УДК 519.6

О ПРИБЛИЖЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОМ РЕШЕНИИ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ФИЛЬТРАЦИИ

И. В. Колос[1], **М. В. Колос**[2]

Получено аналитическое выражение для определения приближенного значения импульсной переходной матрицы допустимого фильтра при решении задачи линейной оптимальной фильтрации с вырожденным белым шумом. Доказана теорема сходимости. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (коды проектов 07–01–00269, 07–01–92104, 06–01–96648).

1. Введение. Пусть E_n — n-мерное евклидово пространство со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)_n$, $L_2\big([0,t]\big)$ — гильбертово пространство вектор-функций, определенных на сегменте $[0,t]$, $0 \leqslant t \leqslant T < \infty$, и интегрируемых с квадратом по Лебегу с нормой $\|\cdot\|_0$ и скалярным произведением $(\cdot\,,\cdot)_0$; $W_2^1\big([0,t]\big)$ — позитивное гильбертово пространство, $(\cdot\,,\cdot)_1$ — скалярное произведение и $\|\cdot\|_1$ — норма в $W_2^1\big([0,t]\big)$; $W_2^{-1}\big([0,t]\big)$ — негативное пространство с нормой $\|\cdot\|_{-1}$ и скалярным произведением $(\cdot\,,\cdot)_{-1}$ [4].

Для любых двух элементов $u \in W_2^{-1}\big([0,t]\big)$ и $v \in W_2^1\big([0,t]\big)$ определим билинейную форму

$$\langle u, v\rangle = \lim_{k\to\infty}\int\limits_0^t u_k^{\mathrm T}(\tau)v(\tau)\,d\tau,$$

где $\big\{u_k(\tau)\big\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность функций из $L_2\big([0,t]\big)$ такая, что $\|u-u_k\|_{-1} \to 0$ при $k \to \infty$. Очевидно, что билинейная форма совпадает со скалярным произведением в $L_2\big([0,t]\big)$, если $u \in L_2\big([0,t]\big)$.

Согласно теоремам вложения С.Л. Соболева [9], в негативное пространство входят обобщенные функции типа δ-функций Дирака. Подробнее со свойствами позитивных и негативных пространств можно ознакомиться в [3, 4, 9]. Символ $^{\mathrm T}$ означает операцию транспонирования. Через $C\big([0,t]\big)$ будем обозначать пространство непрерывных на $[0,t]$ вектор-функций с нормой $\|u\|_C = \max\limits_{\tau}\Big\{\big|u(\tau)\big|,\ \tau \in \big([0,t]\big)\Big\}$, $|u|^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k^2$, $u_k(\tau)$ — координаты вектора $u(\tau)$.

Обозначим через $(\Omega,\mathcal F,P)$ вероятностное пространство, на котором определены все встречающиеся в дальнейшем случайные величины и функции, M — оператор математического ожидания.

Пусть $x(\tau) \equiv x(\tau,\omega)$ — векторный случайный процесс, $\tau \in [0,t]$, $\omega \in \Omega$, выборочные функции которого с вероятностью 1 принадлежат пространству $W_2^{-1}\big([0,t]\big)$. Математическое ожидание $M\big[x(\tau)\big]$ вычисляется по формуле $M\big[x(\tau)\big] = D^*M\big[j^*x(\tau)\big]$, а ковариационная матрица для $\tau,\sigma \in [0,t]$ имеет вид $M\big[x(\tau)x^{\mathrm T}(\sigma)\big] = D^*D^*M\Big[\big(j^*x(\tau)\big)\big(j^*x(\sigma)\big)^{\mathrm T}\Big]$. Здесь оператор D^* изоморфно отображает $L_2\big([0,t]\big)$ на $W_2^{-1}\big([0,t]\big)$, а j^* обратный ему оператор.

Случайный процесс $v(\tau,\omega)$ с нулевым средним и ковариационной функцией, содержащей множителем δ-функцию Дирака: $M\big[v(\tau)\big] = 0$, $M\big[v(\tau)v^{\mathrm T}(\sigma)\big] = V(\tau)\delta(\tau-\sigma)$, где $V(\tau)$ — симметрическая положительно определенная матрица с элементами из $C\big([0,t]\big)$, называется белым шумом [8].

Множитель $V(\tau)$ при δ-функции называется матрицей интенсивности белого шума $v(\tau,\omega)$. Если интенсивность белого шума представляет собой неотрицательно определенную симметрическую матрицу, то такой процесс будем называть белым вырожденным шумом.

