

УДК 517.958:532

## ПРИМЕНЕНИЕ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ АЛГОРИТМОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ФИЛЬТРАЦИИ ЖИДКОСТИ В ТРЕЩИНОВАТО-ПОРИСТОМ ПЛАСТЕ К СКВАЖИНАМ СО СЛОЖНОЙ ТРАЕКТОРИЕЙ

Д. А. Губайдуллин<sup>1</sup>, Р. В. Садовников<sup>1</sup>

Рассматриваются вопросы, связанные с решением на многопроцессорных вычислительных системах задачи фильтрации жидкости в трещиновато-пористом пласте к скважинам с различной формой траектории ствола: вертикальным, наклонным, горизонтальным и др. Для решения использовался метод конечных элементов на неструктурированной сетке тетраэдров. Система уравнений решалась с помощью библиотеки параллельных алгоритмов Aztec, которая включает в себя ряд итерационных методов Крылова с предобуславливателями и использует технологию параллельного программирования MPI. Работа выполнена в рамках раздела “Высокопроизводительные вычисления и многопроцессорные системы” программы № 14 Президиума РАН “Фундаментальные проблемы информатики и информационных технологий”.

**1. Введение.** Задачи теории фильтрации — одни из многих задач механики жидкости и газа, требующие для своего решения больших вычислительных ресурсов. Повышенные требования к производительности и памяти обусловлены пространственным характером и нестационарностью протекающих процессов, многофазностью сред, нелинейностью моделей сред и другими факторами. Применение многопроцессорных систем и параллельных вычислений значительно расширяет возможности исследователей, занимающихся компьютерным моделированием таких сложных физических процессов [1]. В настоящей статье рассматриваются вопросы, связанные с решением задач фильтрации жидкости в пласте на многопроцессорных вычислительных системах.

Как правило, при численном моделировании пласта требуется модель скважины для установления связи между дебитом скважины, забойным давлением и расчетным давлением в блоке расчетной сетки. Один из подходов к моделированию скважины заключается в соединении аппроксимации уравнений фильтрации для блока расчетной сетки, содержащего скважину, с точной или приближенной аналитической формулой для притока жидкости к скважине. Такая методика первоначально была разработана для вертикальных или почти вертикальных скважин [2], а затем получила развитие для моделирования наклонных и горизонтальных скважин. Подробный обзор этих исследований содержится в работе [3], авторы которой предложили полуаналитические формулы для моделирования разветвленных, многоствольных и так называемых “интеллектуальных” скважин — скважин с устройствами, позволяющими регулировать приток из пласта в скважину.

Преимущество применения полуаналитических методик в численных расчетах заключается в том, что при этом можно использовать достаточно грубую сетку и тем самым значительно сократить необходимые вычислительные ресурсы. С другой стороны, для получения точного или приближенного аналитического решения приходится значительно упрощать схему притока жидкости к скважине, что особенно сказывается при моделировании скважин со сложной траекторией. Альтернативу такому подходу составляет подробное численное моделирование скважины, т.е. представление скважины в виде цилиндрической полости реальных размеров с учетом траектории ее ствола. Очевидно, что для этого требуются значительные вычислительные ресурсы из-за необходимости измельчения сетки в окрестности скважины, но такой подход становится более привлекательным при использовании параллельных вычислений на многопроцессорной технике. Следует отметить, что разработка эффективных программ для многопроцессорных систем представляет собой достаточно сложную задачу. Значительно облегчают решение этой задачи готовые параллельные подпрограммы для решения стандартных численных задач. Как правило, библиотеки таких подпрограмм разрабатываются ведущими специалистами в области численных методов и параллельного программирования. Однако использование этих библиотек не освобождает от необходимости четкого и ясного понимания принципов параллельного программирования.

<sup>1</sup> Институт механики и машиностроения КазНЦ РАН, ул. Лобачевского, 2/31, 420111, Казань; e-mail: gubajdullin@mail.knc.ru, sadovnikov@mail.knc.ru

В качестве объекта исследований в данной работе использовалась модель однофазной фильтрации жидкости в анизотропном трещиновато-пористом пласте [4]. Рассматривались скважины с различной формой траектории ствола: вертикальные, наклонные, горизонтальные и др. Для решения задачи использовался метод конечных элементов на неструктурированной сетке тетраэдров. Аппроксимация уравнений строилась методом взвешенных невязок в сочетании с методом Галеркина, а для аппроксимации производной по времени использовалась неявная схема. Полученная алгебраическая система уравнений решалась на многопроцессорной вычислительной системе с распределенной памятью с помощью библиотеки параллельных алгоритмов Aztec [5], которая включает в себя ряд итерационных методов Крылова с предобуславливателями.

