

УДК 533.4/6

АНАЛИТИЧЕСКОЕ И ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ ГАЗА В КОЖУХЕ С ВРАЩАЮЩИМСЯ ДИСКОМ

Е. В. Ворожцов¹

Анализируется известное приближенное аналитическое решение задачи о течении газа, вызванном вращением диска внутри замкнутого кожуха. Показано, что это решение неприменимо из-за появления нефизичной отрицательной толщины пограничного слоя в окрестности вала. Получены новые аналитические решения для параметров течения внутри пограничного слоя у неподвижного основания кожуха для нескольких степеней аппроксимирующих полиномов. С целью уменьшения расхождения между аналитическим решением и прямым разностным решением трехмерных уравнений Навье–Стокса предложено учитывать момент силы вязкого трения на боковой стенке. Это позволило значительно улучшить точность приближенного аналитического решения.

Ключевые слова: вращение диска в кожухе, вязкая несжимаемая жидкость, аналитическое решение, цилиндрические координаты, конечно-разностный метод.

1. Введение. Согласно [1], затраты электроэнергии на вентиляцию (транспортировка и подогрев) изменяются на промышленных предприятиях России в пределах от 15 до 75% общего энергопотребления. В этой связи актуальна задача разработки высокоэффективных и экономичных вентиляционных устройств для перекачивания газов, очистки газов и жидкостей от примесей в различных отраслях промышленности и сельского хозяйства. Можно выделить следующие типы вентиляторов: центробежные, осевые и дисковые. Дисковые вентиляторы можно отнести к машинам трения. Они отличаются от традиционных центробежных и осевых вентиляторов, которые являются машинами динамического действия. Если в традиционных вентиляторах силы вязкого трения перекачиваемой среды о поверхности крыльчаток и лопастей являются отрицательным фактором, то в дисковых вентиляторах, наоборот, среда захватывается дисками, фиксируется в междисковом пространстве и вовлекается во вращательное движение благодаря вязкому трению. Возникающая при этом центробежная сила обеспечивает транспортировку газа или жидкости.

Впервые фрикционный принцип предложил применять в вентиляторах Н. Тесла [2]. Вид простейшего (модельного) дискового вентилятора показан на рис. 1. Верхняя крышка кожуха удалена для того, чтобы более наглядно показать особенности дизайна дискового вентилятора. Стрелки, направленные влево, показывают направление движения газа, засасываемого в вентилятор, а стрелки, направленные вправо, показывают направление движения газа, выбрасываемого из вентилятора (диски вращаются против часовой стрелки). Модельный вентилятор, представленный на рис. 1, содержит только два диска. В реальных промышленных дисковых вентиляторах число дисков на валу может составлять несколько десятков.

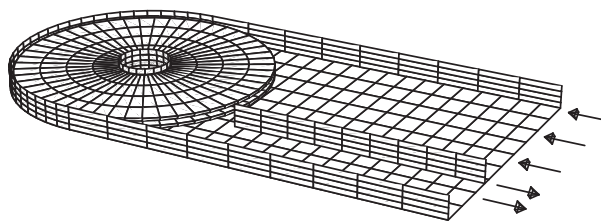


Рис. 1. Простейший дисковый вентилятор

Дисковые вентиляторы применяются как в промышленности, так и в сельском хозяйстве [3–6]. Дисковые машины обладают следующими достоинствами [6]: простота конструкции, высокие антикавитационные характеристики, малозумность, устойчивость работы и стабильность подачи.

Как следует из рис. 1, течение газа внутри дискового вентилятора не может быть осесимметричным из-за наличия каналов с параллельными стенками. Поэтому численное моделирование течения газа внутри рассматриваемого вентилятора должно базироваться на математической модели трехмерного нестационарного течения. В существующих дисковых вентиляторах угловая скорость вращения дисков

¹ Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, ул. Институтская, 4/1, 630090, г. Новосибирск; вед. науч. сотр., e-mail: vorozh@itam.nsc.ru

невелика, она варьируется от 20 до 100 об/мин. Поэтому число Маха потока газа, как показывают не сложные оценки, не превышает 0.05. В этой связи для численного моделирования течений газа в дисковом вентиляторе можно применять математическую модель несжимаемой вязкой жидкости, которая известна как система уравнений Навье–Стокса. Эта система аппроксимировалась конечно-разностной схемой, описанной в [7]. Вследствие того что в конструкции дискового вентилятора имеются твердые стенки, не совпадающие с координатными линиями, удобно применять для расчета течения газа в таких вентиляторах метод погруженных границ, описанный в [8].

Для верификации разработанной компьютерной программы, реализующей метод погруженных границ, мы использовали два известных аналитических решения. Одно из них — решение задачи о течении Куэтта между двумя соосными цилиндрами [9]. Если увеличить в дисковом вентиляторе толщину каждого диска так, что все диски сольются в один вращающийся цилиндр, то приходим к задаче Куэтта. В качестве второго аналитического теста для компьютерной программы было взято приближенное аналитическое решение, полученное в [10] для случая вращения одного диска в замкнутом цилиндрическом кожухе. Основные результаты [10] были затем воспроизведены без изменения в книге [11] и в более сокращенном виде в книге [12]. На рис. 2 показан замкнутый цилиндрический кожух с диском внутри него; часть передней вертикальной стенки кожуха удалена, чтобы показать внутренность кожуха.

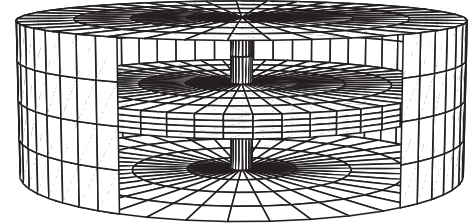


Рис. 2. Замкнутый цилиндрический кожух с одним диском на валу

Согласно [12], если зазор между плоскостью диска и основанием кожуха меньше, чем сумма толщин пограничных слоев, возникающих на диске и основании кожуха, то получается движение, аналогичное тому, которое имеет место под обильно смазанной пятбой и описывается в гидродинамической теории трения. Более сложным является случай, когда на рассматриваемых поверхностях образуются пограничные слои, не перекрывающиеся друг друга и взаимодействующие между собой через разделяющую их область “внешнего” потока. Этот случай и был рассмотрен впервые в [10].

Реализация точного решения [10] на компьютере показала, что приводимая в [10–12] формула для толщины пограничного слоя $\delta_0(r)$ на неподвижном основании кожуха дает отрицательные значения $\delta_0(r)$ вблизи вала ротора. Целью настоящей статьи является устранение этого недостатка решения [10] и получение ряда новых приближенных аналитических решений задачи о течении вязкого газа в кожухе с вращающимся диском для случая, когда пограничные слои на диске и основании кожуха не перекрывают друг друга.

2. Основные уравнения и конечно-разностный метод. Уравнения Навье–Стокса, описывающие нестационарные трехмерные ламинарные течения вязкой несжимаемой жидкости в цилиндрических координатах θ, r, z , где θ — азимутальная координата, r — полярный радиус, а ось z направлена вдоль оси, на которой закреплены диски, можно записать в виде [7]

$$\begin{cases} \frac{\partial v_\theta}{\partial t} = H_1 - \frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + (A_{1\theta} + A_{1r} + A_{1z})v_\theta, \\ \frac{\partial q_r}{\partial t} = H_2 - \frac{r}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + (A_{2\theta} + A_{2r} + A_{2z})q_r, \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} = H_3 - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + (A_{3\theta} + A_{3r} + A_{3z})v_z, \\ \frac{\partial q_r}{\partial r} + \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + r \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

$$\frac{\partial q_r}{\partial r} + \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + r \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} H_1 &= -\frac{1}{r^2} \frac{\partial r v_\theta q_r}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta^2}{\partial \theta} - \frac{\partial v_\theta v_z}{\partial z} + \frac{2\nu}{r^3} \frac{\partial q_r}{\partial \theta}; & H_2 &= -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{q_r^2}{r} \right) - \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{v_\theta q_r}{r} \right) - \frac{\partial q_r v_z}{\partial z} + v_\theta^2 + \frac{2\nu}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}; \\ H_3 &= -\frac{1}{r} \frac{\partial q_r v_z}{\partial r} - \frac{\partial v_z^2}{\partial z}; & A_{1\theta} v_\theta &= \nu \left(-\frac{v_\theta}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} \right); & A_{1r} v_\theta &= \nu \left[\frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right) - \frac{v_\theta}{r^2} \right]; \\ A_{1z} v_\theta &= \nu \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2}; & A_{2\theta} q_r &= \frac{\nu}{r^2} \frac{\partial^2 q_r}{\partial \theta^2} - \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{v_\theta q_r}{r} \right); & A_{2r} q_r &= \nu r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial q_r}{\partial r} \right); & A_{2z} q_r &= \nu \frac{\partial^2 q_r}{\partial z^2}; \\ A_{3\theta} v_z &= \frac{\nu}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta v_z}{\partial \theta}; & A_{3r} v_z &= \frac{\nu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right); & A_{3z} v_z &= \nu \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}. \end{aligned}$$

Уравнения (1) — это уравнения количества движения, а (2) — уравнение неразрывности. В (1), (2) v_θ , v_r и v_z — составляющие вектора скорости газа вдоль осей θ , r , z соответственно, причем вместо v_r использована зависимая переменная $q_r = r v_r$ с целью облегчить решение проблемы аппроксимации уравнений Навье–Стокса в точке $r = 0$; p — давление; $\rho = \text{const} > 0$ — плотность газа или жидкости; $\nu = \mu/\rho$, где $\mu = \text{const} > 0$ — коэффициент динамической вязкости газа.

