] \to \Omega[\overline{z}]$ $(\eta \to 0)$. Отсюда следует справедливость соотношений (16) при $0 < \|\eta\| \leqslant \eta_0$. Аналогичные рассуждения верны и для выбора параметра регуляризации по обобщенному принципу сглаживающего функционала, а также при использовании обобщенного метода невязки и некоторых других алгоритмов [4, 5].

**Определение.** Регуляризующий алгоритм $z_\eta = R_\eta(A_h, u_\delta, h, \delta)$ называется *экстраоптимальным*, если апостериорная оценка его точности — функция $\varepsilon_\Omega(\eta)$ вида (8) — является оптимальной по порядку точности на множестве $M_R$.

Из теоремы 3 и замечания 3 ясно, что достаточным условием экстраоптимальности регуляризующего алгоритма является выполнение неравенств (16). Другим следствием теоремы 3 и неравенства (6) оказывается то, что экстраоптимальный РА оптимален по порядку на $M_R$. Обратное, вообще говоря, неверно: не всякий оптимальный по порядку на $M_R$ регуляризующий алгоритм будет экстраоптимальным.

Приведем соответствующий пример — задачу, для которой тихоновский алгоритм с оптимальным выбором параметра регуляризации не будет экстраоптимальным. Предположим, что $Z = \mathcal{D} = U = l_2$ и $z = (z_1, z_2, \dots)^{\mathrm{T}} \in Z$. Рассмотрим операторное уравнение (1) с оператором, действующим в $l_2$ и определяемым бесконечной диагональной матрицей $A = \mathrm{diag}\,(1, q, q^2, \dots, q^n, \dots)$, $0 < q = \mathrm{const} < 1$. Правая часть уравнения задана как $u = (1, 0, 0, \dots)^{\mathrm{T}} \in U$. Тогда уравнение имеет единственное решение $\overline{z} = (1, 0, 0, \dots)^T \in Z$. Приближенные данные задачи определим в виде $\{A_n, u_n, h_n, \delta_n\}$. Здесь $A_n = \mathrm{diag}\,(1, q, q^2, \dots, q^n, 0, 0, \dots)$, $u_n = (1, 0, 0, \dots, q^{3n}, 0, 0, \dots)^{\mathrm{T}}$, причем число $q^{3n}$ стоит на $(n+1)$-й позиции. Погрешности данных определяются как $\delta_n = q^{3n}$, $h_n = q^{n+1} + q^{n+2} + \ldots = \dfrac{q^{n+1}}{1-q}$. Применим для нахождения приближенного решения этой задачи метод регуляризации А.Н. Тихонова с $\Omega[z] = \|z\|^2$:

$$z^\alpha = (\alpha E + A_n^* A_n)^{-1} A_n^* u_n = (z_1^\alpha, 0, \ldots, 0, z_{n+1}^\alpha, 0, 0, \ldots)^{\mathrm{T}}; \quad z_1^\alpha = \frac{1}{1+\alpha}, \quad z_{n+1}^\alpha = \frac{q^{4n}}{\alpha + q^{2n}}.$$

Отсюда $\|z^\alpha - \overline{z}\|^2 = \dfrac{\alpha^2}{(1+\alpha)^2} + \left(\dfrac{q^{4n}}{\alpha + q^{2n}}\right)^2$.

Выберем оптимальный параметр $\alpha > 0$, минимизирующий эту ошибку приближенного решения. В итоге при $n \to \infty$ получим: $\alpha_{\rm opt} = \alpha_n \sim c_1 q^{2n}$, $\|z^{\alpha_n} - \overline{z}\| = \Delta_{\rm opt} \sim c_2 q^{2n}$, $\|A_n z^{\alpha_n} - u_n\| \sim c_3 q^{2n}$, где $c_{1-3} = \mathrm{const} > 0$.