2. Постановка задачи линейной оптимальной фильтрации. Обозначим через $x(\tau) \equiv x(\tau,\omega)$, $0 \leqslant \tau \leqslant t$, $\omega \in \Omega$ — случайный n-мерный гауссовский процесс с реализациями, принадлежащими с вероятностью 1 пространству непрерывных функций $C\big([0,t]\big)$, и со следующими статистиками: $M\big[x(\tau)\big] = 0$,

[1] Университет Российской академии образования, ул. Б. Полянка, д. 58, 109180, Москва; e-mail: kolos_v@mail.ru

[2] Научно-исследовательский вычислительный центр, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, 119991, Ленинские горы, Москва; e-mail: arush@srcc.msu.su

$M\big[x(\tau)x^{\mathrm{T}}(\sigma)\big] = K_x(\tau,\sigma)$, где $0 \leqslant \sigma \leqslant t$. Элементы матрицы $K_x(\tau,\sigma)$ по обоим аргументам принадлежат $L_2\big([0,t]\big)$.

Задача линейной оптимальной фильтрации состоит в следующем. Пусть известен некоторый случайный процесс $\big\{y(\tau),\ 0 \leqslant \tau \leqslant t\big\}$, связанный с процессом $x(\tau)$ соотношением

$$y(\tau) = C(\tau)x(\tau) + v(\tau), \tag{1}$$

где $C(\tau)$ — матрица наблюдений (измерений) размерности $m \times n$, $m \leqslant n$, с гладкими элементами (ранг матрицы $C(\tau)$ равен m), $v(\tau) \equiv v(\tau,\omega)$ — m-мерный гауссовский случайный процесс с математическим ожиданием $M\big[v(\tau)\big] = 0$ и ковариационной матрицей $K_v(\tau,\sigma) = M\big[v(\tau)v^{\mathrm{T}}(\sigma)\big]$. Реализации $v(\tau)$ и элементы ковариационной матрицы $K_v(\tau,\sigma)$ могут принадлежать негативному пространству $W_2^{-1}\big([0,t]\big)$, процессы $x(\tau)$ и $v(\tau)$ некоррелированы.

Требуется по наблюдениям процесса $\big\{y(\tau),\ 0 \leqslant \tau \leqslant t\big\}$ найти линейную оценку $\widehat{x}(\tau)$ процесса $x(\tau)$, удовлетворяющую критерию минимума среднеквадратической ошибки в момент времени $\tau = t$:

$$m(t) = \inf_h \left\{ M\Big[\big(z, x(t) - \widehat{x}(t)\big)_n^2\Big] \;\Big|\; \widehat{x}(t) = \int\limits_0^t h(t,\tau)y(\tau)\,d\tau \right\}. \tag{2}$$

Здесь z — произвольный постоянный вектор из E_n, нижняя грань берется по всем матрицам $h(t,\tau)$ размерности $n \times m$, для которых существует допустимый фильтр $\widehat{x}(t) = \int\limits_0^t h(t,\tau)y(\tau)\,d\tau$ (интеграл в (2) понимается в смысле билинейной формы, $\widehat{x}_i = \big\langle h_i^{\mathrm{T}}, y\big\rangle$, где $h_i(t,\tau)$ — i-я строка матрицы $h(t,\tau)$, $h_i^{\mathrm{T}}(t,\tau) \in W_2^1\big([0,t]\big)$, $\widehat{x}_i(t)$ — i-я координата вектора оценки).

Импульсная переходная функция $h_0(t,\tau)$, определяющая оптимальную оценку в смысле среднеквадратического критерия (2), удовлетворяет матричному уравнению Винера–Хопфа [3–5, 8]

$$M\big[x(t)y^{\mathrm{T}}(\sigma)\big] = \int\limits_0^t h_0(t,\tau)M\big[y(\tau)y^{\mathrm{T}}(\sigma)\big]\,d\tau, \quad \sigma \in [0,t]. \tag{3}$$

Заменяя в (3) случайный процесс $y(\tau)$ его представлением (1), получим уравнение

$$K_x(t,\sigma)C^{\mathrm{T}}(\sigma) = \int\limits_0^t h_0(t,\tau)C(\tau)K_x(\tau,\sigma)C^{\mathrm{T}}(\sigma)\,d\tau + \int\limits_0^t h_0(t,\tau)K_v(\tau,\sigma)\,d\tau. \tag{4}$$

Уравнение (4) в общем случае является уравнением Фредгольма первого рода, решение которого, как известно, может быть неустойчивым [1, 2].