Приведем граничные условия для системы уравнений (1), (2).

1°. Граничные условия на горизонтальных поверхностях вращающегося диска: $v_r = 0$, $v_\theta = \omega r$, $v_z = 0$, $\partial p/\partial z = 0$, где ω — заданная постоянная угловая скорость вращения диска.

2°. Граничные условия на неподвижных торцах цилиндрического кожуха: $v_r = 0$, $v_\theta = 0$, $v_z = 0$, $\partial p/\partial z = 0$.

3°. Граничные условия на валу и на торце вращающегося диска: $v_r = 0$, $v_\theta = \omega r$, $v_z = 0$, $\partial p/\partial r = \rho\omega^2 r$. Таким образом, граничные условия на твердых стенках для составляющих скорости являются условиями прилипания.

Предварительное поле скоростей рассчитывалось по одностадийной разностной схеме из [13]. Кратко опишем эту схему. Пусть $q_1 \equiv v_\theta$, $q_2 \equiv q_r$ и $q_3 = v_z$. Тогда схема из [13] применительно к системе (1) имеет вид

$$\frac{\hat{q}_i - q_i^n}{\tau_n} = \frac{3H_i^n - H_i^{n-1}}{2} - G_i p^n + \frac{(A_{i\theta h} + A_{irh} + A_{izh})(\hat{q}_i + q_i^n)}{2}, \quad (3)$$

где $i = 1, 2, 3$; τ_n — временной шаг; n — номер временного слоя, $n = 0, 1, 2, \dots$; $A_{i\theta h}$, A_{irh} , A_{izh} — аппроксимации операторов $A_{i\theta}$, A_{ir} , A_{iz} с помощью центральных разностей на неравномерной пространственной сетке соответственно; $G_i p^n$ — разностная аппроксимация члена давления в i -м уравнении. Непосредственное решение системы алгебраических уравнений (3) весьма трудоемко, поэтому в [7, 8, 13] вместо (3) применялась схема приближенной факторизации

$$\left(I - \frac{\tau_n}{2} A_{i\theta h}\right) \left(I - \frac{\tau_n}{2} A_{irh}\right) \left(I - \frac{\tau_n}{2} A_{izh}\right) \Delta \hat{q}_i = \tau_n \left[\frac{3H_i^n - H_i^{n-1}}{2} - G_i p^n + (A_{i\theta h} + A_{irh} + A_{izh}) q_i^n \right], \quad (4)$$

где I — единичный оператор, $\Delta \hat{q}_i = \hat{q}_i - q_i^n$ и $\alpha = 0,5\tau_n$. Согласно [13], схема (4) имеет второй порядок точности по пространственным переменным и по времени.

Чтобы обеспечить сохранение массы, на втором дробном шаге поле промежуточных скоростей корректируется по формуле

$$\frac{q_i^{n+1} - \hat{q}_i}{\tau_n} = -G_i \varphi^{n+1}, \quad (5)$$

где поправка давления φ^{n+1} вычисляется так, чтобы получить бездивергентное поле скоростей на $(n+1)$ -м временном шаге. Для этого воздействуем на обе части уравнения (5) оператором дивергенции

$$\frac{\nabla_h q_i^{n+1} - \nabla_h \hat{q}_i}{\tau_n} = -\nabla_h G_i \varphi^{n+1}, \quad (6)$$

где разностный оператор ∇_h — это разностная аппроксимация оператора дивергенции в левой части (2): $\nabla q = \frac{\partial q_1}{\partial \theta} + \frac{\partial q_2}{\partial r} + r \frac{\partial q_3}{\partial z}$, а $L_h = \nabla_h G_i \varphi$ — разностная аппроксимация эллиптического оператора $\nabla G_i \varphi = \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + r \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$. С учетом требования $\nabla_h q_i^{n+1} = 0$, уравнение (6) — уравнение Пуассона для φ^{n+1} . Найдя φ^{n+1} из решения уравнения Пуассона (6), вычисляем давление p^{n+1} по следующей формуле [7, 8]: $p^{n+1} = p^n + \varphi^{n+1} - \frac{\tau_n}{2} \nu L_h \varphi^{n+1}$. Решение системы уравнений (4) находилось с помощью трех скалярных прогонок. Уравнение Пуассона (6) решалось с помощью спектрально-разностного метода, описанного в [14]. Поскольку решение 2π -периодическое по переменной θ , сначала осуществлялось дискретное преобразование Фурье разностного уравнения (6) по θ . Полученная система линейных алгебраических уравнений для комплексных коэффициентов дискретного преобразования Фурье затем решалась методом матричной прогонки [15]. Прямое и обратное дискретное преобразование Фурье осуществлялось с помощью алгоритмов быстрого дискретного преобразования Фурье, описанных в [16].

При счете стационарных задач методом установления по вышеописанному конечно-разностному методу применялся следующий критерий сходимости:

$$\max_{j,k,l} \left[\frac{1}{\tau_n} \max_{1 \leq i \leq 3} |q_{i,j,k,l}^{n+1} - q_{i,j,k,l}^n| \right] < \varepsilon, \tag{7}$$

где j, k, l — индексы ячейки пространственной сетки и ε — заданное малое положительное число.

3. Течение Куэтта. Численные расчеты этой задачи были проведены с целью верификации конечно-разностного метода, описанного в разделе 2, для случая, когда внутренний цилиндр вращается, а внешний покоится. Течение Куэтта, как известно, является стационарным, т.е. не зависящим от времени t . Кроме того, рассматриваемое течение является осесимметричным, т.е. не зависит от переменной θ . Численный расчет по конечно-разностно-спектральному методу, описанному в разделе 2, проводился методом установления. Расчетная сетка в промежутке $[R_2, R_3]$, где R_2 и R_3 — размерные радиусы внутреннего и внешнего цилиндров соответственно, была неравномерной и сгущалась у стенок цилиндров с применением функции th. Вдоль осей θ и z сетка была равномерной. Результаты расчетов, приведенные на рис. 3 и 4, были получены на сетке из 65, 30 и 13 узлов вдоль осей θ, r, z соответственно. Угловая скорость вращения внутреннего цилиндра $\omega = 10$ оборотов в минуту, число Рейнольдса $Re = 121.71$, $R_2 = 0.04$ м, $R_3 = 0.10$ м и $H = 0.03$ м.

В (7) использовалось значение $\varepsilon = 10^{-4}$. При этом ε понадобилось 1536 шагов по t для обеспечения выполнения неравенства (7). С целью дополнительной проверки точности полученного стационарного разностного решения также вычислялась величина $E^*(t^n)$ — безразмерная кинетическая энергия газа, находящегося в промежутке между цилиндрами, t^n — значение времени на n -м временном слое. Точное значение E_{th}^* кинетической энергии было найдено с применением точного решения задачи Куэтта [9]:

$$\begin{aligned} E_{th}^* &= \frac{1}{2} \int_0^{H^*} \left[\int_1^{R_3^*} \left(\int_0^{2\pi} (v_\theta^{*2} + v_r^{*2} + v_z^{*2}) d\theta \right) r dr \right] dz = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{H^*} \left[\int_1^{R_3^*} \left(\int_0^{2\pi} v_\theta^{*2} r dr \right) d\theta \right] dz = \frac{4R_3^{*2} - 1 - 3R_3^{*4} + 4R_3^{*4} \ln(R_3^*)}{4(R_3^{*2} - 1)^2} \pi H^*. \end{aligned} \tag{8}$$

Здесь $H^* = \frac{H}{R_2}$, $R_3^* = \frac{R_3}{R_2}$ и H^* — безразмерная высота цилиндров. На рис. 3 показан пунктирной линией график кинетической энергии, полученной по конечно-разностному методу, описанному в разделе 2. Штриховая линия — точное стационарное значение E_{th}^* в соответствии с правой частью равенства (8).

На рис. 4 показаны профили разностного решения для v_θ^* и p^* , из которых видно, что реализованный в Фортран-программе конечно-разностный метод, описанный в разделе 2, позволяет обеспечивать высокую точность результатов и на сравнительно грубой сетке из $65 \times 30 \times 13$ узлов.