**2. Постановка задачи.** Модель фильтрации однофазной жидкости в упругом трещиновато-пористом пласте, основанная на концепции взаимопроникающих континуумов (система трещин и блоков) с учетом обмена жидкостью между ними, была предложена Г. И. Баренблаттом и др. [4]. При учете анизотропии системы трещин и блоков матрицы породы модель описывается следующей системой уравнений:

$$\beta_1^* \frac{\partial p_1}{\partial t} = \nabla \left( \frac{\mathbf{k}_1}{\mu} \nabla p_1 \right) + \frac{\alpha}{\mu} (p_2 - p_1), \quad \beta_2^* \frac{\partial p_2}{\partial t} = \nabla \left( \frac{\mathbf{k}_2}{\mu} \nabla p_2 \right) - \frac{\alpha}{\mu} (p_2 - p_1), \quad (1)$$

где  $(x, y, z) \in D$ ,  $0 < t \leq T$ ,  $t$  — время,  $T$  — общее время исследований,  $\beta_i^* = \beta_{ckl} + m_i \beta_{ж}$  — коэффициент упругоэластичности пласта,  $\beta_{ckl}$  — коэффициент сжимаемости скелета,  $m_i$  — коэффициент пористости,  $\beta_{ж}$  — коэффициент сжимаемости жидкости,  $p_i$  — давление жидкости,  $\mu$  — коэффициент динамической вязкости жидкости,  $\alpha$  — параметр перетока жидкости между трещинами и блоками,  $\mathbf{k}_i$  — тензор коэффициентов проницаемости. Индекс 1 относится к трещинам, 2 — к блокам матрицы породы. На рис. 1 представлена многосвязная область фильтрации  $D$ , внутренние поверхности которой образованы скважинами, представляющими собой цилиндрическую полость определенного радиуса и траектории. Рассматривались скважины с различной формой траектории ствола: вертикальные, наклонные, горизонтальные и др. На скважинах могут быть заданы граничные условия первого или второго рода:

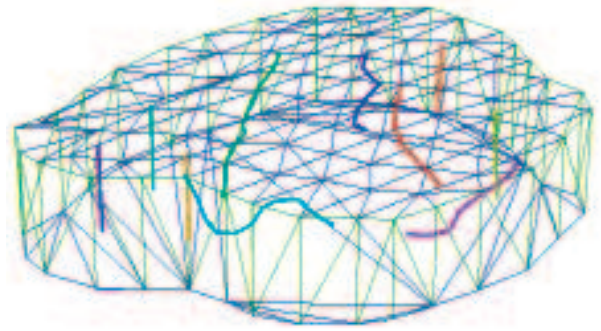


Рис. 1. Схема пласта и расположение скважин

$$p_1(x, y, z, t) = p_2(x, y, z, t) = p_{wi}(t), \quad 0 < t \leq T, \quad (x, y, z) \in \partial S_i^p, \quad i = 1, 2, \dots, N_w^p, \\ \left( \frac{\mathbf{k}_1}{\mu} \nabla p_1, \mathbf{n}_j \right) + \left( \frac{\mathbf{k}_2}{\mu} \nabla p_2, \mathbf{n}_j \right) = q_j(x, y, z, t), \quad 0 < t \leq T, \quad (x, y, z) \in \partial S_j^q, \quad j = 1, 2, \dots, N_w^q,$$

где  $p_{wi}(t)$  — давление на поверхности скважины  $\partial S_i^p$ ,  $N_w^p$  — количество таких скважин,  $q_j$  — объемный расход жидкости, приходящийся на единицу поверхности скважины  $\partial S_j^q$ ,  $\mathbf{n}_j$  — вектор внешней нормали,  $N_w^q$  — количество таких скважин. Граничные условия на внешней поверхности пласта также могут быть заданы условиями первого или второго рода:

$$p_1(x, y, z, t) = p_2(x, y, z, t) = p_{пл}(x, y, z, t), \quad 0 < t \leq T, \quad (x, y, z) \in \partial D^p, \\ \left( \frac{\mathbf{k}_1}{\mu} \nabla p_1, \mathbf{n}_j \right) + \left( \frac{\mathbf{k}_2}{\mu} \nabla p_2, \mathbf{n}_j \right) = q^*(x, y, z, t), \quad 0 < t \leq T, \quad (x, y, z) \in \partial D^q,$$

где  $p_{пл}$  — давление жидкости на части внешней поверхности пласта  $\partial D^p$ ,  $q^*$  — объемный расход жидкости, приходящийся на единицу внешней поверхности пласта  $\partial D^q$ ,  $\partial D = \partial D^p \cup \partial D^q$  — внешняя поверхность пласта. Начальные условия имеют вид:

$$p_1(x, y, z, 0) = p_1(x, y, z), \quad p_2(x, y, z, 0) = p_2(x, y, z), \quad (x, y, z) \in D.$$

Объемный дебит скважины вычисляется по формуле:

$$\int_{\partial S_j^q} q_j(x, y, z, t) ds = Q_j(t), \quad j = 1, 2, \dots, N_w^q. \quad (2)$$

Для получения значения забойного давления на скважине используются дополнительные условия: равенство давления в трещинах и блоках породы на поверхности скважины  $p_1(x, y, z, t) = p_2(x, y, z, t)$ ,  $(x, y, z) \in \partial S_j^q$ ,  $j = 1, 2, \dots, N_w^q$ , и постоянство давления на поверхности скважины. Эти два условия в сочетании с формулой (2) позволяют записать для скважины, на которой задан объемный расход, дополнительное уравнение для определения забойного давления. Следует отметить, что при условии постоянства забойного давления на поверхности скважины движение жидкости в стволе скважины не учитывается.

