

УДК 517.958

**ТЕОРЕМЫ ЕДИНСТВЕННОСТИ И СВОЙСТВА СОПРЯЖЕННЫХ ЗАДАЧ  
ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ  
С ДАННЫМИ КОШИ**

**Н. Л. Гольдман<sup>1</sup>**

Исследуется проблема единственности в пространствах Гельдера для нехарактеристических задач Коши, возникающих при нахождении неизвестной правой части в параболических уравнениях. Установлена связь этой проблемы со свойствами плотности решений соответствующих сопряженных задач.

**Введение.** Исследования задач с данными Коши для параболических уравнений с неизвестной правой частью вызваны как теоретическим, так и практическим интересом, который представляют эти задачи. Их существенное отличие от обычных нехарактеристических задач Коши (см., например, [1]) состоит в необходимости найти кроме решения еще и правую часть уравнения, используя некоторую дополнительную информацию. К рассматриваемому классу относятся, в частности, обратные задачи с граничным переопределением для параболических уравнений. Практическим приложением таких обратных задач в теплофизике является нахождение распределения по времени мощности тепловых источников по заданным на границе области температуре и тепловом потоке.

Основное внимание в настоящей работе уделено вопросам постановок и единственности решения в классах Гельдера для задач с данными Коши для линейных и квазилинейных параболических уравнений общего вида. Для исследования проблемы единственности развивается предложенный в [2, 3] подход, в основе которого лежит изучение свойств соответствующих сопряженных задач. Эти сопряженные задачи рассматриваются как своеобразные задачи граничного управления для линейных параболических уравнений. Для их решений устанавливаются некоторые свойства плотности с помощью известных результатов [1] о единственности решения нехарактеристической задачи Коши для этих уравнений.

Полученные на основе такого подхода достаточные условия единственности в пространствах Гельдера уточняют результаты из [2, 3] и, кроме того, расширяют класс обратных задач с граничным переопределением, обладающих свойством единственности (см., например, [4–6]).

**1. Постановки задачи с данными Коши для квазилинейного уравнения.** Пусть нехарактеристическая задача Коши в обычной постановке состоит в нахождении функции  $u(x, t)$  в области  $\bar{Q} = \{0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$ , удовлетворяющей уравнению

$$c(x, t, u)u_t - Lu = p_0(x, t)f(t) + p_1(x, t), \quad (x, t) \in Q, \tag{1}$$

начальному условию

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \tag{2}$$

и данным Коши на границе  $x = l$

$$u|_{x=l} = g(t), \quad 0 \leq t \leq T, \tag{3}$$

$$a(x, t, u)u_x + e_1(t, u)u|_{x=l} = q_1(t), \quad 0 < t \leq T, \tag{4}$$

где  $Lu \equiv (a(x, t, u)u_x)_x - b(x, t, u)u_x - d(x, t, u)u$  — равномерно эллиптический оператор,  $a \geq a_{\min} > 0$ ,  $b, c \geq c_{\min} > 0$ ,  $d, f, p_0, p_1, e_1, q_1, \varphi$  и  $g$  — известные функции своих аргументов,  $a_{\min}, c_{\min} = \text{const} > 0$ .

Если функция  $f(t)$  в правой части уравнения (1) неизвестна, но при  $x = 0$  задано условие

$$a(x, t, u)u_x - e_0(t, u)u|_{x=0} = q_0(t), \quad 0 < t \leq T, \tag{5}$$

то одна из возможных постановок задачи с данными Коши состоит в нахождении функций  $u(x, t)$  в  $\bar{Q}$  и  $f(t)$  при  $0 \leq t \leq T$ , удовлетворяющих условиям (1)–(4) и дополнительному соотношению (5), в которых входные данные  $a > 0, b, c > 0, d, p_i, e_i, q_i$  ( $i = 0, 1$ ),  $\varphi$  и  $g$  предполагаются заданными.