4. Пограничный слой на нижнем основании кожуха. В [10] было получено приближенное аналитическое решение задачи о стационарном течении газа или жидкости в замкнутом цилиндрическом

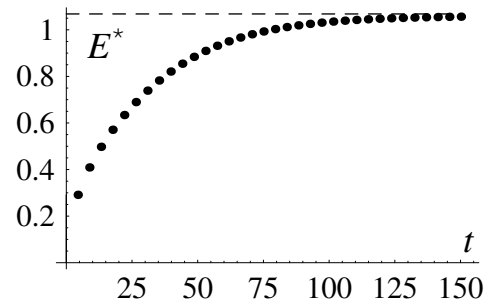


Рис. 3. Безразмерная кинетическая энергия газа $E^* = E^*(t^*)$

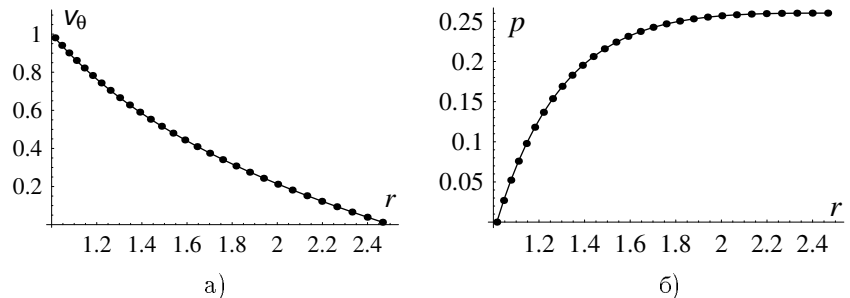


Рис. 4. Профили разностного решения (пунктирные линии) и точного решения (сплошные линии): а) безразмерная азимутальная скорость v_θ^* ; б) безразмерное давление p^*

кожухе, которое индуцировано вращением диска внутри кожуха. Следуя [10], будем предполагать, что течение газа внутри цилиндрического кожуха стационарное и осесимметричное. Из последнего предположения следует, что производные от компонент решения по азимутальной координате θ равны нулю. Поэтому уравнения Навье–Стокса (1), (2) в рассматриваемом случае принимают вид

$$u \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{v^2}{r} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left[\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u}{r} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right], \quad (9)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{uv}{r} + w \frac{\partial v}{\partial z} = \nu \left[\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \right) + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right], \quad (10)$$

$$u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right), \quad (11)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (12)$$

где $u \equiv v_r$, $v \equiv v_\theta$, $w \equiv v_z$. Следуя [10–12], получим теперь из уравнений (9)–(12) несколько полезных интегральных соотношений. Перепишем левую часть уравнения (9) в виде

$$u \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{v^2}{r} + \frac{\partial(uw)}{\partial z} - u \frac{\partial w}{\partial z}. \quad (13)$$

Умножим обе части уравнения неразрывности (12) на u : $u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u^2}{r} + u \frac{\partial w}{\partial z} = 0$, откуда

$$u \frac{\partial w}{\partial z} = -u \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u^2}{r}. \quad (14)$$

Заменяя член $u \frac{\partial w}{\partial z}$ в (13) по формуле (14), получаем равенство

$$u \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{v^2}{r} + \frac{\partial(uw)}{\partial z} - u \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial(u^2)}{\partial r} + \frac{u^2}{r} - \frac{v^2}{r} + \frac{\partial(uw)}{\partial z}. \quad (15)$$

Обозначим через $\delta_0(r)$ толщину пограничного слоя на неподвижном основании кожуха. Заменяем левую часть уравнения (9) на правую часть равенства (15), умножим обе части полученного уравнения на $r dz$ и проинтегрируем по z от нуля до $\delta_0(r)$. Учтем, что

$$\int_0^{\delta_0(r)} r \frac{\partial}{\partial r} (u^2) dz = \int_0^{\delta_0} \frac{\partial}{\partial r} (ru^2) dz - \int_0^{\delta_0} u^2 dz. \quad (16)$$

Далее предполагаем, следуя [10], что на внешней границе пограничного слоя $z = \delta_0(r)$ нет радиального движения, т.е. $u = 0$ при $z = \delta_0$. Кроме того, в силу условия прилипания на неподвижном основании кожуха имеем, что $u = 0$, $w = 0$ при $z = 0$. С учетом этих условий и равенства (16) получаем из (9) первое интегральное соотношение

$$\frac{d}{dr} \left(r \int_0^{\delta_0} u^2 dz \right) - \int_0^{\delta_0} v^2 dz = -\nu r \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)_{z=0} - \frac{r}{\rho} \int_0^{\delta_0} \frac{\partial p}{\partial r} dz. \quad (17)$$

Теперь перепишем левую часть уравнения (10) с учетом (12) в виде $\left\{ \frac{\partial}{\partial r} (uv) + \frac{\partial}{\partial z} (vw) + 2 \frac{uv}{r} \right\}$ и, умножив обе части (10) на $r^2 dz$, проинтегрируем по z от нуля до $\delta_0(r)$. Используя (12) и интегрируя по частям, получим второе интегральное соотношение

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \int_0^{\delta_0(r)} uv dz \right) - \tilde{\omega} r^2 \frac{d}{dr} \left(r \int_0^{\delta_0} u dz \right) = -\nu r^2 \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)_{z=0}. \quad (18)$$

Здесь мы воспользовались граничным условием на границе $z = \delta_0(r)$ пограничного слоя: $v(r, z) = \tilde{\omega}r$, где $\tilde{\omega}$ — постоянная угловая скорость вращения внешнего потока в зазоре между пограничными слоями как квазитвердого тела [10–12]; эта величина ниже определяется из условия равенства моментов сил вязкого трения жидкости на поверхности диска, торцах кожуха и боковой стенке кожуха.

Приближенные профили скорости задавались в [10] в виде

$$u = -u_0(r) \left[1 - \left(2 \frac{z}{\delta_0(r)} - 1 \right)^2 \right], \quad v = r\tilde{\omega} \left[1 - \left(1 - \frac{z}{\delta_0(r)} \right)^2 \right], \quad (19)$$

где $u_0(r)$ — пока неизвестная максимальная радиальная скорость внутри пограничного слоя, а знак минус при ней взят потому, что на основании кожуха радиальная составляющая скорости направлена от периферии к оси.

Подставим представления (19) для u и v в интегралы, входящие в левые части уравнений (17) и (18). Все нижеследующие аналитические выкладки были реализованы в программе, написанной на языке системы Mathematica [17]. Имеющихся в этой системе разнообразных встроженных функций для аналитических и численных вычислений оказалось достаточно для реализации всех необходимых аналитических выкладок и численных расчетов. Например, все определенные интегралы, входящие в балансовые соотношения (17) и (18), были вычислены с помощью встроженной Mathematica-функции `Integrate[...]`.

Для $\frac{\partial p}{\partial r}$ из уравнения (9) получаем во внешнем потоке равенство

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\rho v^2}{r}. \quad (20)$$

С другой стороны, во внешнем потоке справедлива формула $v(r, z) = \tilde{\omega}r$, поэтому из (20) получаем: $\frac{\partial p}{\partial r} = \rho\tilde{\omega}^2 r$. Эта производная и интеграл от нее входят в уравнение (17). Следуя [10–12], введем функцию $\Phi(r)$ по формуле $\Phi(r) = u_0(r)\delta_0(r)$. С учетом того, что величина δ_0 , входящая в интегралы балансовых соотношений, зависит от r , получаем первое обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{7}{15} \delta_0 r^2 \tilde{\omega}^2 - \frac{4r u_0 \nu}{\delta_0^2} + \frac{8\Phi^2(r)}{15\delta_0(r)} - \frac{8r\Phi^2(r)\delta_0'(r)}{15\delta_0^2(r)} + \frac{16r\Phi(r)\Phi'(r)}{15\delta_0(r)} = 0. \quad (21)$$

Если обе части этого уравнения умножить на $15/8$, то получится уравнение, совпадающее с первым уравнением системы (11) из [10]. В (21) штрих при $\delta_0(r)$ и $\Phi(r)$ означает дифференцирование по r .

Вычисление второго обыкновенного дифференциального уравнения из (18) было выполнено в системе Mathematica аналогично, и получилось уравнение

$$30r\nu - 11\delta_0(r)\Phi(r) + 3r\delta_0(r)\Phi'(r) = 0. \quad (22)$$

К сожалению, полученную систему из двух нелинейных уравнений (21) и (22) не удастся решить в замкнутом аналитическом виде. В этой связи мы применяем ниже для решения этой системы приближенную процедуру, описанную в [10]. Следуя [10], введем новую независимую переменную $x = 1 - \frac{r}{b}$, где b — радиус кожуха. Пусть $\bar{\Phi}(x) = \Phi(b - bx)$ и $\bar{\delta}_0(x) = \delta_0(b - bx)$. Теперь выведем левые части двух уравнений для $\bar{\Phi}(x)$ и $\bar{\delta}_0(x)$, применяя соотношения $\frac{d\Phi(r)}{dr} = \frac{d\bar{\Phi}(x)}{dx} \frac{dx}{dr} = -\frac{1}{b} \frac{d\bar{\Phi}(x)}{dx}$, $\frac{d\delta_0(r)}{dr} = -\frac{1}{b} \frac{d\bar{\delta}_0(x)}{dx}$. В результате из (21) и (22) были получены уравнения

$$7b^2\tilde{\omega}^2(1-x)^2\bar{\delta}_0^3(x) + 8\bar{\Phi}^2(x)\bar{\delta}_0(x) - 16(1-x)\bar{\Phi}(x)\bar{\Phi}'(x)\bar{\delta}_0(x) - 60b(1-x)\nu\bar{\Phi}(x) + 8(1-x)\bar{\Phi}^2(x)\bar{\delta}_0'(x) = 0; \quad (23)$$

$$30b(1-x)\nu - 11\bar{\Phi}(x)\bar{\delta}_0(x) - 3(1-x)\bar{\delta}_0(x)\bar{\Phi}'(x) = 0.$$

Здесь и ниже черточки над $\Phi(x)$ и $\delta_0(x)$ опущены для краткости обозначений.