Уравнения (1) составляют основную систему уравнений, описывающую фильтрацию слабосжимаемой жидкости в упругом трещиновато-пористом пласте с развитой трещиноватостью. Из этой системы при некоторых упрощающих предположениях можно получить и другие уравнения. Например, при пренебрежении фильтрационным потоком жидкости в блоках, вследствие их малой проницаемости, получаются уравнения, предложенные авторами работы [6]. Для среды с пренебрежимо малой проницаемостью блоков и пористостью трещин (когда жидкость поступает в пласт главным образом из блоков, а перемещается по трещинам) систему уравнений (1) можно привести к одному уравнению [4].

Формула для параметра перетока  $\alpha$  в случае однородных по проницаемости блоков матрицы породы была предложена Ю.П. Желтовым [7] и имеет вид:  $\alpha = k_2 \sigma^2$ , где  $\sigma = \frac{S_6}{V_6}$  — удельная площадь поверхности блока ( $S_6$  — площадь поверхности блока,  $V_6$  — объем блока). Для блоков матрицы в виде куба с характерным линейным размером ребра  $l$  имеем  $\sigma = \frac{6}{l}$ . Для блоков матрицы в виде параллелепипеда с характерными линейными размерами ребер  $l_x, l_y, l_z$ :  $\alpha = 12k_2 \sigma^T \sigma = 12k_2 \left( \frac{1}{l_x^2} + \frac{1}{l_y^2} + \frac{1}{l_z^2} \right)$ , где

$\sigma = \left\{ \frac{S_{6x}}{V_6}, \frac{S_{6y}}{V_6}, \frac{S_{6z}}{V_6} \right\}^T = \left\{ \frac{1}{l_x}, \frac{1}{l_y}, \frac{1}{l_z} \right\}^T$  — вектор удельной площади поверхности блока. В случае анизотропных блоков матрицы породы для тензора коэффициентов проницаемости блоков в главных осях:  $\alpha = 12\sigma^T k_2 \sigma = 12 \left( \frac{k_{2xx}}{l_x^2} + \frac{k_{2yy}}{l_y^2} + \frac{k_{2zz}}{l_z^2} \right)$ . В общем случае для несимметричного тензора коэффициентов проницаемости блоков формула для параметра перетока имеет вид

$$\alpha = 12\sigma^T k_2 \sigma = 12 \left( \frac{k_{2xx}}{l_x^2} + \frac{k_{2yy}}{l_y^2} + \frac{k_{2zz}}{l_z^2} + \frac{k_{2xy}}{l_x l_y} + \frac{k_{2yx}}{l_x l_y} + \frac{k_{2yz}}{l_y l_z} + \frac{k_{2zy}}{l_y l_z} + \frac{k_{2xz}}{l_x l_z} + \frac{k_{2zx}}{l_x l_z} + \frac{k_{2yz}}{l_y l_z} + \frac{k_{2zy}}{l_y l_z} \right).$$