Случайный процесс $v(\tau)$ в соотношении (1) будем называть шумом, а $x(\tau)$ — полезным сигналом.

В [3] получено приближенно-аналитическое решение задачи линейной оптимальной фильтрации, когда элементы корреляционных матриц сигнала и шума принадлежат $L_2\big([0,t]\big)$.

Пусть $K_v(\tau,\sigma) = V(\tau)\delta(\tau-\sigma)$, а матрица $V(\tau)$ неотрицательно определена, т.е. для всех $u \in L_2\big([0,t]\big)$ выполнено $(u, Vu)_0 \geqslant 0$ (в этом случае обратная матрица к $V(\tau)$ может не существовать или быть неограниченной).

Будем рассматривать задачу линейной оптимальной фильтрации с вырожденным белым шумом. В этом случае уравнение Винера–Хопфа принимает вид

$$K_x(t,\sigma)C^{\mathrm{T}}(\sigma) = \int\limits_0^t h_0(t,\tau)C(\tau)K_x(\tau,\sigma)C^{\mathrm{T}}(\sigma)\,d\tau + h_0(t,\tau)V(\sigma)\,, \tag{5}$$

где $V(\sigma)$ — неотрицательно определенная матрица интенсивности белого вырожденного шума $v(\sigma)$. Если ранг матрицы $V(\sigma)$ равен p, то ее можно представить следующим образом: $V(\sigma) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R(\sigma) \end{bmatrix}$, где $R(\sigma)$ — невырожденная (положительно определенная) матрица порядка p с элементами, принадлежащими пространству $W_2^1\big([0,t]\big)$.

Решение (5) неустойчиво, а его компоненты могут принадлежать негативному пространству [3–5]. Вместо (5) будем решать регуляризированное уравнение Винера–Хопфа

$$K_x(t,\sigma)C^{\mathrm{T}}(\sigma)=\int\limits_0^t h_\alpha(t,\tau)C(\tau)K_x(\tau,\sigma)C^{\mathrm{T}}(\sigma)\,d\tau+h_\alpha(t,\tau)S_\alpha(\sigma),\tag{6}$$

где $S_\alpha(\sigma)=\begin{bmatrix}\alpha I_{m-p} & 0\\ 0 & \alpha I_p+R(\sigma)\end{bmatrix}$, $\alpha>0$ — параметр регуляризации, I_{m-p} и I_p — единичные матрицы порядка $m-p$ и p.

3. Приближенно-аналитическое решение. Пусть $L_2\big([0,T]\big)$ — гильбертово пространство функций, интегрируемых с квадратом в смысле Лебега на $0\leqslant t\leqslant T<\infty$. Выберем в $L_2\big([0,T]\big)$ ортонормированный базис $\big\{e_i(t)\big\}_{i=1}^\infty$. Тогда любая конечная система функций $\big\{e_i(t)\big\}_{i=1}^N$ будет линейно независимой.

Разлагая матрицу $C(\tau)K_x(\tau,\sigma)C^{\mathrm{T}}(\sigma)$ в ряд по базису $\big\{e_i(t)\big\}_{i=1}^\infty$, получим

$$C(\tau)K_x(\tau,\sigma)C^{\mathrm{T}}(\sigma)=\sum_{i,j=1}^\infty e_i(\tau)\mathbf{K}_{ij}e_j(\sigma),$$

где $\mathbf{K}_{ij}$ — матрица, составленная из коэффициентов Фурье элементов матрицы $C(\tau)K_x(\tau,\sigma)C^{\mathrm{T}}(\sigma)$:

$$k_{ij}^{pq}=\int\limits_0^T\int\limits_0^T k_x^{pq}(\tau,\sigma)e_i(\tau)e_j(\sigma)\,d\tau\,d\sigma.$$

Здесь $k_x^{pq}(\tau,\sigma)$ — элемент матрицы $C(\tau)K_x(\tau,\sigma)C^{\mathrm{T}}(\sigma)$, стоящий в p-й строке и q-м столбце:

$$k_x^{pq}(\tau,\sigma)=\sum_{l=1}^n\sum_{k=1}^n c_{pk}k_{kl}c_{lq},$$

где c_{lq} и k_{kl} — элементы матриц $C(\tau)$ и $K_x(\tau,\sigma)$ и $p,q=1,2,\ldots,m$; $i,j=1,2,\ldots$.