Следуя [10], теперь ищем приближенное аналитическое решение системы (23) в виде рядов

$$\Phi = x^n(c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots), \quad \delta_0 = x^p(d_0 + d_1x + d_2x^2 + \dots). \quad (24)$$

Показатели n и p в (24) были подобраны в [10] так, чтобы показатели в системе (23) отличались друг от друга на единицу; это дает $n = 3/4$, $p = 1/4$. В [10] было замечено, что если задать выражения (24) в виде

$$\Phi = x^{3/4}\sqrt{\nu\tilde{\omega}}(c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots), \quad \delta_0 = x^{1/4}\sqrt{\frac{\nu}{\tilde{\omega}}}(d_0 + d_1x + d_2x^2 + \dots), \quad (25)$$

то для определения коэффициентов c_j и d_j получаются полиномиальные уравнения, коэффициенты которых зависят только от c_j и d_j . В [10] был рассмотрен случай, когда Φ и δ_0 содержат полиномы от x четвертой степени:

$$\Phi(x) = x^{3/4}b\sqrt{\nu\tilde{\omega}}P_1(x), \quad \delta_0(x) = x^{1/4}\sqrt{\frac{\nu}{\tilde{\omega}}}P_2(x), \quad (26)$$

$$P_1(x) = \sum_{j=0}^{N_1} c_j x^j, \quad P_2(x) = \sum_{j=0}^{N_2} d_j x^j, \quad (27)$$

где $N_1 = N_2 = 4$. Подстановки (26) и (27) в (23) приводят к двум полиномиальным уравнениям

$$\sum_{k=0}^{M_1} A_k(\mathbf{X})x^k = 0, \quad \sum_{k=0}^{M_2} B_k(\mathbf{X})x^k = 0, \quad (28)$$

где $\mathbf{X} = (c_0, c_1, c_2, c_3, c_4, d_0, d_1, d_2, d_3, d_4)$, $M_1 = 14$ и $M_2 = 9$. Для краткости ниже мы приводим формулы только для A_k , $k = 0, 1, 13, 14$, и для B_k , $k = 0, 1, 8, 9$:

$$\begin{aligned} A_0 &= -60c_0 - 10c_0^2d_0 + 7d_0^3; & B_0 &= 120 - 9c_0d_0; \\ A_1 &= 60c_0 - 60c_1 + 18c_0^2d_0 - 36c_0c_1d_0 - 14d_0^3 - 2c_0^2d_1 + 21d_0^2d_1; & B_1 &= -120 - 35c_0d_0 - 21c_1d_0 - 9c_0d_1; \\ A_{13} &= 50c_4^2d_4 + 21d_3d_4^2 - 14d_4^3; & B_8 &= 13c_4d_3 + c_3d_4 - 57c_4d_4; \\ A_{14} &= 7d_4^3; & B_9 &= 13c_4d_4. \end{aligned}$$

В [10] коэффициенты c_j , d_j в (27) были вычислены из требования, чтобы оба уравнения (28) были идентично равны нулю. Это означает, что решались системы полиномиальных уравнений

$$A_k(\mathbf{X}) = 0, \quad k = 0, \dots, M_1; \quad B_k(\mathbf{X}) = 0, \quad k = 0, \dots, M_2. \quad (29)$$

В результате в [10] были найдены численные значения коэффициентов c_j , d_j в (25), так что

$$\Phi = x^{3/4}b\sqrt{\nu\tilde{\omega}}(3.04 - 4.64x + 2.839x^2 - 2.855x^3 - 1.814x^4); \quad (30)$$

$$\delta_0 = x^{1/4}\sqrt{\nu/\tilde{\omega}}(4.385 - 5.845x + 4.015x^2 - 4.46x^3 - 1.29x^4). \quad (31)$$

Однако численные значения коэффициентов A_k и B_k , полученные при численных значениях c_j и d_j из [10], отличны от нуля:

$$\begin{aligned} A_0 &= 2.5662, \quad A_1 = -15.6054, \quad A_2 = 23.6544, \quad \dots, \quad A_7 = -14429.8, \quad \dots, \quad A_{14} = -15.0268; \\ B_0 &= 0.0264, \quad B_1 = 0.6296, \quad \dots, \quad B_7 = -668.551, \quad B_8 = -24.5247, \quad B_9 = 30.4208. \end{aligned}$$

Для определения угловой скорости $\tilde{\omega}$, входящей в равенство $v(r, z) = \tilde{\omega}r$, нам понадобится формула для момента M_1 сил трения жидкости о две неподвижные торцевые стенки кожуха, каждая из которых является диском радиуса $b = R_3$. Всюду в данной статье предполагается, что диск расположен в середине кожуха. Согласно [10] и с учетом (26), этот суммарный момент для обоих торцов выражается формулой

$$M_1 = -2 \int_0^b 2\pi r^2 \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)_{z=0} dr = -8\pi\mu\tilde{\omega}b^4 \int_0^1 \frac{(1-x)^3}{\delta_0(x)} dx = -8\pi\mu\tilde{\omega}b^4 \sqrt{\frac{\tilde{\omega}}{\nu}} \int_0^1 \frac{(1-x)^3 x^{-1/4}}{P_2(x)} dx. \quad (32)$$

При вычислении интеграла в правой части (32) учитывалось, что $P_2(x)$ имеет корень $x^* = 0.746836$ внутри промежутка интегрирования $[0, 1]$. В итоге было найдено: $8\pi \int_0^1 \frac{(1-x)^3 x^{-1/4}}{P_2(x)} dx = 3.4048249$. С другой стороны, значение этого интеграла, найденное графическим методом в [10], составило 3.387.

5. Пограничный слой на диске. Теперь рассмотрим пограничный слой на диске, вращающемся с угловой скоростью ω , предполагая наличие постоянной угловой скорости $\tilde{\omega} < \omega$ у вращающегося как квазитвердое тело спутного потока внешней жидкости. Обозначим через s расстояние от неподвижного дна кожуха до нижней горизонтальной поверхности диска. Пусть $\bar{z} = s - z$, так что $\bar{z} = 0$ на нижней горизонтальной поверхности диска. Теперь, следуя [10], у поверхности диска зададим следующие представления для u и v :

$$u = u_0^* \left[1 - \left(2 \frac{\bar{z}}{\delta} - 1 \right)^2 \right], \quad v = \omega r - (\omega - \tilde{\omega}) r \left[1 - \left(1 - \frac{\bar{z}}{\delta} \right)^2 \right]. \tag{33}$$

Здесь u_0^* — новая неизвестная максимальная радиальная скорость и $\delta(r)$ — толщина пограничного слоя на диске. В дальнейшем черточку над z в (33) опустим для краткости. Интегральные соотношения (17) и (18) остаются по форме теми же, только нужно заменить δ_0 на δ . Подобно предыдущему, мы сначала вычислили с помощью системы Mathematica интегралы и производные, входящие в (17) и (18). Подставляя найденные выражения в (17) и (18), получим систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений для $\delta(r)$ и $u_0^*(r)$:

$$-\frac{1}{5} \omega^2 r^2 \delta - \frac{4}{15} \omega r^2 \tilde{\omega} \delta + \frac{7}{15} r^2 \tilde{\omega}^2 \delta + \frac{4r\nu u_0^*}{\delta} \delta + \frac{8}{15} \delta u_0^{*2} + \frac{8}{15} r u_0^{*2} \delta' + \frac{16}{15} r \delta u_0^* u_0^{*'} = 0; \tag{34}$$

$$-\frac{2\omega r^3 \nu}{\delta} + \frac{2r^3 \tilde{\omega} \nu}{\delta} + \frac{3}{5} \omega r^2 \delta u_0^* + \frac{11}{15} r^2 \tilde{\omega} \delta u_0^* + \frac{1}{5} \omega r^3 u_0^* \delta' - \frac{1}{5} r^3 \tilde{\omega} u_0^* \delta' + \frac{1}{5} \omega r^3 \delta u_0^{*'} - \frac{1}{5} r^3 \tilde{\omega} \delta u_0^{*'} = 0. \tag{35}$$

В отличие от случая пограничного слоя на неподвижном основании кожуха, система (34), (35) имеет частное решение вида $\delta(r) = c_1$, $u_0^* = c_2 r$, где c_1, c_2 — постоянные. Подставив эти формулы в (34), (35), получим два нелинейных алгебраических уравнения для определения c_1, c_2 :

$$6c_1^2 c_2^2 - \frac{3}{4} c_1^2 \omega^2 - c_1^2 \omega \tilde{\omega} + \frac{7}{4} c_1^2 \tilde{\omega}^2 + 15c_2 \nu = 0; \quad \frac{4}{5} c_1^2 c_2 \omega + \frac{8}{15} c_1^2 c_2 \tilde{\omega} - 2\nu(\omega - \tilde{\omega}) = 0. \tag{36}$$

Второе уравнение системы (36) линейно относительно c_2 , поэтому, разрешив его относительно c_2 , подставим найденное выражение в первое уравнение и найдем c_1 :

$$c_2 = \frac{15\nu(\omega - \tilde{\omega})}{2c_1^2(3\omega + 2\tilde{\omega})}; \quad c_1 = \sqrt{\frac{\nu}{\tilde{\omega}}} \frac{\sqrt[4]{150}}{\sqrt{2 + 3\omega/\tilde{\omega}}} \sqrt[4]{\frac{6\omega/\tilde{\omega} - 1}{\omega/\tilde{\omega} + 7/3}}. \tag{37}$$

Этот результат совпадает с найденным в [10]. Пусть a — радиус диска. Суммарный момент сил трения на обеих сторонах вращающегося диска равен [10–12]

$$M_2 = - \int_0^a 4\pi \mu (\omega - \tilde{\omega}) 2 \frac{r^3}{\delta} dr = - \frac{2\pi}{\sqrt[4]{150}} \mu a^4 (\omega - \tilde{\omega}) \sqrt{\frac{\nu}{\tilde{\omega}}} \sqrt{2 + 3 \frac{\omega}{\tilde{\omega}}} \sqrt[4]{\frac{\omega/\tilde{\omega} + 7/3}{6\omega/\tilde{\omega} - 1}}. \tag{38}$$

Осталось определить пока неизвестную угловую скорость $\tilde{\omega}$ вращения жидкости в кожухе вдалеке от твердых стенок. В [10–12] для этого использовано требование равенства двух моментов: момента M_1 , тормозящего жидкость о торцы кожуха и определяемого по формуле (32), и момента M_2 (38), тормозящего диск. Однако в выражение для M_1 входит радиус цилиндрического основания b . В [10] предполагалось, что зазор между диском и стенкой кожуха мал. Тогда $b \approx a$ и можно решить уравнение $M_1 = M_2$ относительно $\tilde{\omega}$. В результате оказалось, что $\omega/\tilde{\omega} = 1.89321$, так что $\tilde{\omega}/\omega = 0.528202$. Согласно [10–12], $\tilde{\omega}/\omega = 0.54$; на основании этого в [10–12] сделан вывод, что квазитвердое ядро между пограничными слоями вращается примерно с половинной угловой скоростью по сравнению с диском.