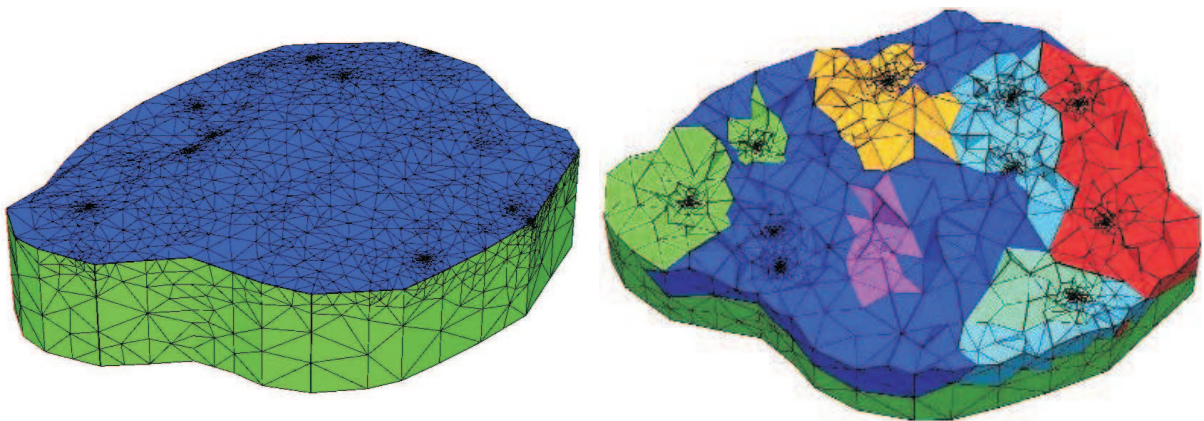


Рис. 2. Сетка расчетной области и ее разделение на восемь подобластей

**3. Построение сетки области и ее декомпозиция.** Одним из эффективных методов решения уравнений в частных производных является метод конечных элементов, особенно при рассмотрении областей сложной формы. Построение сетки конечных элементов представляет собой отдельную и довольно сложную задачу, требующую знаний как в области вычислительной геометрии, так и в теории алгоритмов, а также программирования. В настоящее время разработано множество методов построения различных типов сеток, которые способны генерировать несколько миллионов элементов всего за несколько секунд [8]. Однако для использования такой сетки требуются значительные ресурсы памяти и процессорного времени, а эти требования могут быть критичны для расчетов на одном процессоре. Применение современных вычислительных технологий и методов параллельного программирования основано на геометрической декомпозиции расчетной области на подобласти, число которых равно числу процессоров. При разделении области необходимо учитывать сбалансированность нагрузки процессоров, иначе

часть процессоров будет простаивать, пока остальные заканчивают свою вычислительную работу. Для получения хорошей сбалансированности процессоров необходимо каждому процессору выделить одинаковую часть вычислительной нагрузки. Построение подходящего разделения области может быть получено различными методами. Эти методы можно разделить на две группы. К первой группе относятся методы, которые используют последовательные вычисления для генерации подробной сетки всей области, а затем производят ее разделение по процессорам. Ко второй группе относятся методы, генерирующие сетки непосредственно для подобластей, на которые предварительно разбивается область. При этом генерация сетки для подобластей может быть выполнена параллельно. Заметим, что методы первой группы получили значительное развитие и широко используются на практике, в то время как методы второй группы остаются предметом интенсивных исследований [9].

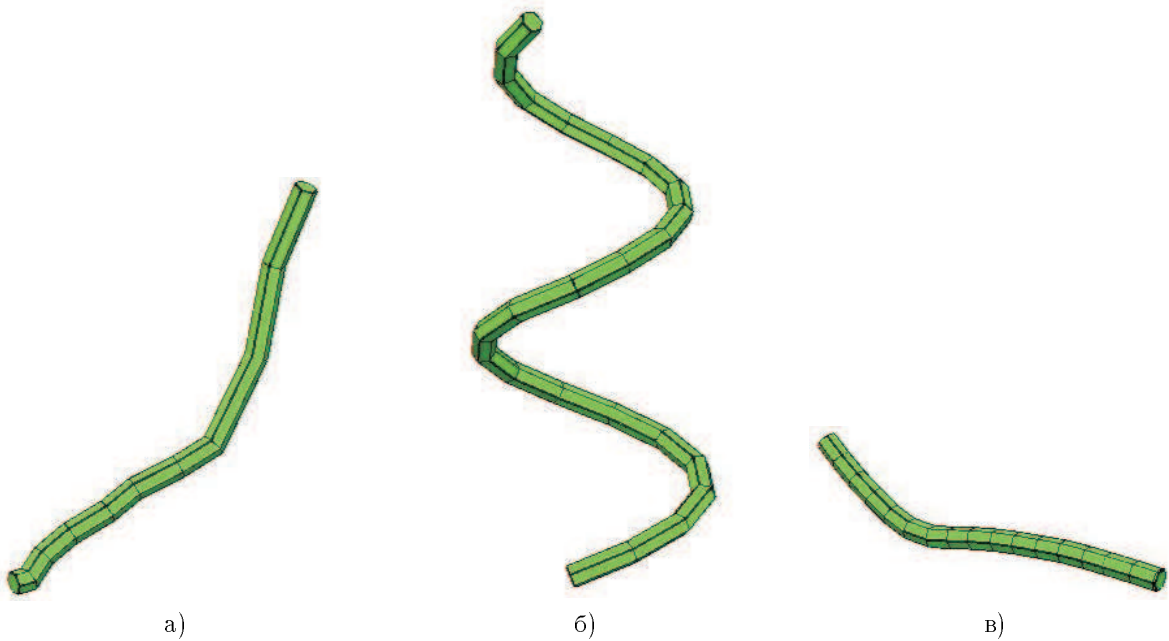


Рис. 3. Типы скважин: а) наклонная, б) искривленная, в) горизонтальная

В данной работе область решения задачи покрывалась неструктурированной сеткой тетраэдров, удовлетворяющих критерию Делоне; сетка сгущалась к скважинам из-за необходимости уменьшения размера элементов в окрестности скважин (рис. 2). Для представления сеточной модели скважины цилиндрическая полость заменялась призматическими сегментами с основаниями в виде правильных многоугольников, вписанных в окружность с радиусом, равным радиусу скважины. В процессе построения сетки боковые грани призматических сегментов скважины заменялись гранями тетраэдров (рис. 3). Для разделения конечно-элементной сетки на непересекающиеся подобласти использовалась библиотека подпрограмм Chaco [10], предназначенная для разделения графов. Алгоритмы разделения графов, реализованные в Chaco, основаны на инерциальном, спектральном и многоуровневых методах, методе Кернигана–Лина и некоторых других, более простых методах. Код программ Chaco написан на языке C стандарта ANSI. Для применения этой библиотеки неструктурированная конечно-элементная сетка тетраэдров представлялась в виде двойственного графа.