Аналогично матрицу $K_x(t,\sigma)C^{\mathrm{T}}(\sigma)$ представим рядом Фурье $K_x(t,\sigma)C^{\mathrm{T}}(\sigma)=\sum\limits_{i,j=1}^\infty e_i(t)\mathbf{K}_{ij}^1e_j(\sigma)$, где $\mathbf{K}_{ij}^1$ — матрица, составленная из коэффициентов Фурье элементов матрицы $K_x(t,\sigma)C^{\mathrm{T}}(\sigma)$:

$$\widetilde{k}_{ij}^{pq}=\int\limits_0^T\int\limits_0^T k^{pq}(\tau,\sigma)e_i(\tau)e_j(\sigma)\,d\tau\,d\sigma,$$

а $k^{pq}(\tau,\sigma)=\sum\limits_{l=1}^n k_{pl}c_{lq}$ — элемент матрицы $K_x(t,\sigma)C^{\mathrm{T}}(\sigma)$, стоящий в p-й строке и q-м столбце.

Зафиксируем некоторое число N и определим следующие матрицы: $K_N(\tau,\sigma)=\sum\limits_{i,j=1}^N e_i(\tau)\mathbf{K}_{ij}e_j(\sigma)$, $K_N^1(t,\sigma)=\sum\limits_{i,j=1}^N e_i(t)\mathbf{K}_{ij}^1e_j(\sigma)$. Положим $B_N^{\mathrm{T}}(\tau)\equiv\big[e_1(\tau)I_m\ e_2(\tau)I_m\ \ldots\ e_N(\tau)I_m\big]$, где I_m — единичная матрица порядка m. Матрица $B_N^{\mathrm{T}}(\tau)$ имеет размерность $m\times mN$ и ранг, равный m. Пусть I_n — единичная матрица порядка n. Тогда $F_N^{\mathrm{T}}(\tau)\equiv[e_1(\tau)I_n\ e_2(\tau)I_n\ \ldots\ e_N(\tau)I_n]$. Матрица $F_N^{\mathrm{T}}(\tau)$ имеет размерность $n\times nN$, ранг матрицы равен n. Определим матрицы

$$A_N\equiv\begin{bmatrix}\mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} & \ldots & \mathbf{K}_{1N}\\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} & \ldots & \mathbf{K}_{2N}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \mathbf{K}_{N1} & \mathbf{K}_{N2} & \ldots & \mathbf{K}_{NN}\end{bmatrix}\quad\text{порядка } mN \text{ и}\quad L_N\equiv\begin{bmatrix}\mathbf{K}_{11}^1 & \mathbf{K}_{12}^1 & \ldots & \mathbf{K}_{1N}^1\\ \mathbf{K}_{21}^1 & \mathbf{K}_{22}^1 & \ldots & \mathbf{K}_{2N}^1\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \mathbf{K}_{N1}^1 & \mathbf{K}_{N2}^1 & \ldots & \mathbf{K}_{NN}^1\end{bmatrix}\quad\text{размерности } nN\times mN.$$

Тогда матрицы $K_N(\tau,\sigma)$ и $K_N^1(t,\sigma)$ можно представить в виде

$$K_N=B_N^{\mathrm{T}}(\tau)A_NB_N(\sigma),\quad K_N^1(t,\sigma)=F_N^{\mathrm{T}}(t)L_NB_N(\sigma).\tag{7}$$

Далее рассмотрим уравнение

$$K_N^1(t,\sigma)=\int\limits_0^t h_{\alpha N}(t,\tau)K_N(\tau,\sigma)\,d\tau+h_{\alpha N}(t,\tau)S_\alpha(\sigma). \tag{8}$$

Подставляя в уравнение (8) выражение (7), получим

$$F_N^{\mathrm{T}}(t)L_N B_N(\sigma)=\int\limits_0^t h_{\alpha N}(t,\tau)B_N^{\mathrm{T}}(\tau)A_N B_N(\sigma)\,d\tau+h_{\alpha N}(t,\tau)S_\alpha(\sigma). \tag{9}$$