Изучим теперь для приближенного решения $z_\eta = z^{\alpha_{\rm opt}} = z^{\alpha_n}$ апостериорную оценку точности: $\varepsilon_\Omega(\eta) = \sup\left\{\|z - z_\eta\| : \|z\| \leqslant R_\eta, \|A_n z - u_n\| \leqslant \Delta_\eta\right\}$, где $R_\eta = C\|z^{\alpha_n}\|$, $\Delta_\eta = C\|A_n z^{\alpha_n} - u_n\|$. Так как $\|z^{\alpha_n}\| \to \|\overline{z}\| = 1$, то при достаточно больших $n$ выполнены неравенства $R_\eta = C\|z^{\alpha_n}\| \geqslant C_1 = \mathrm{const} > 1$, $\Delta_\eta \geqslant c_4 q^{2n}$, $c_4 = \mathrm{const} > 0$, и верна оценка

$$\begin{aligned} \varepsilon_\Omega^2(\eta) &\geqslant \sup\left\{\|z - z_\eta\|^2 : \Omega[z] \leqslant C_1, \|A_n z - u_n\| \leqslant c_4 q^{2n}\right\} \geqslant \\ &\geqslant \sup\left\{(x - x_n)^2 + (y - y_n)^2 : x^2 + y^2 \leqslant C_1^2, (x-1)^2 + (q^n y - q^{3n})^2 \leqslant c_4^2 q^{4n}\right\} \geqslant \\ &\geqslant (x^* - x_n)^2 + (y^* - y_n)^2. \end{aligned} \tag{17}$$

Здесь $x_n \sim \dfrac{1}{1 + c_1 q^{2n}}$ и $y_n \sim \dfrac{q^{2n}}{c_1 + 1}$ — неравные нулю координаты приближенного решения $z_\eta = z^{\alpha_n}$, а числа $x^*$ и $y^*$ выбраны в виде $x^* = 1$ и $y^* = \dfrac{c_4}{2} q^n$ так, чтобы при достаточно больших $n$ были справедливы неравенства $(x^*)^2 + (y^*)^2 \leqslant C_1^2$, $(x^* - 1)^2 + (q^n y^* - q^{3n})^2 \leqslant c_4^2 q^{4n}$. Из (17) следует, что

$$\varepsilon_\Omega(\eta) \geqslant y^* - y_n = q^n\left(\frac{c_4}{2} - \frac{q^n}{c_1 + 1}\right) \geqslant \frac{c_4}{4} q^n \geqslant \mathrm{const} \times \|z^{\alpha_n} - \overline{z}\|^{1/2} = \mathrm{const} \times \Delta_{\rm opt}^{1/2} \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Таким образом, апостериорная оценка точности (8) в данном примере не будет оптимальной по порядку и рассматриваемый РА для данной задачи не является экстраоптимальным. Однако при этом он будет оптимальным по точности.

**8. Численный эксперимент: вычисление апостериорной оценки в экстраоптимальном РА.** Рассмотрим интегральное уравнение первого рода $Az = \displaystyle\int_0^1 \frac{z(s)\,dx}{1 + 100(s-x)^2} = u(x)$, $x \in [0,1]$, с точным решением $\overline{z}(s) = s(1 - s^2)^2 \in W_2^1[0,1]$. Считаем $Z = U = L_2[0,1]$, $\mathcal{D} = W_2^1[0,1]$ и будем использовать регуляризатор $\Omega[z] = \|z\|^2_{W_2^1[0,1]}$. Вычислим по решению $\overline{z}(s)$ правую часть уравнения $u(x)$ и наложим на нее аддитивную нормально распределенную помеху с нулевым средним так, чтобы приближенная правая часть $u_\delta$ имела относительную ошибку $\dfrac{\|u_\delta - u\|_{L_2[0,1]}}{\|u\|_{L_2[0,1]}} = \delta = 0.01$. После дискретизации задачи на равномерных сетках $\left\{x_i = \dfrac{i-1}{N-1}, i = 1, \ldots, N\right\}$ для $x$, $s$ с $N = 110$ и аппроксимации оператора $A$ по формуле трапеций решим полученную систему линейных уравнений с приближенными (сеточными) данными по методу регуляризации А.Н. Тихонова. Параметр регуляризации выберем по обобщенному принципу невязки. На рис. 1а показано точное решение и вычисленное приближенное решение $z_\eta$. Относительная точность полученного приближения составляет $\dfrac{\|z_\eta - \overline{z}\|_{L_2[0,1]}}{\|\overline{z}\|_{L_2[0,1]}} = \Delta_{L_2} = 0.018$.