**4. Конечно-элементная аппроксимация.** В каждом узле расчетной области имеются две неизвестные: одна для давления в трещинах, другая для давления в блоках. Другими словами, каждый узел имеет две степени свободы. Конечно-элементная аппроксимация уравнений строилась методом взвешенных невязок в сочетании с методом Галеркина [11]. Для аппроксимации производной по времени использовалась неявная разностная схема. После ассемблирования по всем элементам результирующая матрица системы уравнений может быть представлена в следующем виде:

$$\left(\frac{2[C]}{\Delta t_n} + [K] + [A]\right)\{P\}^{n+1} = \left(\frac{2[C]}{\Delta t_n} - [K] - [A]\right)\{P\}^n - \{F\}^*, \quad (3)$$

где  $[C] = \begin{bmatrix} [C_1] & 0 \\ 0 & [C_2] \end{bmatrix}$  — матрица сжимаемостей:

$$[C_i] = \sum_{e=1}^E [c_i^{(e)}], \quad [c_i^{(e)}] = \int_{V^{(e)}} [N^{(e)}]^T [N^{(e)}] \beta_i d\tau, \quad i = 1, 2;$$

$[K] = \begin{bmatrix} [K_1] & 0 \\ 0 & [K_2] \end{bmatrix}$  — матрица проводимостей:

$$[K_i] = \sum_{e=1}^E [k_i^{(e)}], \quad [k_i^{(e)}] = \int_{V^{(e)}} \left( \nabla [N^{(e)}]^T, \frac{\mathbf{k}_i^{(e)}}{\mu} \nabla [N^{(e)}] \right) d\tau, \quad i = 1, 2;$$

$[A] = \begin{bmatrix} [A_\alpha] & -[A_\alpha] \\ -[A_\alpha] & [A_\alpha] \end{bmatrix}$  — матрица перетоков:

$$[A_\alpha] = \sum_{e=1}^E [\alpha^{(e)}], \quad [\alpha^{(e)}] = \int_{V^{(e)}} [N^{(e)}]^T [N^{(e)}] \frac{\alpha^{(e)}}{\mu} d\tau;$$

$\{P\} = \{\{p_1\}, \{p_2\}\}^T$  — вектор давлений,  $\{F\}^* = \{\{f_1\}^*, \{f_2\}^*\}^T$  — вектор правой части, такой, что  $\{f_i\}^* = 0.5(\{f_i\}^{n+1} + \{f_i\}^n)$  для  $i = 1, 2$ ,  $[N^{(e)}]$  — линейные функции-формы элемента,  $\Delta t_n = t_{n+1} - t_n$  — шаг по времени,  $V^{(e)}$  — объем конечного элемента,  $E$  — количество элементов.

Как видно из формулы (3), количество неизвестных равно  $2 \times N$ , где  $N$  — количество узлов расчетной области. Однако в результате декомпозиции области количество неизвестных на каждом процессоре равно  $2 \times n_i$ , где  $n_i$  — количество узлов для данного процессора,  $i = 1, 2, \dots, n_p$ ,  $n_p$  — количество процессоров. В результате декомпозиции области на подобласти может оказаться, что несколько частей одной скважины принадлежат разным подобластям. Дополнительные уравнения для определения забойных давлений на скважинах, в этом случае, составляются для тех процессоров, которые имеют наибольшее количество узлов сетки, принадлежащих поверхности той или иной скважины. Это позволяет минимизировать количество обменов сообщениями между процессорами при параллельном решении системы уравнений. Матрица системы уравнений несимметрична, имеет разреженную структуру, и вместо хранения всех элементов матрицы (что, очевидно, может быть критично при большом количестве узлов) учитываются только ненулевые элементы. Существует довольно много форматов хранения разреженных матриц, которые эффективно реализованы в различных библиотеках подпрограмм для решения систем линейных алгебраических уравнений. Запись матрицы в специальном формате является одним из этапов решения линейной системы.

**5. Решение систем линейных алгебраических уравнений.** Множество задач, решаемых на многопроцессорных системах, требуют решения больших систем линейных уравнений с разреженными матрицами. Решение этих систем значительно облегчают готовые библиотеки подпрограмм, которые разрабатываются ведущими специалистами в области численных методов и параллельного программирования. Среди них такие библиотеки, как ATLAS, ScaLapack, PetSc, Aztec и др. Полный список библиотек можно найти на сервере [12]. Как правило, библиотеки этих программ используют итерационные методы с предобусловливателями для решения систем линейных уравнений; параллельное решение в них основано на параллельной реализации операции умножения матрицы на вектор. Библиотеки отличаются в основном форматом представления матрицы, типами предобусловливателей, способами обмена сообщениями между процессорами и связаны с архитектурой параллельной вычислительной системы, типами поддерживаемых платформ и др. Следует заметить, что использование этих библиотек не освобождает от необходимости понимания принципов параллельного программирования.