Для дальнейшего удобно ввести следующие два безразмерных параметра: число Рейнольдса $Re = \frac{R_2^2 \omega}{\nu}$ и число $\beta = \tilde{\omega}/\omega$; $\beta = 0.54$ в случае решения (30), (31) из [10]. На рис. 5 показаны графики функций $z = \delta_0(r)$ и $z = \delta(r)$ для случая, когда в (31) и (37) $Re = 1288$, $R_2 = 0.092$ м, $s = 0.031$ м, $\omega = 20$ об/мин. Как можно видеть, при указанных значениях R_2, Re, s, ω нижний и верхний пограничные слои не пересекаются. Толщина $\delta_0(r)$, описываемая формулой (31), отрицательна в окрестности вала. Это противоречит физическому смыслу толщины пограничного слоя: она всегда должна быть неотрицательной.

6. Новое решение для $N_1 = N_2 = 4$. Отметим ряд недостатков решения Шульца–Грунова (см. формулы (30) и (31)).

(i) Вблизи вала толщина $\delta_0(r)$ пограничного слоя у основания кожуха отрицательная согласно (31). Это видно на рис. 5 и может быть легко доказано математически следующим образом. Обозначим через R_1, R_2 и R_3 радиусы вала, диска и боковой цилиндрической стенки кожуха соответственно. Для реальных дисковых машин выполняется неравенство $R_1 \ll R_3$. Тогда соответствующее значение $x = 1 - (r/R_3) \approx 1$ на поверхности вала. Подставляя в (31) значение $x = 1$, легко убедиться, что $\delta_0(1) < 0$.

(ii) Формулы (30), (31) не обеспечивают выполнения условия прилипания $u(R_1, z) = 0$ на поверхности вала. Действительно, так как $u_0(r) = \Phi(r)/\delta_0(r)$, то обращение в нуль величины $u_0(r)$ при $r = R_1$ возможно только за счет того, что $\Phi(1 - R_1/R_3) = 0$. Так как $x \approx 1$ при $r = R_1$, то из (30) получаем, что для того, чтобы $\Phi = 0$ при $r = R_1$, необходимо, чтобы $P_1(1) = 0$. Но $P_1(1) = -3.43 \neq 0$ согласно (30).

(iii) Формулы (30), (31) при $r = R_3$ не обеспечивают выполнения условия прилипания $u = v = 0$ на неподвижной вертикальной круглой стенке кожуха.

(iv) При определении угловой скорости $\tilde{\omega}$ квазитвердого вращения жидкости между нижним и верхним пограничными слоями в [10–12] не учитывался момент сил вязкого трения на вертикальной стенке кожуха.

Ниже мы построим новое решение, в котором будут устранены недостатки (i)–(iv). Начнем с устранения недостатка (ii). Условие прилипания $\Phi(1 - R_1/R_3) = 0$ легко учесть, задавая Φ в виде

$$\Phi(x) = x^{3/4} b \sqrt{\nu \tilde{\omega}} (1 - R_1/R_3 - x) \bar{P}_1(x), \quad (39)$$

$$\bar{P}_1(x) = \sum_{j=0}^{N_1-1} c_j x^j. \quad (40)$$

Представление (39) имеет недостаток, состоящий в том, что коэффициенты c_j, d_j теперь будут зависеть от конкретного значения отношения $\varepsilon = R_1/R_3$. Поэтому мы поступим следующим образом: предположим, что отношение R_1/R_3 мало, и пренебрежем им, задав $\Phi(x)$ в виде

$$\Phi(x) = x^{3/4} b \sqrt{\nu \tilde{\omega}} (1 - x) \bar{P}_1(x). \quad (41)$$

Подставляя выражение (41) и выражение для δ_0 из (26) в левые части уравнений (23), получим систему из 25 полиномиальных уравнений (29) относительно девяти неизвестных $c_0, c_1, c_2, c_3, d_0, d_1, d_2, d_3, d_4$. Таким образом, (29) — это переопределенная полиномиальная система. Широко распространенный метод решения таких систем основан на методе наименьших квадратов [18]. Введем в рассмотрение целевую функцию $F(\mathbf{X})$ по формуле

$$F(\mathbf{X}) = \sum_{k=0}^{M_1} [A_k(\mathbf{X})]^2 + \sum_{k=0}^{M_2} [B_k(\mathbf{X})]^2. \quad (42)$$

Затем решение \mathbf{X}^* системы (42) ищем из требования минимизации функции (42): $F(\mathbf{X}) \rightarrow \min$. Заметим, что на значениях c_j, d_j , входящих в (30) и (31), функция $F(\mathbf{X})$ принимает значение $F = 6.0625 \times 10^8$.

Для поиска минимума функции (42) мы применили Mathematica-функцию `FindMinimum[...]`. В качестве начального приближения к точке минимума $F(\mathbf{X})$ мы использовали значения c_j, d_j из (30), (31).

Таблица 1

Динамика сходимости процесса минимизации функции (42)

N_{it}	30	100	150	175
F^*	1.405×10^5	1.722×10^4	4.513×10^3	4.513×10^3

В табл. 1 через N_{it} обозначено задаваемое число итераций для функции `FindMinimum` при вычислении $F^* = F(\mathbf{X}^*)$. Видно, что процесс численной минимизации сошелся уже к 150 итерациям. Дальнейшие

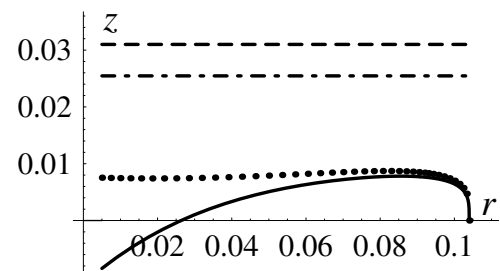


Рис. 5. Кривые $z = \delta(r)$ по различным формулам: сплошная линия — $z = \delta_0(r)$ в соответствии с решением Шульца–Грунова [10], пунктирная линия — $z = \delta_{0,4,4}(r)$, штриховая линия — $z = s$, штрих-пунктирная линия — $z = s - \delta(r)$

итерации уже не привели к изменению F^* . Из табл. 1 также следует, что итоговое значение F^* , полученное за 150 итераций, примерно на пять десятичных порядков меньше, чем значение F , получаемое на тех значениях c_j и d_j , которые были вычислены в [10]. В результате проведенных расчетов были найдены числовые значения c_j, d_j , доставляющие минимум функции (42), так что соответствующее приближенное аналитическое решение для $\Phi(x)$ и $\delta_0(x)$ теперь имеет вид

$$\Phi_{4,4} = x^{3/4} b \sqrt{\nu \tilde{\omega}} (1-x) (2.703488 - 1.644563x + 0.909018x^2 + 0.021419x^3); \tag{43}$$

$$\delta_{0,4,4} = x^{1/4} \sqrt{\nu/\tilde{\omega}} (4.064651 - 5.198975x + 4.005359x^2 - 0.563374x^3 - 0.047782x^4). \tag{44}$$

Нижние индексы “4,4” при Φ и δ_0 в (43) и (44) указывают на то, что степени N_1 и N_2 использованных аппроксимирующих полиномов $P_1(x)$ и $P_2(x)$ в (27) суть $N_1 = 4$ и $N_2 = 4$.

Хотя отношение $\frac{R_1}{R_3}$ предполагается малым, тем не менее при $r = R_1$ множитель $1 - x = \frac{R_1}{R_3} \neq 0$. Предположим, что коэффициенты c_j слабо зависят от $\varepsilon = \frac{R_1}{R_3}$. Тогда мы можем сохранить в формуле для $\Phi_{4,4}$ те численные значения коэффициентов c_j , которые были найдены в пределе $\varepsilon \rightarrow 0$, а множитель $1 - x$ заменить на множитель $1 - \frac{R_1}{R_3} - x$ с целью точного выполнения условия прилипания $u(R_1, z) = 0$:

$$\Phi_{4,4} = x^{3/4} b \sqrt{\nu \tilde{\omega}} \left(1 - \frac{R_1}{R_3} - x \right) (2.703488 - 1.644563x + 0.909018x^2 + 0.021419x^3). \tag{45}$$

Из (44) легко видеть, что $\delta_{0,4,4}(1) > 0$, т.е. мы устранили также недостаток (i). Этот недостаток оказалось возможным устранить благодаря численному решению задачи минимизации функции (42) с машинной точностью на современном достаточно мощном настольном компьютере.