Рассматриваемая в данном примере постановка задачи с $H = W_2^1[0,1]$ оказывается частным случаем той, которая изучалась в разделе 4. Это позволяет получить апостериорную оценку точности приближения $z_\eta$ с помощью приведенного в разделе 5 алгоритма, находя решение $\widetilde{z}_\eta$ экстремальной задачи (8). Тогда по формуле $\varepsilon_\Omega(\eta) = \dfrac{\|\widetilde{z}_\eta - z_\eta\|_{L_2[0,1]}}{\|z_\eta\|_{L_2[0,1]}}$ можно найти относительную апостериорную оценку точности для вектора погрешностей $\eta = (h, \delta)$, у которого $\delta = 0.01$, а погрешность оператора $h$ определяется его сеточной аппроксимацией.

В результате применения алгоритма из раздела 5 получилось: $M_1 = 0.062$, $M_3 = 0.053$, $M_4 = 0.005$, а множества $\mathcal{A}_2$ и $\mathcal{A}_0$ оказались пустыми. Поэтому $\varepsilon_\Omega(\eta) = 0.062$. График функции $\widetilde{z}_\eta(s)$, реализующей равенство (8) и найденной на шаге 1, показан на рис. 1а линией с точками.

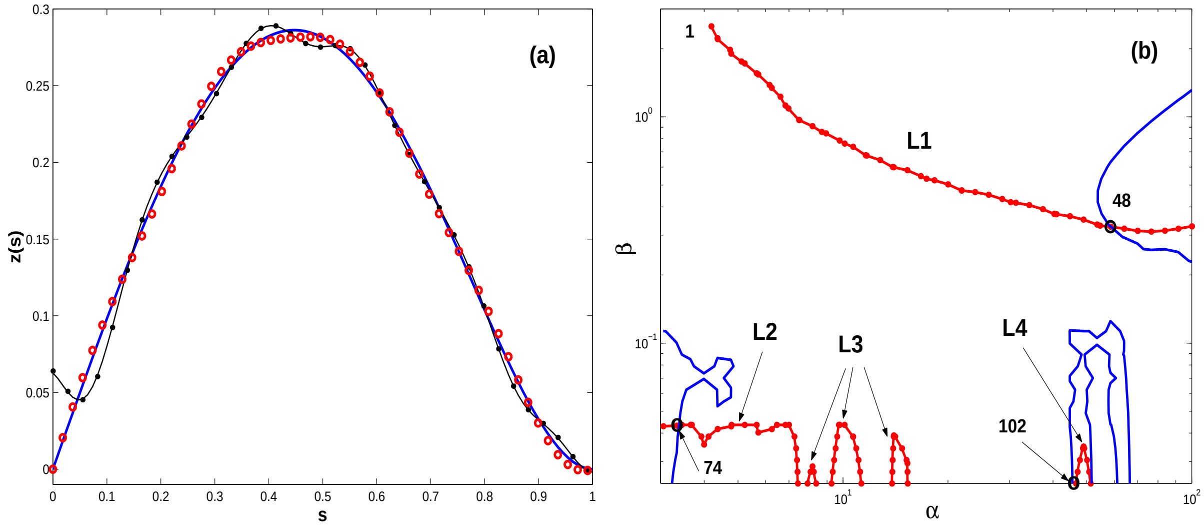


Рис. 1. a) Точное решение $\bar{z}(s)$ (непрерывная линия), приближенное решение $z_\eta$ (линия с кружками), элемент $\tilde{z}_\eta$ — решение задачи (8) (линия с точками); b) линии уровня (18) функций $N(\alpha,\beta) = \left\| A_h z^{\alpha\beta} - u_\delta \right\|_U^2$ (непрерывная линия) и $G(\alpha,\beta) = \Omega\left[z^{\alpha\beta}\right]$ (линия с точками)