Отметим, что матрица $S_\alpha(\sigma)$ положительно определена при $\alpha>0$; следовательно, существует ограниченная обратная матрица $S_\alpha^{-1}(\sigma)=\left[\alpha I_m+V(\sigma)\right]^{-1}$. Умножим (9) справа на выражение $S_\alpha^{-1}(\sigma)B_N^{\mathrm{T}}(\sigma)$ и, интегрируя полученное соотношение по σ от 0 до t, находим, что

$$\begin{gathered}F_N^{\mathrm{T}}(t)L_N\int\limits_0^t B_N(\sigma)S_\alpha^{-1}(\sigma)B_N^{\mathrm{T}}(\sigma)\,d\sigma=\int\limits_0^t h_{\alpha N}(t,\tau)B_N^{\mathrm{T}}(\tau)\,d\tau\,A_N\int\limits_0^t B_N(\sigma)S_\alpha^{-1}(\sigma)B_N^{\mathrm{T}}(\sigma)\,d\sigma+\\+\int\limits_0^t h_{\alpha N}(t,\sigma)B_N^{\mathrm{T}}(\sigma)\,d\sigma.\end{gathered} \tag{10}$$

Обозначим $Q_{\alpha N}(t)\equiv\int\limits_0^t B_N(\sigma)S_\alpha^{-1}(\sigma)B_N^{\mathrm{T}}(\sigma)\,d\sigma$. Отметим, что матрица $Q_{\alpha N}(t)$ имеет размерность $mN\times mN$; это симметрическая и неотрицательно определенная матрица, $Q_{\alpha N}(0)=0$. Ранг матрицы $B_N(\sigma)S_\alpha^{-1}(\sigma)B_N^{\mathrm{T}}(\sigma)$ равен m, а порядок равен mN. Ранг матрицы $\int\limits_0^t B_N(\sigma)S_\alpha^{-1}(\sigma)B_N^{\mathrm{T}}(\sigma)d\sigma$ зависит от элементов матрицы $S_\alpha^{-1}(\sigma)$. Так, например, если матрица интенсивности вырожденного белого шума $V(\sigma)$ не зависит от времени, т.е. $V(\sigma)=V$, то ранг матрицы $Q_{\alpha N}(t)$ равен mN и существует ограниченная обратная матрица $Q_{\alpha N}^{-1}(t)$.

Действительно, матрица $B_N(\sigma)S_\alpha^{-1}(\sigma)B_N(\sigma)$ имеет вид

$$B_N(\sigma)S_\alpha^{-1}(\sigma)B_N(\sigma)=\begin{bmatrix}e_1S_\alpha^{-1}e_1 & e_1S_\alpha^{-1}e_2 & \dots & e_1S_\alpha^{-1}e_N\\ e_2S_\alpha^{-1}e_1 & e_2S_\alpha^{-1}e_2 & \dots & e_2S_\alpha^{-1}e_N\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ e_NS_\alpha^{-1}e_1 & e_NS_\alpha^{-1}e_2 & \dots & e_NS_\alpha^{-1}e_N\end{bmatrix},$$

где $e_i(\sigma)S_\alpha^{-1}(\sigma)e_j(\sigma)=\begin{bmatrix}e_is_{11}e_j & e_is_{12}e_j & \dots & e_is_{1m}e_j\\ e_is_{21}e_j & e_is_{22}e_j & \dots & e_is_{2m}e_j\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ e_is_{m1}e_j & e_is_{m2}e_j & \dots & e_is_{mm}e_j\end{bmatrix}$, а s_{kl} — элементы матрицы $S_\alpha^{-1}(\sigma)$. Элементы матрицы $\int\limits_0^t B_N(\sigma)S_\alpha^{-1}(\sigma)B_N^{\mathrm{T}}(\sigma)\,d\sigma$ определяются соотношениями $\int\limits_0^t e_i(\sigma)s_{pq}(\sigma)e_j(\sigma)\,d\sigma,\ i,j=1,2,\dots,N;$ $p,q=1,2,\dots,m$. Если матрица интенсивности шума не зависит от времени, то

$$\int\limits_0^T e_i(\sigma)s_{pq}e_j(\sigma)\,d\sigma=\begin{cases}0, & \text{при}\quad i\neq j;\\ s_{pq}, & \text{при}\quad i=j,\end{cases}\qquad i,j=1,2,\dots,N;\quad p,q=1,2,\dots,m;$$

матрица $Q_{\alpha N}(T)$ в блочной форме представима формулой $Q_{\alpha N}(T)=\begin{bmatrix}S_\alpha^{-1} & 0 & \dots & 0\\ 0 & S_\alpha^{-1} & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & S_\alpha^{-1}\end{bmatrix}$. Ранг матрицы $Q_{\alpha N}(T)$ равен mN, а матрица $Q_{\alpha N}(t)$ — положительно определена.