Как видно из рис. 5, толщина пограничного слоя $\delta_{0,4,4}(r)$ (см. формулу (44)) на неподвижном основании кожуха несколько уменьшается с уменьшением расстояния r до поверхности вала.

Перейдем к устранению недостатка (iii). Как видно из приближенного аналитического представления (33) решения для пограничного слоя у диска, оно существенно использует граничное условие $v = \omega r$ на поверхности диска. Однако это условие прилипания применимо только в промежутке $[R_1, R_2]$. Пусть $\mathbf{U}_d = (u(r, z), v(r, z))$ — вектор приближенного аналитического решения в интервале $[R_1, R_2]$, т.е. мы ограничиваем область применимости этого решения данным интервалом. Осуществим разложение решения $\mathbf{U} = (u, v)$ в ряды Тейлора в промежутке $[R_2, R_3]$ относительно точки $r = R_2$:

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}(R_2, z) + \left[\frac{\partial \mathbf{U}(R_2, z)}{\partial r} \right] (r - R_2) + O[(r - R_2)^2], \quad r \in [R_2, R_3]. \tag{46}$$

Из (46) следует, что при малых величинах зазора между диском и обечайкой (что типично для дисковых вентиляторов) линейная аппроксимация $\mathbf{U}(r, z) = \mathbf{A}r + \mathbf{B}$ может быть приближением, удовлетворительным по точности. Выражения для постоянных векторов \mathbf{A} и \mathbf{B} легко найти с учетом условий $\mathbf{U}(R_3, z) = (0, 0)$, так что в итоге получаем следующую формулу для приближенного аналитического решения $\mathbf{U}(r, z)$ в промежутке $[R_1, R_3]$:

$$\mathbf{U}(r, z) = \begin{cases} \mathbf{U}_d(r, z), & R_1 \leq r \leq R_2; \\ \mathbf{U}_d(R_2, z) \frac{r - R_3}{R_2 - R_3}, & R_2 \leq r \leq R_3. \end{cases} \tag{47}$$

Видно, что решение \mathbf{U} , данное формулой (47), удовлетворяет условию прилипания при $r = R_3$. Найдем выражение для момента сил вязкого трения на круглой вертикальной стенке кожуха с целью устранения недостатка (iv) решения из [10]. Возьмем на поверхности цилиндра полосу высотой dz . На этой элементарной полосе момент силы трения равен $2\pi b dz b \mu \left(\frac{\partial v}{\partial r} \right) \Big|_{r=b}$. Тогда суммарный момент M_3 сил вязкого

трения на поверхности цилиндра высоты H суть $M_3 = \int_0^H \varphi(r, z) dz$, где $\varphi(r, z) = 2\pi b^2 \mu \left(\frac{\partial v}{\partial r} \right)$. Чтобы учесть наличие пограничных слоев и диска в промежутке $0 \leq z \leq H$, разобьем этот промежуток на несколько подынтервалов: $M_3 = \int_0^{s-\delta} \varphi dz + \int_{s-\delta}^s \varphi dz + \int_s^{s+d} \varphi dz + \int_{s+d}^{s+d+\delta} \varphi dz + \int_{s+d+\delta}^H \varphi dz$, где d — толщина

диска. В промежутке $(0, s - \delta)$ имеем, согласно (47), выражение $v(r, z) = \frac{\tilde{\omega} R_2 (r - R_3)}{R_2 - R_3}$, $R_2 \leq r \leq R_3$, поэтому $\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{\tilde{\omega} R_2}{R_2 - R_3}$ и

$$\int_0^{s-\delta} \varphi dz + \int_{s+d+\delta}^H \varphi dz = -4\pi b^2 \mu \tilde{\omega} (s - \delta) \frac{R_2}{R_3 - R_2}. \quad (48)$$

Далее, с учетом формул (33) и (47) получим

$$\int_{s-\delta}^s \varphi dz + \int_{s+d}^{s+d+\delta} \varphi dz = -(4/3)\pi b^2 \mu \delta (\omega + 2\tilde{\omega}) \frac{R_2}{R_3 - R_2}. \quad (49)$$

И наконец, при вычислении оставшегося интеграла в промежутке $[s, s + d]$ предположим, что в зазоре $[R_2, R_3]$ напротив диска толщины d течение газа мало отличается от течения Куэтта. Вычисляя $\frac{\partial v}{\partial r}$ из точного решения задачи Куэтта, приходим к выражению

$$\int_s^{s+d} \varphi dz = -2\pi b^2 \mu \omega R_2 \frac{2R_3 d}{R_3^2 - R_2^2}. \quad (50)$$

В [10] величина $\tilde{\omega}$ находилась посредством решения уравнения $M_2 = M_1$, где выражения для M_1 и M_2 даются формулами (32) и (38). Учтем момент M_3 и будем определять $\tilde{\omega}$ из уравнения $M_2 = M_1 + M_3$. Подставим сюда выражения (32), (38), (48)–(50) и умножим обе части полученного равенства на $\frac{\lambda_1 \zeta}{\text{Re}^{1/2}} \frac{1}{\mu b^3 \tilde{\omega}}$, где $\lambda_1 = \frac{R_2}{b}$. В итоге получим уравнение

$$\frac{2\pi \lambda_1^4}{\sqrt[4]{150}} (\zeta - 1) \sqrt{2 + 3\zeta} \sqrt[4]{\frac{\zeta + 7/3}{6\zeta - 1}} = I_1 + 4\pi \sqrt{\frac{\zeta}{\text{Re}}} \lambda_1 \left[\lambda_2 - \lambda_1 \bar{\delta} + \frac{1}{3} \lambda_1 \bar{\delta} (\zeta + 2) \right] \frac{\lambda_1}{1 - \lambda_1} + \frac{4\pi \lambda_1^2 \lambda_3 \zeta^{3/2}}{(1 - \lambda_1^2) \sqrt{\text{Re}}}, \quad (51)$$

где $I_1 = 8\pi \int_0^1 \frac{(1-x^3)x^{-1/4}}{P_2(x)} dx$, $\lambda_2 = \frac{s}{b}$, $\lambda_3 = \frac{d}{b}$, $\zeta = \frac{\omega}{\tilde{\omega}}$, $\bar{\delta} = \frac{\delta(r)}{\lambda_1 b} = \left[\frac{\zeta}{\text{Re}(2 + 3\zeta)} \right]^{1/2} \left[\frac{150(6\zeta - 1)}{\zeta + 7/3} \right]^{1/4}$.

При заданных параметрах λ_j и Re уравнение (51) решалось численно методом половинного деления. Например, при $R_1 = 0.005$ м, $R_2 = 0.092$ м, $R_3 = 0.104$ м, $s = 0.031$ м, $d = 0.01$ м, $\omega = 20$ об/мин и когда газ внутри кожуха — воздух, из (51) было получено значение $\beta_{4,4} = \frac{1}{\zeta} = 0.338$, так что $\tilde{\omega} = 0.338\omega$. Нижние индексы “4,4” при β указывают, что $N_1 = N_2 = 4$, где N_1, N_2 — степени многочленов $P_1(x)$ и $P_2(x)$, входящих в (26).

Таблица 2
Значения $F(\mathbf{X}^*)$ и β_{N_1, N_2} для различных N_1, N_2 при $\omega = 20$ об/мин

N_1	4	4	5	5	5	6	6
N_2	4	5	4	5	6	5	6
$10^{-3}F(\mathbf{X}^*)$	4.51	2.56	2.08	2.05	1.48	1.33	1.32
β_{N_1, N_2}	0.337655	0.338802	0.334889	0.335723	0.335942	0.334226	0.334362

7. Дальнейшие решения для пограничного слоя на днище кожуха. С целью дальнейшего уменьшения значения целевой функции (42) метода наименьших квадратов ниже мы приводим аналитические решения для пограничного слоя на неподвижном основании кожуха для случаев, когда $N_1 \geq 4$, $N_2 \geq 4$, $N_1 + N_2 > 8$, где N_1, N_2 — степени многочленов (27). Следует отметить, что происходит нелинейное возрастание сложности функции $F(\mathbf{X})$ с увеличением N_1 и N_2 .

В качестве начального приближения к точке минимума \mathbf{X}^* при $N_1 = 4, N_2 = 5$ брались оптимальные значения коэффициентов c_j, d_j , найденные в предыдущем разделе для случая $N_1 = N_2 = 4$, а начальное приближение для нового добавленного коэффициента d_5 полагалось равным нулю. Такой же способ задания c_j, d_j применялся при $N_1 = 5, N_2 = 5$ и т.д. Это позволило существенно, в два-три раза, уменьшить количество итераций, требуемых функцией FindMinimum для достижения сходимости. В табл. 2 приведены значения $F(\mathbf{X}^*)$ при различных N_1, N_2 . Видно, что при $N_1 = 5, N_2 = 6$ произошло заметное уменьшение значения $F(\mathbf{X}^*)$ по сравнению со случаем $N_1 = N_2 = 5$. Однако при дальнейшем увеличении N_1 и N_2 снижение значения целевой функции $F(\mathbf{X})$ в точке минимума \mathbf{X}^* замедляется.