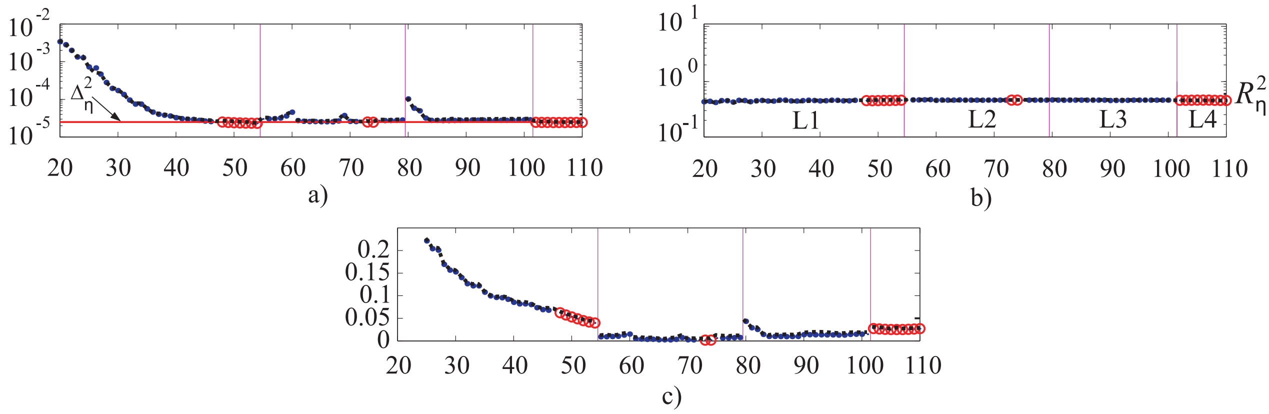


Рис. 2. Иллюстрация к шагу 1 алгоритма: a) функция $N(\alpha,\beta)$ вдоль линии уровня $G(\alpha,\beta) = R_\eta^2$ и ее сравнение с числом $\Delta_\eta^2$; b) вычисленные на этой линии уровня величины $G(\alpha,\beta)$ в сравнении с числом $R_\eta^2$ (тест на постоянство значений $G(\alpha,\beta)$); c) оценка погрешности $E(\alpha,\beta) = \dfrac{\left\| z^{\alpha\beta} - z_\eta \right\|_{L_2[0,1]}}{\left\| z_\eta \right\|_{L_2[0,1]}}$ вдоль линии $G(\alpha,\beta) = R_\eta^2$. По оси абсцисс отложены номера точек вдоль линии уровня

Проиллюстрируем графически результаты расчетов по шагам 1, 3 и 4 алгоритма. Итоговая апостериорная оценка погрешности получена при решении задачи (10) в случае a) из теоремы 2, т.е. при выполнении шага 1.

На рис. 1b показаны вычисленные для этого случая линии уровня функций $N(\alpha,\beta) = \left\| A_h z^{\alpha\beta} - u_\delta \right\|_U^2$ и $G(\alpha,\beta) = \Omega\left[z^{\alpha\beta}\right]$:

$$N(\alpha,\beta) = \Delta_\eta^2 = C^2 \left\| A_h z_\eta - u_\delta \right\|_U^2, \quad G(\alpha,\beta) = R_\eta^2 = C^2 \Omega\left[z_\eta\right], \quad C = 1.01. \tag{18}$$