Полагаем, что матрица $S_\alpha^{-1}(\sigma)$ такова, что $Q_{\alpha N}(t)$ положительно определенная матрица и существует ограниченная обратная матрица $Q_{\alpha N}^{-1}(t)$. Тогда уравнение (10) можно записать следующим образом:

$$F_N^{\mathrm{T}}(t)L_N Q_{\alpha N}(t) = \int\limits_0^t h_{\alpha N}(t,\tau)B_N^{\mathrm{T}}(\tau)\,d\tau\,\big[A_N Q_{\alpha N}(t) + I_{mN}\big], \tag{11}$$

где I_{mN} — единичная матрица порядка mN. Решение уравнения (11) будем искать в виде

$$h_{\alpha N}(t,\tau) = \eta(t-\tau)\,F_N^{\mathrm{T}}(t)\,L_N\,Q_{\alpha N}(t)\,Y_N(t)\,B_N(\tau)S_\alpha^{-1}(\tau), \tag{12}$$

где $\eta(t-\tau) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \tau \leqslant t; \\ 0, & \text{если} \quad \tau > t. \end{cases}$, а $Y_N(t)$ — неизвестная матрица.

Подставляя выражение (12) в уравнение (11) и учитывая, что $Q_{\alpha N}(t) = \int\limits_0^t B_N(\sigma)S_\alpha^{-1}(\sigma)B_N(\sigma)\,d\sigma$, получим равенство

$$F_N^{\mathrm{T}}(t)L_N Q_{\alpha N}(t) = F_N^{\mathrm{T}}(t)L_N Q_{\alpha N}(t)Y_N(t)Q_{\alpha N}(t)\,\big[A_N Q_{\alpha N}(t) + I_{mN}\big]. \tag{13}$$

Так как матрица A_N неотрицательная (по построению), а матрица $Q_{\alpha N}(t)$ положительно определенная при $t > 0$, то существуют ограниченные обратные матрицы $\big[A_N Q_{\alpha N}(t) + I_{mN}\big]^{-1}$ и $Q_{\alpha N}^{-1}(t)$. Умножая (13) справа на $\big[A_N Q_{\alpha N}(t) + I_{mN}\big]^{-1} Q_{\alpha N}^{-1}(t)$, находим, что

$$F_N^{\mathrm{T}}(t)L_N Q_{\alpha N}(t)\,\big[A_N Q_{\alpha N}(t) + I_{mN}\big]^{-1} Q_{\alpha N}^{-1}(t) = F_N^{\mathrm{T}}(t)L_N Q_{\alpha N}(t)Y_N(t). \tag{14}$$

Вычислим [6] псевдообратную матрицу к матрице $F_N^{\mathrm{T}}(t)L_N Q_{\alpha N}(t)$. Она имеет вид

$$\big[F_N^{\mathrm{T}}(t)L_N Q_{\alpha N}(t)\big]^+ = Q_{\alpha N}^{\mathrm{T}}(t)L_N^{\mathrm{T}}F_N(t)\big[F_N^{\mathrm{T}}(t)L_N Q_{\alpha N}(t)Q_{\alpha N}^{\mathrm{T}}(t)L_N^{\mathrm{T}}F_N(t)\big]^{-1}.$$

Умножим слева выражение (14) на псевдообратную матрицу $\big[F_N^{\mathrm{T}}(t)L_N Q_{\alpha N}(t)\big]^+$. Тогда решение (14) с минимальной нормой представляется выражением:

$$Y_N(t) = \big[A_N Q_{\alpha N}(t) + I_{mN}\big]^{-1} Q_{\alpha N}^{-1}(t).$$

Подставим это соотношение в (12). Тогда

$$h_{\alpha N}(t,\tau) = \eta(t-\tau)F_N^{\mathrm{T}}(t)L_N Q_{\alpha N}(t)\big[A_N Q_{\alpha N}(t) + I_{mN}\big]^{-1} Q_{\alpha N}^{-1}(t)B_N(\tau)S_\alpha^{-1}(\tau). \tag{15}$$