<sup>1</sup> Научно-исследовательский вычислительный центр, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Ленинские горы, 119992, Москва; e-mail: arush@srcc.msu.ru

Мы остановимся на другой возможной постановке, рассматривая задачу с данными Коши как обратную задачу с граничным переопределением: найти функции  $u(x, t)$  в  $\overline{Q}$  и  $f(t)$  при  $0 \leq t \leq T$ , удовлетворяющие уравнению (1), начальному условию (2), граничным условиям третьего рода (4), (5) при  $x = 0$  и  $x = l$  и дополнительному условию (3).

Сформулируем требования к входным данным этой обратной задачи, используя стандартные обозначения классов функций из [7].

(i). При  $(x, t) \in \overline{Q}$ ,  $|u| < \infty$ , функции  $a$ ,  $a_x$ ,  $a_u$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  равномерно ограничены,  $a \geq a_{\min} > 0$ ,  $c \geq c_{\min} > 0$ ,  $e_i \geq 0$  ( $i = 0, 1$ ).

(ii). При  $(x, t, u) \in \overline{D} = \overline{Q} \times [-M_0, M_0]$  ( $M_0 \geq \max_{(x,t) \in \overline{Q}} |u|$ ) производные  $a_{xx}$ ,  $a_{xu}$ ,  $a_{uu}$  и  $a_t$  равномерно ограничены,  $a_x$ ,  $a_u$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $c_x$ ,  $c_u$  и  $d$  принадлежат  $H^{1, \lambda/2, 1}(\overline{D})$ ,  $0 < \lambda < 1$ , функции  $e_i$  имеют равномерно ограниченные производные  $e_{it}$ ,  $e_{iu}$ ,  $e_{iuu}$  ( $i = 0, 1$ ).

(iii). Функции  $p_0(x, t)$  и  $p_1(x, t)$  принадлежат  $H^{1, \lambda/2}(\overline{Q})$ , функция  $\varphi(x)$  принадлежит  $H^{2+\lambda}[0, l]$ , производные  $q_{it}$  ( $i = 0, 1$ ) равномерно ограничены при  $0 \leq t \leq T$ . Выполнены условия согласования при  $t = 0$ :

$$\begin{aligned} a(x, 0, \varphi)\varphi_x - e_0(0, \varphi)\varphi|_{x=0} &= q_0(0), \\ a(x, 0, \varphi)\varphi_x + e_1(0, \varphi)\varphi|_{x=l} &= q_1(0). \end{aligned}$$

(iv). Функция  $g(t)$  принадлежит  $H^{1+\lambda/2}[0, T]$  и удовлетворяет условию согласования  $g|_{t=0} = \varphi|_{x=l}$ .

Требования (i) – (iii) обеспечивают существование и единственность решения квазилинейной краевой задачи третьего рода для уравнения (1) в классе Гельдера  $u(x, t) \in H^{2+\lambda, 1+\lambda/2}(\overline{Q})$  при любой функции  $f(t) \in H^{\lambda/2}[0, T]$  в правой части этого уравнения [7].

В соответствии с этим дадим следующее

**Определение 1.** Решением в классах Гельдера обратной задачи с граничным переопределением для уравнения (1) назовем пару функций  $\{u^0(x, t), f^0(t)\}$ :  $u^0(x, t) \in H^{2+\lambda, 1+\lambda/2}(\overline{Q})$ ,  $f^0(t) \in H^{\lambda/2}[0, T]$ ,  $0 < \lambda < 1$ , удовлетворяющих соотношениям (1) – (5) в обычном смысле.

**2. Единственность решения задачи с данными Коши в смысле определения 1.** Рассматриваемая задача относится к некорректно поставленным. Это проявляется в возможном отсутствии решения при несогласованных входных данных и в его неустойчивости относительно погрешностей в их задании в случае существования (пример неустойчивости см. в [3]). Однако если решение  $\{u^0(x, t), f^0(t)\}$  в смысле определения 1 существует, будет ли оно обладать свойством единственности?

**2.1.** Установим достаточные условия, при выполнении которых рассматриваемая задача не может иметь двух различных решений.