Интересно проследить поведение этих функций, а также функции $E(\alpha,\beta) = \dfrac{\left\| z^{\alpha\beta} - z_\eta \right\|_{L_2[0,1]}}{\left\| z_\eta \right\|_{L_2[0,1]}}$, которая используется для вычисления величины $\varepsilon_\Omega(\eta)$, вдоль линии уровня $G(\alpha,\beta) = R_\eta^2$ (см. рис. 2). Для удобства просмотра на рис. 1b показаны номера нескольких точек этой линии и метками вида L1, L2, ... отмечены характерные ее части. Это позволяет анализировать изменения функций $N(\alpha,\beta)$ и $E(\alpha,\beta)$ вдоль линии уровня, т.е. при увеличении номера точки, сравнивая рис. 1b с рис. 2a и 2b. На рис. 2a и 2b кружками выделены те номера, где с допустимой точностью выполняются оба равенства (18). Аналогично, на рис. 2c, который показывает вычисление величины $M_1$, отмечены точки, подозрительные на максимум в шаге 1.

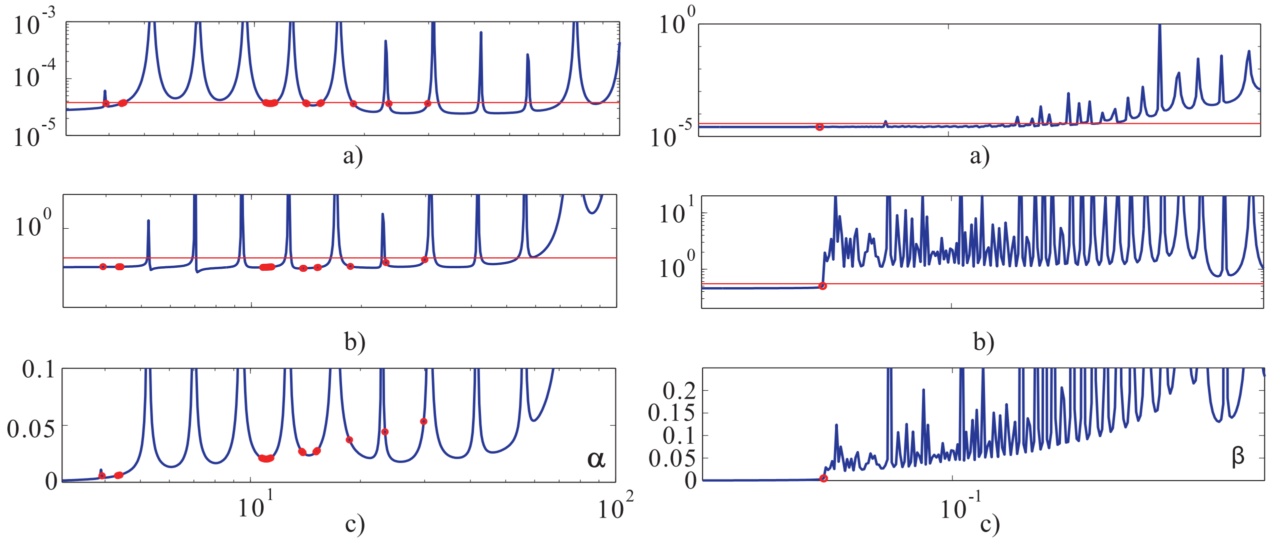


Рис. 3. Иллюстрация к шагам 3, 4 алгоритма: a) функция $N(\alpha, 0)$ (слева) и $N(0, \beta)$ (справа) в сравнении с величиной $\Delta_\eta^2$; b) функция $G(\alpha, 0)$ (слева) и $G(0, \beta)$ (справа) в сравнении с величиной $R_\eta^2$; c) оценки погрешности $E(\alpha, 0)$ (слева) и $E(0, \beta)$ (справа). Жирными точками отмечены множества $\mathcal{A}_3 = \{\alpha^*\}$ и $\mathcal{A}_4 = \{\beta^*\}$ из шагов 3, 4 алгоритма. Горизонтальные линии на рисунках a) и b) соответствуют уровням $\Delta_\eta^2$ и $R_\eta^2$

Теперь обсудим результаты решения задач (11) и (12) при выполнении шагов 3 и 4 алгоритма. На рис. 3 слева представлены графики функций, вычисленных на шаге 3. Справа приведены их аналоги для шага 4. "Подозрительные" на оптимальность множества параметров $\mathcal{A}_3 = \{\alpha^*\}$ и $\mathcal{A}_4 = \{\beta^*\}$ выделены жирными точками слева и справа соответственно. Асимптотический рост функций в некоторых точках $\alpha$, $\beta$ связан с тем, что эти значения параметров оказываются спектральными для линейных операторных уравнений второго рода из алгоритма.