В данной работе расчеты проводились с использованием библиотеки подпрограмм Aztec для решения линейных систем итерационными методами, которая была разработана в Исследовательской лаборатории параллельных вычислений в США [5]. Библиотека включает в себя процедуры, реализующие ряд итерационных методов Крылова (CG, GMRES, CGS, TFQMR, BICGSTAB) совместно с предобусловливателями. В библиотеке предоставлены средства трансформации данных, которые позволяют легко создавать разреженные неструктурированные матрицы для решения как на однопроцессорных, так и на

многопроцессорных системах. Код программ Aztec написан на языке C стандарта ANSI, но может использоваться также и на языке Fortran. Этап формирования матрицы целиком и полностью возлагается на программиста.

**6. Численные результаты.** Расчеты проводились на высокопроизводительном вычислительном кластере с параллельной архитектурой МКВС-E112, установленном в Институте механики и машиностроения КазНЦ РАН. Кластер состоит из четырех модулей. Каждый модуль оснащен двумя процессорами AMD Opteron 246 2.0 ГГц и 2 Гб оперативной памяти. На модулях и на основной управляющей ЭВМ, которая одновременно выполняет функции сервера доступа, установлена свободно распространяемая операционная система Linux Fedore Core 2.0. Выполнение параллельных задач обеспечивает система управления прохождением задач MVC-1000/7.

Для расчетов использовались следующие данные: размеры параллелепипеда, описанного вокруг пласта, — 2000 м × 1566 м × 500 м; на боковой поверхности пласта задавалось давление  $p_{пл} = 10,0$  МПа; кровля и подошва пласта непроницаемые; вязкость нефти  $\mu = 25$  мПа.

Компоненты тензора коэффициентов проницаемости системы трещин:  $k_{1xx} = 0,31$  мкм<sup>2</sup>,  $k_{1xy} = 0,15$  мкм<sup>2</sup>,  $k_{1xz} = 0,01$  мкм<sup>2</sup>,  $k_{1yx} = 0,12$  мкм<sup>2</sup>,  $k_{1yy} = 0,33$  мкм<sup>2</sup>,  $k_{1yz} = 0,19$  мкм<sup>2</sup>,  $k_{1zx} = 0,11$  мкм<sup>2</sup>,  $k_{1zy} = 0,08$  мкм<sup>2</sup>,  $k_{1zz} = 0,12$  мкм<sup>2</sup>.

Компоненты тензора коэффициентов проницаемости блоков матрицы:  $k_{2xx} = 0,031$  мкм<sup>2</sup>,  $k_{2xy} = 0,015$  мкм<sup>2</sup>,  $k_{2xz} = 0,001$  мкм<sup>2</sup>,  $k_{2yx} = 0,012$  мкм<sup>2</sup>,  $k_{2yy} = 0,033$  мкм<sup>2</sup>,  $k_{2yz} = 0,019$  мкм<sup>2</sup>,  $k_{2zx} = 0,011$  мкм<sup>2</sup>,  $k_{2zy} = 0,008$  мкм<sup>2</sup>,  $k_{2zz} = 0,012$  мкм<sup>2</sup>.

Коэффициент перетока  $\alpha = 10^{-18}$ , коэффициент сжимаемости жидкости  $\beta_{ж} = 10^{-7}$  МПа<sup>-1</sup>, коэффициент сжимаемости трещин  $\beta_{ск1} = 10^{-4}$  МПа<sup>-1</sup>, коэффициент сжимаемости блоков  $\beta_{ск2} = 10^{-6}$  МПа<sup>-1</sup>,  $m_1 = 0,01$ ,  $m_2 = 0,2$ . Траектория каждой из скважин задавалась координатами точек ее оси. Радиусы всех скважин были одинаковы и равны 0,1 м. Время работы скважин  $T = 8,64 \times 10^5$  с.

Объемные дебиты скважин следующие:  $Q_1 = 2,479 \times 10^{-4}$  м<sup>3</sup>/с,  $Q_2 = 3,380 \times 10^{-4}$  м<sup>3</sup>/с,  $Q_3 = 2,720 \times 10^{-4}$  м<sup>3</sup>/с,  $Q_4 = 3,993 \times 10^{-4}$  м<sup>3</sup>/с,  $Q_5 = 5,122 \times 10^{-4}$  м<sup>3</sup>/с,  $Q_6 = 6,216 \times 10^{-4}$  м<sup>3</sup>/с,  $Q_7 = 4,653 \times 10^{-4}$  м<sup>3</sup>/с,  $Q_8 = 3,970 \times 10^{-4}$  м<sup>3</sup>/с,  $Q_9 = 4,074 \times 10^{-4}$  м<sup>3</sup>/с,  $Q_{10} = 3,681 \times 10^{-4}$  м<sup>3</sup>/с.