Допустим, что  $\{u_1^0, f_1^0\}$  и  $\{u_2^0, f_2^0\}$  — два решения обратной задачи (1) – (5). Функции  $u_1^0$  и  $u_2^0$  можно рассматривать как решения третьей краевой задачи для уравнения (1), соответствующие функциям  $f_1^0$  и  $f_2^0$  в его правой части. Следовательно, для них справедливы оценки в классе Гельдера  $H^{2+\lambda, 1+\lambda/2}(\overline{Q})$  [7]:  $|u_1^0, u_2^0|_{Q}^{2+\lambda, 1+\lambda/2} \leq M$ ,  $M = \text{const} > 0$ .

Для разностей  $\Delta u = u_2^0 - u_1^0$  и  $\Delta f = f_2^0 - f_1^0$  в силу (1) – (5) имеют место соотношения

$$c(x, t, u_1^0)\Delta u_t - \mathcal{L}\Delta u = p_0(x, t)\Delta f(t), \quad (x, t) \in Q, \quad (6)$$

$$a(x, t, u_1^0)\Delta u_x - \mathcal{E}_0\Delta u|_{x=0} = 0, \quad 0 < t \leq T, \quad (7)$$

$$a(x, t, u_1^0)\Delta u_x|_{x=l} = 0, \quad \Delta u|_{x=l} = 0, \quad 0 < t \leq T, \quad (8)$$

$$\Delta u|_{t=0} = 0, \quad 0 \leq x \leq l, \quad (9)$$

в которых  $\mathcal{L}\Delta u \equiv (a(x, t, u_1^0)\Delta u_x)_x - \mathcal{A}_1\Delta u_x - \mathcal{A}_2\Delta u$ ,  $\mathcal{A}_1 = b(x, t, u_1^0) - a_u(x, t, u_1^0)u_{2x}^0$ ,

$$\mathcal{A}_2 = c_u(x, t, u_1^0)u_{2t}^0 + b_u(x, t, u_1^0)u_{2x}^0 + d_u(x, t, u_1^0) - \{a_u u_{2xx}^0 + a_{uu}(u_{2x}^0)^2 + a_{xu}u_{2x}^0\},$$

$$\mathcal{E}_0 = \{-a_u(x, t, u_1^0)u_{2x}^0 + e_0(t, u_1^0) + e_{0u}(t, u_1^0)u_2^0\}|_{x=0}.$$

Требования (i) – (iii) и принадлежность  $u_1^0(x, t)$  и  $u_2^0(x, t)$  классу  $H^{2+\lambda, 1+\lambda/2}(\overline{Q})$  позволяют заключить, что все коэффициенты линейного оператора  $\mathcal{L}$  и граничных условий (7), (8) непрерывны как функции от  $(x, t)$  и  $t$  соответственно.

**2.2. Свойства краевой задачи, сопряженной с (6) – (9).** Для доказательства утверждения, что

$\Delta u = 0$  в  $\bar{Q}$ ,  $\Delta f = 0$  при  $0 \leq t \leq T$ , потребуется изучить краевую задачу

$$(c(x, t, u_1^0)\psi)_t + \mathcal{L}^*\psi = 0, \quad 0 < x < l, \quad 0 \leq t < T, \tag{10}$$

$$a(x, t, u_1^0)\psi_x - (\mathcal{E}_0 - \mathcal{A}_1)\psi|_{x=0} = 0, \quad 0 \leq t < T, \tag{11}$$

$$a(x, t, u_1^0)\psi_x + \mathcal{A}_1\psi|_{x=l} = \eta(t), \quad 0 \leq t < T, \tag{12}$$

$$\psi|_{t=T} = 0, \quad 0 \leq x \leq l, \tag{13}$$

где  $\mathcal{L}^*\psi \equiv (a(x, t, u_1^0)\psi_x)_x + (\mathcal{A}_1\psi)_x - \mathcal{A}_2\psi$ ,  $\eta(t)$  — произвольная функция, пробегающая пространство  $H^{1/2}[0, T]$ .