В табл. 2 даны также значения отношения $\beta_{N_1, N_2} = \tilde{\omega}/\omega$, соответствующие заданным N_1 и N_2 . Эти значения β_{N_1, N_2} были получены, как и в предыдущем разделе, путем численного решения уравнения (51). Геометрические параметры $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ во всех вышеприведенных расчетах для различных N_1, N_2 были такими же, как для $N_1 = N_2 = 4$. Из табл. 2 следует, что коэффициент β_{N_1, N_2} слабо зависит от N_1 и N_2 . Однако поскольку коэффициенты уравнения (51) зависят от $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ и Re, то при изменении любого из этих параметров естественно ожидать и изменения коэффициента $\beta_{N_1, N_2} = 1/\zeta$.

На рис. 6 показаны кривые $z = \delta_{0, N_1, N_2}(r)$ для различных N_1, N_2 . Значение $\tilde{\omega}$ задавалось для каждой конкретной пары (N_1, N_2) по формуле $\tilde{\omega} = \beta_{N_1, N_2}\omega$, где значения β_{N_1, N_2} брались из табл. 2. Из рис. 6 видно, что для всех рассмотренных N_1, N_2 толщина пограничного слоя $\delta_0(r)$ на неподвижном днище кожуха уменьшается с уменьшением полярного расстояния r .

В табл. 3 приводятся значения коэффициентов c_j в (40), а в табл. 4 — значения коэффициентов d_j , входящих в выражение для $\delta_0(x)$.

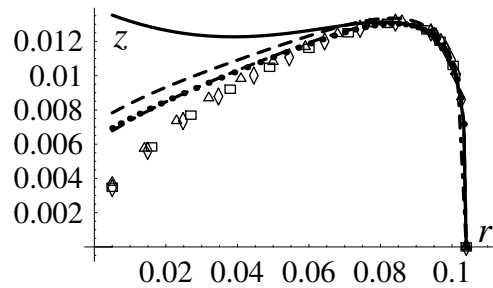


Рис. 6. Кривые $z = \delta_0(r)$ по различным формулам: $N_1 = N_2 = 4$ (сплошная); $N_1 = 4, N_2 = 5$ (пунктирная); $N_1 = 5, N_2 = 4$ (точечная); $N_1 = N_2 = 5$ (штрих-пунктирная); $N_1 = 5, N_2 = 6$ (Δ); $N_1 = 6, N_2 = 5$ (\square); $N_1 = N_2 = 6$ (\diamond)

Таблица 3

Коэффициенты c_j в (40) при различных N_1, N_2

N_1	N_2	c_0	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5
4	4	2.703488	-1.644563	0.909018	0.021419	0	0
4	5	2.856340	-1.570379	1.074781	0.082472	0	0
5	4	2.787174	-1.625395	0.964173	-0.005921	-0.044119	0
5	5	2.810254	-1.611966	0.995323	0.014495	-0.035890	0
5	6	2.876983	-1.619852	1.076446	0.077721	-0.007302	0
6	5	2.844606	-1.647739	1.016851	0.021477	-0.050451	-0.019380
6	6	2.848314	-1.646002	1.022749	0.026754	-0.046820	-0.018012

8. Некоторые результаты численных расчетов задачи о течении газа в кожухе с вращающимся диском. В этом разделе приводятся некоторые результаты расчетов по численной методике, описанной в разделе 2, во всем интервале $20 \leq \omega \leq 100$ об/мин значений угловой скорости вращения диска, применяемых в дисковых вентиляторах. Приводятся также некоторые результаты сравнения разностных решений с новым аналитическим решением, полученным в разделе 6 для $N_1 = N_2 = 4$. На рис. 7 представлены графики $v = v(r_0, z)$ для угловой скорости $\omega = 20$ об/мин вращения диска в двух различных сечениях $r = \text{const}$: сечение $r \approx 0.57(R_1 + R_2)$ находится примерно в середине интервала $[R_1, R_2]$, а сечение $r \approx 0.93R_2$ — вблизи торца диска. Сплошной линией на рис. 7 показано новое аналитическое решение для v при $\beta_{4,4} = 0.337655$; штриховая линия — аналитическое решение [10], $\beta = 0.54$. Пунктирная линия на рис. 7 — численное решение рассматриваемой задачи, полученное при тех же входных данных, что и аналитическое решение, по разностно-спектральному методу, описанному в разделе 2, методом установления на неравномерной пространственной расчетной сетке, которая имела 65, 41 и 51 узел вдоль осей θ, r

Таблица 4

Коэффициенты d_j многочлена $P_2(x)$, входящего в выражение для $\delta_0(x)$
(см. вторую формулу в (26)) при различных N_1, N_2

N_1	N_2	d_0	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6
4	4	4.064651	-5.198975	4.005359	-0.563374	-0.047782	0	0
4	5	4.185028	-5.471901	3.871863	-0.997633	-0.353929	-0.064053	0
5	4	4.110059	-5.462528	3.745126	-1.038496	-0.328643	0	0
5	5	4.132542	-5.483389	3.764532	-1.055980	-0.351856	-0.015801	0
5	6	4.188974	-5.648875	3.795984	-1.197402	-0.549613	-0.162125	-0.030455
6	5	4.156011	-5.637994	3.744278	-1.215339	-0.552950	-0.138877	0
6	6	4.159553	-5.642342	3.748718	-1.216971	-0.556802	-0.143530	-0.002778

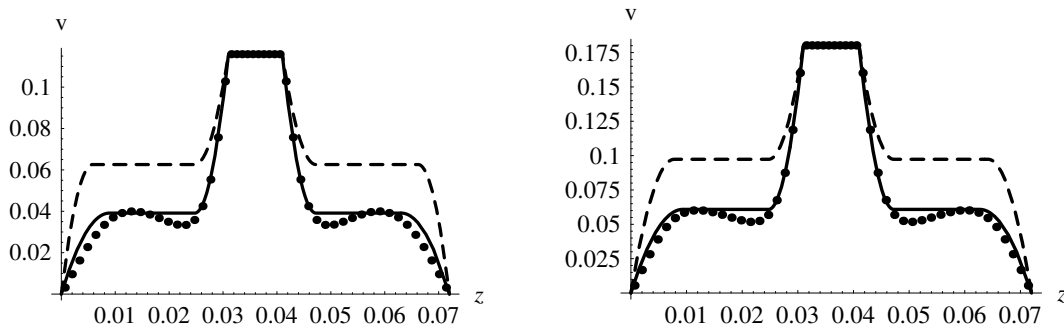


Рис. 7. Кривые $v = v(r_0, z)$: а) $r_0 = 0.05534 \approx 0.57(R_1 + R_2)$; б) $r_0 = 0.08606 \approx 0.93R_2$

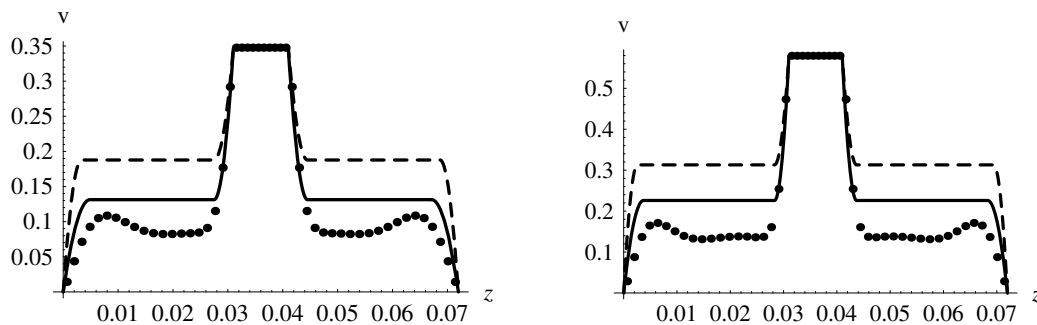


Рис. 8. Кривые $v = v(r_0, z)$: а) $\omega = 60$ об/мин; б) $\omega = 100$ об/мин

и z соответственно. Аналитическое решение [10] ($\beta = 0.54$) завышает значения составляющей скорости $v(r, z)$ в области квазитвердого вращения жидкости. Это неудивительно, так как при подсчете угловой скорости $\tilde{\omega}$ в [10] не были учтены дополнительные потери в скорости, вызываемые трением жидкости о неподвижную вертикальную стенку кожуха.

На рис. 8 представлены графики $v = v(r_0, z)$ для различных значений ω в сечении $r \approx 0.57(R_1 + R_2)$ при $\beta_{4,4} = 0.377651$ для $\omega = 60$ об/мин и $\beta_{4,4} = 0.389981$ для $\omega = 100$ об/мин. Смысл сплошных, штриховых и пунктирных линий тот же, что и на рис. 7.

На рис. 9 представлены картины течения в осевой плоскости, полученные с помощью разностно-спектрального метода, описанного в разделе 2. Поведение линий тока, в целом, согласуется с описанным в [10, 12], но есть и отличия. А именно, сравнивая рис. 9а с рис. 9г, видим, что имеет место проникновение частиц жидкости, двигавшихся вдоль горизонтальной поверхности диска в сторону вертикальной стенки кожуха, в область зазора между торцом диска и вертикальной стенкой кожуха. Внутри зазора частицы разворачиваются и затем движутся вниз вдоль вертикальной стенки кожуха.