Для проверки точности получаемых расчетов количество узлов сетки варьировалось. Результаты приводятся для сетки с 761,730 тыс. узлами. Построение сетки и разделение ее на подобласти производилось на однопроцессорном компьютере и занимало 131 с, а ее разделение на восемь подобластей занимало 75 с. В таблице представлены некоторые данные для сетки и количество ненулевых элементов матрицы для различного числа процессоров.

Статистика для сетки с 761,730 тыс. узлами

Кол-во процессоров	Кол-во узлов (тыс.)	Кол-во элементов (тыс.)	Кол-во неизвестных (тыс.)	Кол-во ненулевых элементов матрицы (тыс.)
1	761,730	4263,344	1523,460	36480,810
2	371,738	2098,826	743,476	17742,836
	389,993	2205,684	779,986	18737,974
...	...	...	...	...
8	98,190	548,779	196,380	4501,420
	95,867	532,942	191,734	4538,498
	92,043	523,541	184,086	4501,420
	95,422	536,502	190,844	4602,781
	95,231	535,922	190,462	4560,973
	94,996	530,015	189,992	4467,733
	92,301	521,660	184,602	4469,101
	97,681	551,423	195,362	4724,043

Система линейных алгебраических уравнений (3) на каждом временном слое решалась методами подпространств Крылова, реализованными в библиотеке Aztec, с полиномиальным предобусловливанием по методу наименьших квадратов и по методу Неймана, а также с масштабированием исходной матрицы системы. Все применяемые итерационные методы прерывались при достижении невязкой заданного уровня точности  $10^{-6}$ . Общее время решения задачи складывалось из временных затрат на решение системы уравнений (3) на каждом шаге по времени. Для количественной оценки эффективности распараллелива-

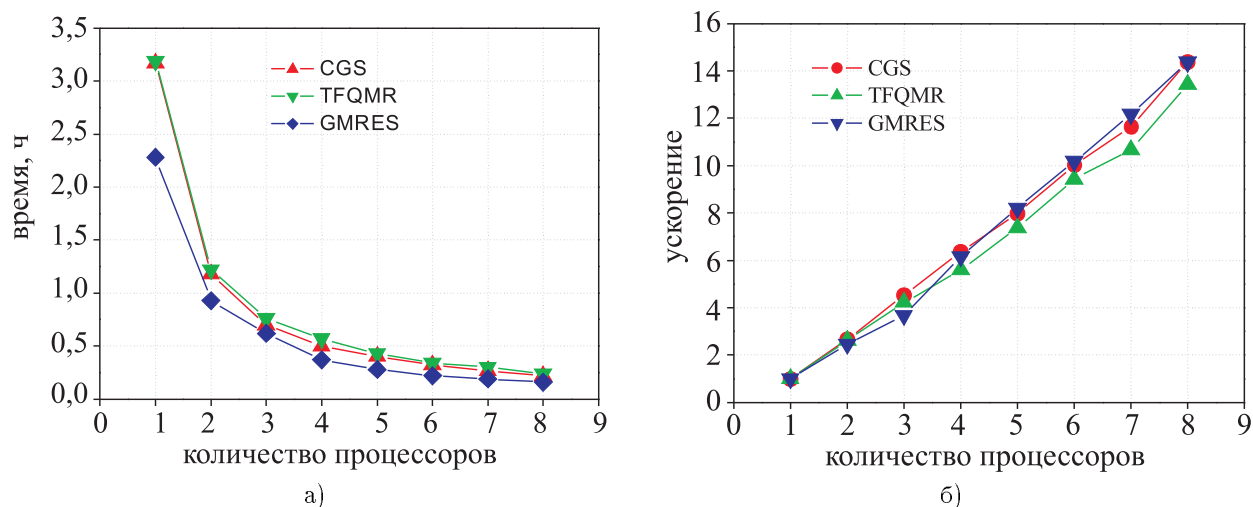


Рис. 4. Сравнение итерационных методов с полиномиальным предобусловливанием по методу наименьших квадратов