**Лемма 1.** Пусть входные данные обратной задачи (1)–(5) удовлетворяют требованиям (i)–(iv)  $u$ , кроме того, функция  $c(x, t, u)$  имеет непрерывную производную по  $t$  при  $(x, t, u) \in \bar{D}$ . Тогда при любой функции  $\eta(t) \in H^{1/2}[0, T]$  соответствующее решение  $\psi(x, t; \eta)$  сопряженной задачи (10)–(13) удовлетворяет соотношению

$$\int_0^T \int_0^l \psi(x, t; \eta) p_0(x, t) \Delta f(t) dx dt = 0 \quad \forall \eta(t) \in H^{1/2}[0, T]. \tag{14}$$

**Доказательство леммы 1.** Ограничимся его кратким изложением, подробнее см. в [3]. Прежде всего заметим, что все коэффициенты в уравнении (10) непрерывны в  $\bar{Q}$  как функции  $(x, t)$  в силу гладкости входных данных и принадлежности  $u_1^0(x, t)$  и  $u_2^0(x, t)$  классу  $H^{2+\lambda, 1+\lambda/2}(\bar{Q})$ . Аналогичные рассуждения с учетом свойств граничной функции  $\epsilon_0$  позволяют установить, что все коэффициенты в граничных условиях (11), (12) непрерывны как функции  $t$  при  $0 \leq t \leq T$ . Следовательно, задача (10)–(13), являясь линейной краевой задачей относительно функции  $\psi(x, t; \eta)$ , разрешима в классе  $\psi(x, t) \in C(\bar{Q}) \cap C^{2,1}(Q)$ . Ее производная  $\psi_x(x, t)$  будет принадлежать классу  $C(\bar{Q}) \cap H^{1,1/2}(Q)$ . Более того,  $\psi(x, t) \in C^{2,1}(\bar{Q})$ ,  $\psi_x(x, t) \in H^{1,1/2}(\bar{Q})$  кроме точки  $x = l, t = T$ ; если же  $\eta|_{t=T} = 0$ , то принадлежность  $\psi(x, t)$  и  $\psi_x(x, t)$  этим классам имеет место во всей замкнутой области  $\bar{Q}$  [7].

Для доказательства (14) рассматривается выражение

$$I = \int_0^T \int_0^l \psi \{c\Delta u_t - \mathcal{L}\Delta u\} dx dt + \int_0^T \int_0^l \Delta u \{(c\psi)_t + \mathcal{L}^*\psi\} dx dt,$$

для которого в силу (6) и (10) справедливо соотношение  $I = \int_0^T \int_0^l \psi(x, t) p_0(x, t) \Delta f(t) dx dt$ . С другой стороны, интегрирование по частям с учетом (6)–(9) и (10)–(13) приводит к равенству

$$I = \int_0^T \Delta u|_{x=l} \{a\psi_x + \mathcal{A}_1\psi\}|_{x=l} dt - \int_0^T \Delta u|_{x=0} \{a\psi_x - (\mathcal{E}_0 - \mathcal{A}_1)\psi\}|_{x=0} dt = 0.$$

Отсюда и следует утверждение леммы 1.

Предполагая выполненными требования леммы 1, установим еще несколько свойств сопряженной задачи (10)–(13), рассматривая ее как своеобразную задачу граничного управления, в роли которого выступает функция  $\eta(t)$ .

**Лемма 2.** Пусть при любой функции  $\eta(t) \in H^{1/2}[0, T]$  соответствующее решение сопряженной задачи (10)–(13) удовлетворяет на границе  $x = l$  области  $\bar{Q}$  соотношению  $\int_0^T \psi(x, t; \eta)|_{x=l} \theta(t) dt = 0$  для некоторой непрерывной функции  $\theta(t)$ . Тогда  $\theta(t) = 0$  при  $0 \leq t \leq T$ , т.е. множество следов  $\{\psi(l, t; \eta)\}$ , получаемое при пробегании функцией  $\eta(t)$  пространства  $H^{1/2}[0, T]$ , является всюду плотным.

**Доказательство леммы 2.** На границе  $x = l$  из условия (13) и произвольности функции  $\eta(t)$  очевидным образом следует плотность множества  $\{(a\psi_x + \mathcal{A}_1\psi)|_{x=l}\}$ , а также плотность множества  $\{(a\psi_x)|_{x=l}\}$  в случае  $\mathcal{A}_1(x, t)|_{x=l} = 0$ . Очевидно также, что при  $\mathcal{A}_1(x, t)|_{x=l} = 0$  множество  $\{\psi(x, t; \eta)\}|_{x=l}$  тоже плотно.