Второе отличие вытекает из рис. 7 и 8. Дело в том, что в [10] при построении приближенного

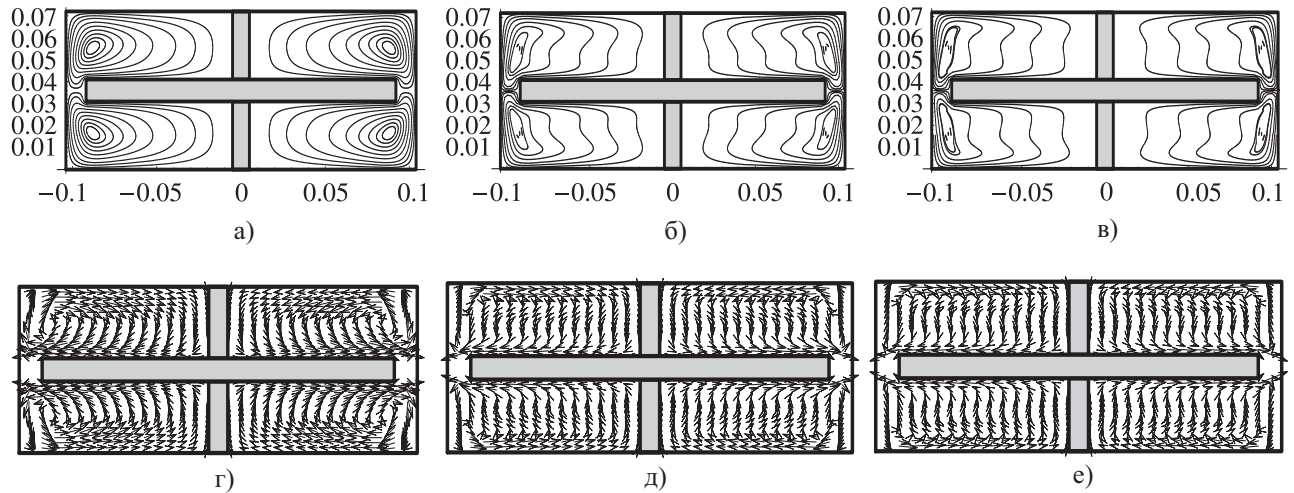


Рис. 9. Картины течения в осевой плоскости при различных значениях угловой скорости ω вращения диска: а)–в) линии тока, г)–е) поля векторов скорости; а) и г) $\omega = 20$ об/мин; б) и д) $\omega = 60$ об/мин; в) и е) $\omega = 100$ об/мин

аналитического решения использовалась гипотеза о том, что в области течения, внешней по отношению к пограничным слоям на днище кожуха и на диске, угловая скорость движения жидкости $\tilde{\omega}$ постоянна. Однако из рис. 7 и 8 следует, что в сечениях $r = \text{const}$ составляющая скорости v переменная, поэтому локальное значение угловой скорости $\tilde{\omega} = v/r$ тоже переменное.

Особенно хорошее согласие между конечно-разностным решением по методике раздела 2 и аналитическим решением, описанным выше в разделах 5 и 6, имеет место для всех рассмотренных значений угловой скорости ω в областях пограничных слоев на плоскостях диска (см. рис. 7 и 8). Это связано с тем, что аналитическое решение для течения в пограничном слое у диска, описанное в разделе 5, является точным решением стационарных уравнений Навье–Стокса (9)–(12).

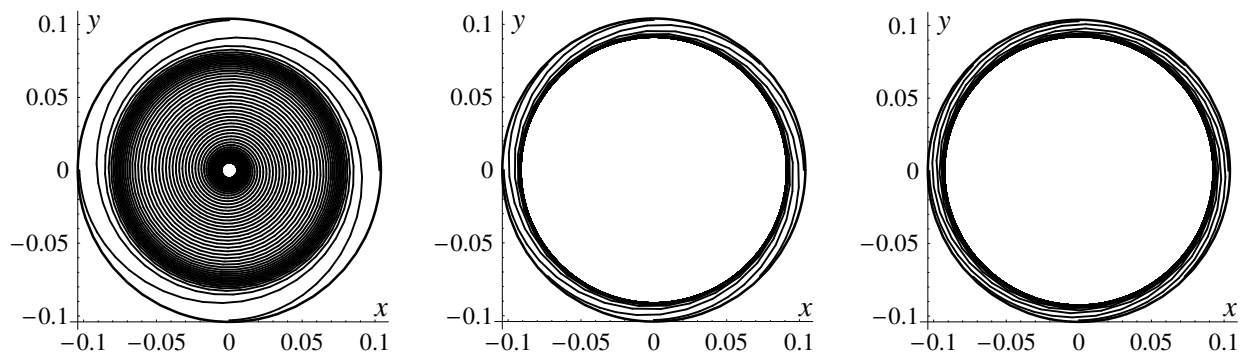


Рис. 10. Линии тока в сечении $z = s/2$ при различных значениях угловой скорости ω вращения диска: $\omega = 20$ об/мин; $\omega = 60$ об/мин; $\omega = 100$ об/мин

На рис. 10 представлены линии тока в сечении $z = s/2$. Эти линии имеют спиралевидную форму. Тот факт, что при $\omega = 60$ и $\omega = 100$ об/мин линии тока не достигают вала, объясняется тем, что при этих угловых скоростях вращения диска в сечении $z = s/2$ в интервале $R_1 \leq r \leq R_2$ нет течения газа в направлении вала, как это видно на рис. 9д и 9е; более того, видно, что векторы скорости даже немного повернуты в сторону вертикальной цилиндрической стенки кожуха. Из рис. 10 также видно, что с увеличением скорости вращения диска спиральные линии тока каждой жидкой частицы удлиняются из-за уменьшения скорости радиального движения частицы от периферии к центру. Это, в свою очередь, объясняется уменьшением эффекта вязкости с увеличением ω , так как число Рейнольдса увеличивается пропорционально ω .

9. Заключение. Сформулируем ряд выводов из вышеизложенного.

1. Аналитическое решение [10] для параметров течения внутри пограничного слоя на неподвижном

основании кожуха неприменимо для верификации численных решений, полученных численным интегрированием трехмерных уравнений Навье–Стокса (1), (2) из-за появления нефизичной отрицательной толщины пограничного слоя в окрестности вала ротора.

2. Получены новые приближенные аналитические решения для параметров течения внутри пограничного слоя на неподвижном основании кожуха для значений N_1, N_2 в пределах $4 \leq N_1, N_2 \leq 6$. Общим свойством всех этих решений является уменьшение толщины $\delta_0(r)$ пограничного слоя с уменьшением полярного расстояния r .

3. Предложено учитывать в аналитическом решении момент сил вязкого трения на боковой стенке кожуха. Это позволило существенно улучшить точность приближенного аналитического решения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Предприятиям России — современное вентиляционное оборудование (<http://www.sibin.su/articles/35/>).
2. *Tesla N.* Turbine. US Patent N 1061206. May 6, 1913.
3. *Баев В.К., Бажайкин А.Н., Фролов А.Д., Такеда К., Хирано Я.* Очистка воздуха от аммиака в помещениях сельскохозяйственного назначения // *Экология и промышленность России*. 2005. № 11. 13–16.
4. *Приходько Ю.М.* Исследование течения и теплообмена в диаметральных дисковых вентиляторах при низких числах Рейнольдса: Дисс. ... канд. техн. наук. Новосибирск: ИТПМ СО РАН, 2008.
5. *Фомичев В.П.* Устройство для очистки газа. Патент RU № 2229658 С2. М., 2004.
6. *Хайдаров С.В.* Экспериментальное исследование тепло- и массообмена в диаметральных дисковых вентиляторах: Дисс. ... канд. техн. наук. Новосибирск: ИТПМ СО РАН, 2000.
7. *Verzicco R., Orlandi P.* A finite-difference scheme for three-dimensional incompressible flows in cylindrical coordinates // *J. Comput. Phys.* 1996. **123**, N 2. 402–414.
8. *Fadhun E.A., Verzicco R., Orlandi P., Mohd-Yusof J.* Combined immersed-boundary finite-difference methods for three-dimensional complex flow simulations // *J. Comput. Phys.* 2000. **161**, N 1. 35–60.
9. *Kiselev S.P., Vorozhtsov E.V., Fomin V.M.* Foundations of fluid mechanics with applications: problem solving using Mathematica. Boston, Basel, Berlin: Birkhäuser, 1999.
10. *Schultz-Grunow F.* Der Reibungswiderstand rotierender Scheiben in Gehäusen // *Zeitschr. für Angew. Math. und Mech.* 1935. **15**, N 4. 191–204.
11. *Лойцянский Л.Г.* Аэродинамика пограничного слоя. Ленинград, М.: Гос. изд-во технико-теорет. лит., 1941.
12. *Лойцянский Л.Г.* Ламинарный пограничный слой. М.: ГИФМЛ, 1962.
13. *Kim J., Moin P.* Application of a fractional-step method to incompressible Navier–Stokes equations // *J. Comput. Phys.* 1985. **59**, N 2. 308–323.
14. *Lai M.C., Lin W.-W., Wang W.* A fast spectral/difference method without pole conditions for Poisson-type equations in cylindrical and spherical geometries // *IMA J. Numer. Anal.* 2002. **22**. 537–548.
15. *Самарский А.А., Гулин А.В.* Численные методы. М.: Наука, 1989.
16. *Морозов В.А., Кирсанова Н.Н., Сысоев А.Ф.* Комплекс алгоритмов быстрого преобразования Фурье дискретных рядов // Сб. “Численный анализ на ФОРТРАНе” / Под ред. Воеводина В.В. Вып. 15. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1976. 30–51.
17. *Wolfram S.* The Mathematica book. Cambridge: Cambridge University Press, 1996.
18. *Дрейнер Н., Смит Г.* Прикладной регрессионный анализ. Множественная регрессия. М.: Диалектика, 2007.

Поступила в редакцию
07.09.2009