Итак, найдено решение уравнения (8). Далее покажем, что при $N \to \infty$ последовательность решений (15) сходится к решению уравнения (6). Умножая слева уравнения (6) и (8) на произвольный вектор z из евклидового пространства E_n, получим

$$z^{\mathrm{T}}K_x(t,\sigma)C^{\mathrm{T}}(\sigma) = \int\limits_0^t z^{\mathrm{T}}h_\alpha(t,\tau)C(\tau)K_x(\tau,\sigma)C^{\mathrm{T}}(\sigma)\,d\tau + z^{\mathrm{T}}h_\alpha(t,\sigma)S_\alpha(\sigma), \tag{16}$$

$$z^{\mathrm{T}}K_N^1(t,\sigma) = \int\limits_0^t z^{\mathrm{T}}h_{\alpha N}(t,\tau)K_N(\tau,\sigma)\,d\tau + z^{\mathrm{T}}h_{\alpha N}(t,\sigma)S_\alpha(\sigma). \tag{17}$$

Введем обозначения $f \equiv C(\sigma)K_x(t,\sigma)z$, $u \equiv h_\alpha^{\mathrm{T}}(t,\tau)z$, $\mathcal{A}u \equiv \int\limits_0^t C(\sigma)K_x(\tau,\sigma)C^{\mathrm{T}}(\tau)h_\alpha^{\mathrm{T}}(t,\tau)z\,d\tau$, $f_N \equiv \big[K_N^1(t,\sigma)\big]^{\mathrm{T}}z$, $u_N \equiv h_{\alpha N}^{\mathrm{T}}(t,\tau)z$, $\mathcal{A}_N u_N \equiv \int\limits_0^t K_N(\tau,\sigma)h_{\alpha N}^{\mathrm{T}}(t,\tau)z\,d\tau$ и запишем уравнения (16) и (17) в операторной форме:

$$f = \mathcal{A}u + S_\alpha u, \tag{18}$$

$$f_N = \mathcal{A}_N u_N + S_\alpha u_N.$$

Отметим, что существуют ограниченные операторы $\mathcal{B} \equiv [\mathcal{A} + S_\alpha]^{-1}$, $\mathcal{B}_N \equiv [\mathcal{A}_N + S_\alpha]^{-1}$. Рассмотрим уравнение $g = \mathcal{A}_N u + S_\alpha u$, где g — произвольный вектор из $L_2\big([0,t]\big)$. Это уравнение можно записать в виде $(S_\alpha + \mathcal{A})u + (\mathcal{A}_N - \mathcal{A})u = g$. Оператор $\mathcal{B}_N$ можно представить как $\mathcal{B}_N = \big[I - \mathcal{B}(\mathcal{A}_N - \mathcal{A})\big]^{-1}\mathcal{B}$. Действительно, рассмотрим оператор $\big[I - \mathcal{B}(\mathcal{A}_N - \mathcal{A})\big]$, где I — единичный оператор. Тогда

$$\begin{aligned} I - \mathcal{B}(\mathcal{A}_N - \mathcal{A}) &= I - \mathcal{B}\mathcal{A}_N + \mathcal{B}\mathcal{A} = I - \mathcal{B}\mathcal{A}_N + \mathcal{B}\mathcal{A} + \mathcal{B}S_\alpha - \mathcal{B}S_\alpha = \\ &= I - \mathcal{B}(\mathcal{A} + S_\alpha) + \mathcal{B}(\mathcal{A}_N + S_\alpha) = \mathcal{B}(\mathcal{A}_N + S_\alpha) \end{aligned}$$

и, следовательно, $\big[\mathcal{B}(\mathcal{A}_N + S_\alpha)\big]^{-1} = (\mathcal{A}_N + S_\alpha)^{-1}\mathcal{B}^{-1}$; отсюда получаем, что $\mathcal{B}_N = \big[I - \mathcal{B}(\mathcal{A}_N - \mathcal{A})\big]^{-1}\mathcal{B}$.

Имеем $\big\|\mathcal{B}(\mathcal{A}_N - \mathcal{A})\big\| \leqslant \|\mathcal{B}\|\,\|\mathcal{A}_N - \mathcal{A}\| \to 0$ при $N \to \infty$ (по построению операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}_N$). Выберем N таким, чтобы выполнялось неравенство $\big\|\mathcal{B}(\mathcal{A}_N - \mathcal{A})\big\| < 1$. Тогда оператор $\big[I - \mathcal{B}(\mathcal{A}_N - \mathcal{A})\big]^{-1}$ является суммой ряда [7]

$$\big[I - \mathcal{B}(\mathcal{A}_N - \mathcal{A})\big]^{-1} = I + \big[\mathcal{B}(\mathcal{A}_N - \mathcal{A})\big] + \big[\mathcal{B}(\mathcal{A}_N - \mathcal{A})\big]^2 + \ldots + \big[\mathcal{B}(\mathcal{A}_N - \mathcal{A})\big]^k + \ldots;$$