В случае  $|\mathcal{A}_1(x, t)|_{x=l} > 0$  при  $0 \leq t \leq T$  покажем, что для функции  $\theta(t) = \mathcal{A}_1(x, t)|_{x=l} w(t)$ , где  $w(t)$  — некоторая непрерывная функция, из соотношения

$$\int_0^T \psi(x, t; \eta)|_{x=l} \mathcal{A}_1(x, t)|_{x=l} w(t) dt = 0 \quad \forall \eta(t) \in H^{1/2}[0, T]$$

вытекает, что  $w(t) = 0$  при  $0 \leq t \leq T$ . Действительно, из этого соотношения и из (12) следует, что

$$\int_0^T \eta(t) w(t) dt - \int_0^T (a\psi_x)|_{x=l} w(t) dt = 0.$$

Пользуясь произвольностью функции  $\eta(t)$  и полагая  $\eta(t) = w(t)$ , приходим к равенству

$$\int_0^T w^2(t) dt - \int_0^T (a\psi_x)|_{x=l} w(t) dt = 0, \quad (15)$$

выполнение которого и означает, что  $w(t) = 0$  при  $0 \leq t \leq T$ .

Действительно, если предположить, например, что (15) имеет место из-за равенства  $(a\psi_x)|_{x=l} = w(t)$  при  $0 \leq t < T$ , то из (12) при  $\eta(t) = w(t)$  следует, что  $\mathcal{A}_1\psi|_{x=l} = 0$ ,  $0 \leq t \leq T$ . Но решением сопряженной задачи для уравнения (10) с таким граничным условием при  $x = l$  является  $\psi(x, t; w) \equiv 0$ ,  $(x, t) \in \overline{Q}$ . Следовательно, и  $\psi_x|_{x=l} = 0$ ,  $0 \leq t \leq T$ , т.е.  $w(t) = 0$ .

Предположение, что  $\int_0^T (a\psi_x)|_{x=l} w(t) dt = 0$ , сразу приводит, в силу (15), к выводу, что  $w(t) = 0$ .

Очевидное противоречие с (15) возникает, если предположить, что  $\int_0^T (a\psi_x)|_{x=l} w(t) dt < 0$ .

Если же предположить, что

$$\int_0^T (a\psi_x)|_{x=l} w(t) dt > 0, \quad \int_0^T w^2(t) dt > 0,$$

то, рассматривая различные случаи знакоопределенности функций  $w(t)$  и  $w(t) - (a\psi_x)|_{x=l}$  на отрезке  $0 \leq t \leq T$ , приходим к противоречию с равенством (15).

Осталось рассмотреть соотношение  $\int_0^T w^2(t) dt = \int_0^T (a\psi_x)|_{x=l} w(t) dt > 0$  в предположении, что на некотором отрезке  $[t^*, t^{**}] \subset [0, T]$   $(a\psi_x)|_{x=l} = w(t)$ , а вне этого отрезка  $w(t) = 0$ . Тогда из (12) при  $\eta(t) = w(t)$  следует, что

$$\mathcal{A}_1\psi|_{x=l} = 0, \quad t^* \leq t \leq t^{**}, \quad a\psi_x + \mathcal{A}_1\psi|_{x=l} = 0, \quad 0 \leq t < t^*, \quad t^{**} < t < T.$$

Сопряженная задача для уравнения (10) с такими граничными условиями при  $x = l$  имеет решение  $\psi(x, t; w) \equiv 0$ ,  $(x, t) \in \overline{Q}$ . Это означает, в частности, что  $\psi_x|_{x=l} = 0$ ,  $0 \leq t \leq T$ , т.е. функция  $w(t) = 0$  не только вне отрезка  $[t^*, t^{**}]$ , но и при  $t^* \leq t \leq t^{**}$ .