Линии уровня (18) находились на шаге 1 при помощи метода, аналогичного заложенному в процедуру contour пакета МАТЛАБ, с первоначальной сеткой параметров $(\alpha, \beta)$ вида (14) и размера $50 \times 50$ (с последующим уточнением сетки на линиях уровня). На шагах 3, 4 использовались сетки типа (14) из 500 точек на линиях $\beta = 0$ и $\alpha = 0$. Оказалось, что для таких сеток время вычисления апостериорной оценки погрешности $t_{\text{apost}}$ в рассматриваемом примере соотносится со временем расчета самого приближенного решения $t_{\text{approx}}$ (включая процедуру выбора параметра регуляризации) как $\dfrac{t_{\text{apost}}}{t_{\text{approx}}} \approx 150$.

Приведенный пример показывает возможность эффективной реализации предложенной процедуры апостериорной оценки точности в использованном экстраоптимальном варианте регуляризующего алгоритма А. Н. Тихонова.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979.
2. *Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П.* Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978.
3. *Морозов В.А.* Регулярные методы решения некорректно поставленных задач. М.: Наука, 1987.
4. *Тихонов А.Н., Леонов А.С., Ягола А.Г.* Нелинейные некорректные задачи. М.: Наука, 1995.
5. *Леонов А.С.* Решение некорректно поставленных обратных задач. Очерк теории, практические алгоритмы и демонстрации в МАТЛАБ. М.: УРСС, 2009.
6. *Винокуров В.А.* О порядке погрешности вычисления функции с приближенно заданным аргументом // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 1973. **13**, № 5. 1112–1123.
7. *Танана В.П.* Методы решения операторных уравнений. М.: Наука, 1981.
8. *Вайникко Г.М.* Методы решения линейных некорректно поставленных задач в гильбертовых пространствах. Тарту: Изд-во ТГУ, 1982.
9. *Бакушинский А.Б., Гончарский А.В.* Итеративные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1989.

10. *Танана В.П., Рекант М.А., Янченко С.И.* Оптимизация методов решения операторных уравнений. Свердловск: Изд-во Уральского ун-та, 1987.
11. *Engl H.W., Hanke M., Neubauer A.* Regularization of inverse problems. Dordrecht: Kluwer Academic Publ., 1996.
12. *Домбровская И.Н., Иванов В.К.* К теории линейных уравнений в абстрактных пространствах // Сиб. матем. журн. 1965. **6**, № 3. 499–508.
13. *Гапоненко Ю.Л., Винокуров В.А.* Апостериорные оценки решения некорректных обратных задач // Докл. АН СССР. 1982. **263**, № 2. 277–280.
14. *Ягола А.Г., Дорофеев К.Ю.* Метод расширяющихся компактов решения некорректных задач при условии истокопредставимости // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физика. Астрономия. 1999. № 2. 64–66.
15. *Дорофеев К.Ю., Титаренко В.Н., Ягола А.Г.* Алгоритмы построения апостериорных оценок погрешностей для некорректных задач // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 2003. **43**, № 1. 12–25.
16. *Ягола А.Г., Николаева Н.Н., Титаренко В.Н.* Оценка погрешности решения уравнения Абеля на множествах монотонных и выпуклых функций // Сиб. журн. вычисл. матем. 2003. **6**, № 2. 171–180.
17. *Иоффе А.Д., Тихомиров В.М.* Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974.
18. *Галеев Э.М.* Оптимизация. Теория. Примеры. Задачи. М.: УРСС, 2002.
19. *Васильев Ф.П.* Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2002.

Поступила в редакцию
7.12.2009