следовательно, $\mathcal{B}_N g = (\mathcal{A}_N + S_\alpha)^{-1} g = \big[I - \mathcal{B}(\mathcal{A}_N - \mathcal{A})\big]^{-1}\mathcal{B}g = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\big[\mathcal{B}(\mathcal{A}_N - \mathcal{A})\big]^k\mathcal{B}g$. Тогда очевидно, что

$$\begin{aligned} \|\mathcal{B}_N g - \mathcal{B}g\|_0 &= \left\|\left(\sum_{k=0}^{\infty}\big[\mathcal{B}(\mathcal{A}_N - \mathcal{A})\big]^k - I\right)\mathcal{B}g\right\|_0 = \left\|\left(\sum_{k=1}^{\infty}\big[\mathcal{B}(\mathcal{A}_N - \mathcal{A})\big]^k\right)\mathcal{B}g\right\|_0 \leqslant \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{\infty}\big\|\mathcal{B}(\mathcal{A}_N - \mathcal{A})\big\|^k\,\|\mathcal{B}\|\,\|\,g\,\|_0 = \frac{\big\|\mathcal{B}(\mathcal{A}_N - \mathcal{A})\big\|}{1 - \big\|\mathcal{B}(\mathcal{A}_N - \mathcal{A})\big\|}\,\|\mathcal{B}\|\,\|\,g\,\|_0 \to 0 \quad \text{при} \quad N \to \infty. \end{aligned}$$

Теперь покажем, что $\|u_N - u\|_0 \to 0$ при $N \to \infty$, где u — решение уравнения (18). Действительно,

$$\begin{aligned} \|u_N - u\|_0 &= \big\|(\mathcal{A}_N + S_\alpha)^{-1} f_N - (\mathcal{A} + S_\alpha)^{-1} f\big\|_0 = \|\mathcal{B}_N f_N - \mathcal{B}f\|_0 = \\ &= \|\mathcal{B}_N f_N - \mathcal{B}_N f + \mathcal{B}_N f - \mathcal{B}f\|_0 \leqslant \|\mathcal{B}_N\|\,\|f_N - f\|_0 + \|\mathcal{B}_N f - \mathcal{B}f\|_0 \to 0 \quad \text{при} \quad N \to \infty, \end{aligned} \tag{19}$$

так как $\|f_N - f\|_0 \to 0$ при $N \to \infty$ по построению.

Отсюда следует, что при произвольном $z \in E_n$ последовательность $h^{\mathrm{T}}_{\alpha N}(t,\tau)z \to h^{\mathrm{T}}_{\alpha}(t,\tau)z$ при $N \to \infty$; следовательно, последовательность приближенных решений уравнения (8) стремится при $N \to \infty$ к решению уравнения (6). Итак, фактически доказана следующая

Теорема. *При каждом фиксированном* $t \in (0,T]$ *справедливо соотношение*

$$\lim_{\alpha\to 0}\lim_{N\to\infty} M\Big[\big(z, x(t) - \widehat{x}_N(t)\big)^2_n\Big] = m(t), \quad \widehat{x}_N(t) = \int\limits_0^t h_{\alpha N}(t,\tau)y(\tau)\,d\tau.$$

Справедливость ее вытекает из (19) и теоремы 4.4 доказанной в [5].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986.
2. *Морозов В.А.* Регулярные методы решения некорректно поставленных задач. М.: Наука, 1987.
3. *Белов Ю.А., Диденко В.П., Козлов Н.Н. и др.* Математическое обеспечение сложного эксперимента. Т. 1. Обработка измерений при исследовании сложных систем. Киев: Наукова думка, 1982.
4. *Ляшко И.И., Диденко В.П., Цитрицкий О.Е.* Фильтрация шумов. Киев: Наукова думка, 1979.
5. *Колос М.В., Колос И.В.* Методы оптимальной линейной фильтрации. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2001.
6. *Альберт А.* Регрессия, псевдоинверсия и рекуррентное оценивание. М.: Наука, 1977.
7. *Люстерник Л.А., Соболев В.И.* Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1965.
8. *Пугачев В.С., Синицын И.Н.* Стохастические дифференциальные системы. М.: Наука, 1985.
9. *Соболев С.Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988.

Поступила в редакцию
11.09.2008