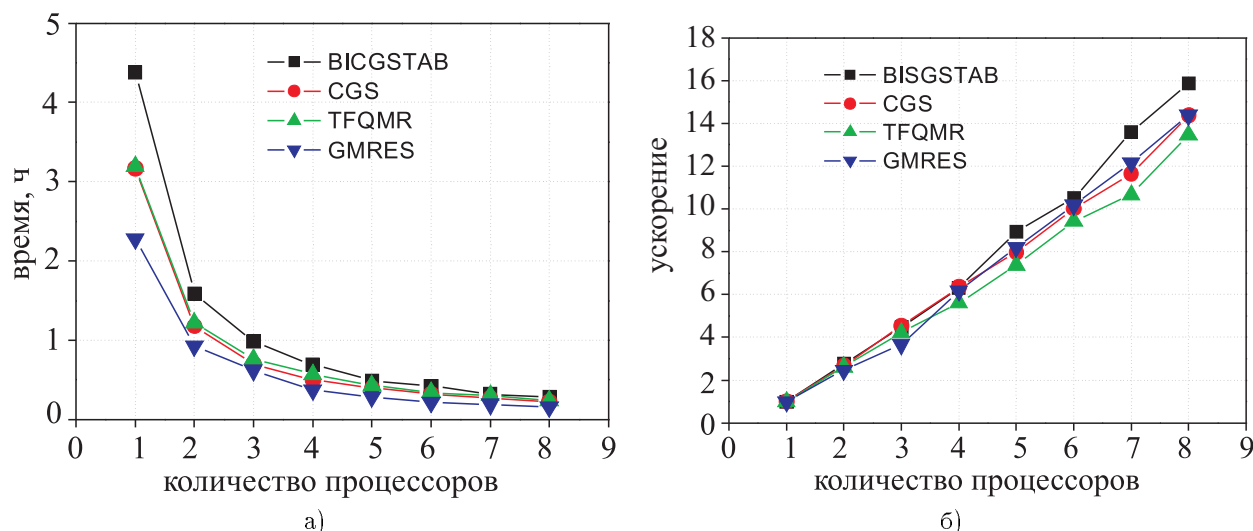


Рис. 5. Сравнение итерационных методов с полиномиальным предобусловливанием рядами Неймана

ния вычислялось ускорение по формуле  $S = \frac{t_1}{t_{n_p}}$ , где  $t_1$  — время решения задачи на одном процессоре,  $t_{n_p}$  — время решения на  $n_p$  процессорах. На рис. 4а приведены графики изменения времени решения задачи в зависимости от количества процессоров, а на рис. 4б — графики ускорения параллельных вычислений итерационными методами с полиномиальным предобусловливанием по методу наименьших квадратов. На этих графиках отсутствуют результаты для метода BICGSTAB, так как решение системы этим методом с предобусловливанием по методу наименьших квадратов прерывалось без выполнения критерия невязки. На рис. 5а и 5б представлены графики для параллельных вычислений итерационными методами с полиномиальным предобусловливанием рядами Неймана.

Из представленных результатов следует, что применение параллельных вычислений на восьми процессорах позволяет ускорить вычисления в 13–16 раз (в зависимости от выбранного метода) по сравнению с последовательными вычислениями на одном процессоре. Графики показывают, что наименьшее время решения задачи получается при использовании метода GMRES с полиномиальным предобусловливанием рядами Неймана.

**7. Заключение.** В данной работе представлены результаты решения на многопроцессорной вычислительной системе одной из задач теории фильтрации — фильтрации жидкости к скважинам со сложной траекторией ствола (вертикальным, наклонным, горизонтальным и др.) в трещиновато-пористом пласте произвольной конфигурации с “вложенной анизотропией” коэффициентов проницаемостей. Рассмотрены

этапы численного решения задачи фильтрации на многопроцессорной вычислительной системе и способ учета скважин. Исследована производительность параллельных вычислений в зависимости от количества процессоров.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Воеводин В.В., Воеводин Вл.В.* Параллельные вычисления. СПб: БХВ-Петербург, 2002.
2. *Peaceman D.W.* Interpretation of wellblock pressures in numerical reservoir simulation // SPEJ. June 1978. 183–194.
3. *Wolfsteiner C., Aziz K., Durlafsky L.J.* Modeling conventional and non-conventional wells // The Sixth International Forum on Reservoir Simulation. Hof/Salzburg Austria, September 3–7, 2001.
4. *Баренблатт Г.И., Желтов Ю.П., Кочина И.М.* Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах // Прикл. матем. и механ. 1960. **123**, № 3. 852–864.
5. Aztec. A Massively Parallel Iterative Solver Library for Solving Sparse Linear Systems (<http://www.cs.sandia.gov/CRF/aztec1.html>).
6. *Warren J., Root P.* The behavior of naturally fractured reservoir simulation // SPEJ. Feb. 1983. 42–54.
7. *Желтов Ю.П.* Разработка нефтяных месторождений. М.: Недра, 1986.
8. *Schneiders R.* Mesh generation & grid generation on the Web (<http://www-users.informatik.rwth-aachen.de/~roberts/meshgeneration.html>).
9. *Frey P.J., George P.-L.* Mesh generation. Application to finite elements. Oxford: Hermes Science Publishing, 2000.
10. *Hendrickson B., Leland R.* The Chaco user's guide — version 1.0. Technical Report Sand93-2339. Sandia National Laboratories. Albuquerque. August, 1993.
11. *Zienkiewicz O.C., Taylor R.L.* The finite element method. Volume 1: The Basis. Oxford: Butterworth–Heinemann, 2000.
12. Специализированные параллельные библиотеки ([http://parallel.ru/tech/tech\\_dev/par\\_libs.html](http://parallel.ru/tech/tech_dev/par_libs.html)).

Поступила в редакцию  
24.07.2007

---