Аналогичные рассуждения справедливы и в том случае, когда такие предположения относительно функций  $(a\psi_x)|_{x=l}$  и  $w(t)$  выполнены на конечном числе отрезков  $[t_k^*, t_k^{**}] \subset [0, T]$ ,  $k = \overline{1, K}$ . Это завершает доказательство леммы 2 для случая  $|\mathcal{A}_1(x, t)|_{x=l} > 0$ .

**Лемма 3.** Пусть при любой функции  $\eta(t) \in H^{1/2}[0, T]$  соответствующее решение сопряженной задачи (10)–(13) удовлетворяет на границе  $x = 0$  области  $\overline{Q}$  соотношению

$$\int_0^T \psi(x, t; \eta)|_{x=0} w(t) dt = 0 \quad \forall \eta(t) \in H^{1/2}[0, T], \quad (16)$$

для некоторой непрерывной функции  $w(t)$ . Тогда  $w(t) = 0$  при  $0 \leq t \leq T$ , т.е. множество следов  $\{\psi(0, t; \eta)\}$ , получаемое при пробегании функцией  $\eta(t)$  пространства  $H^{1/2}[0, T]$ , обладает свойством плотности.

При выводе леммы 3 (подробнее см. в [3]) используется сопряженная с (10)–(13) линейная краевая задача, (ср. с (6)–(9)):

$$c(x, t, u_1^0)z_t - \mathcal{L}z = 0, \quad (x, t) \in Q, \tag{17}$$

$$a(x, t, u_1^0)z_x - \mathcal{E}_0 z|_{x=0} = w(t), \quad 0 < t \leq T, \tag{18}$$

$$a(x, t, u_1^0)z_x|_{x=l} = 0, \quad 0 < t \leq T, \tag{19}$$

$$z|_{t=0} = 0, \quad 0 \leq x \leq l, \tag{20}$$

где  $\mathcal{L}z \equiv (a(x, t, u_1^0)z_x)_x - \mathcal{A}_1 z_x - \mathcal{A}_2 z$ , коэффициенты  $\mathcal{A}_1$ ,  $\mathcal{A}_2$  и  $\mathcal{E}_0$  имеют тот же вид, что и в задаче (6)–(9), и обладают теми же свойствами гладкости как функции от  $(x, t)$  и  $t$ .

Для решения этой задачи  $z(x, t) \in C(\bar{Q}) \cap C^{2,1}(Q)$  устанавливается дополнительное условие  $z|_{x=l} = 0$ . Для его доказательства рассматривается выражение

$$II = \int_0^T \int_0^l z \{ (c\psi)_t + \mathcal{L}^* \psi \} dx dt + \int_0^T \int_0^l \psi \{ cz_t - \mathcal{L}z \} dx dt,$$

которое равно 0 в силу однородности уравнений (10) и (17). С другой стороны, интегрирование по частям с учетом соотношений (10)–(13) и (17)–(20) дает

$$II = \int_0^T z|_{x=l} \eta(t) dt + \int_0^T \psi(x, t; \eta)|_{x=0} w(t) dt.$$

Отсюда в силу произвольности функции  $\eta(t)$  и предположения (16) и вытекает, что  $z|_{x=l} = 0$ .

Полученное условие  $z|_{x=l} = 0$  и граничное условие (19) представляют собой данные Коши для линейного параболического уравнения (17), коэффициенты которого как функции от  $(x, t)$  удовлетворяют требованиям гладкости, налагаемым в [1] для единственности решения нехарактеристической задачи Коши. Как и в [3], можно обосновать применимость соответствующих результатов из [1] и заключить, что  $z(x, t) \equiv 0$  в  $\bar{Q}$ . Следовательно, в силу (18)  $w(t) = 0$  при  $0 \leq t \leq T$ , что завершает вывод леммы 3.

**Следствие.** Если для  $x = 0$  выполнено неравенство  $|(\mathcal{E}_0 - \mathcal{A}_1)|_{x=0}| > 0$  при  $0 \leq t \leq T$ , то свойством плотности обладает также и множество следов  $\{\psi_x(x, t; \eta)|_{x=0}\}$  при пробегании функцией  $\eta(t)$  пространства  $H^{1/2}[0, T]$ .

Действительно, пусть выполнено соотношение  $\int_0^T a\psi_x(x, t; \eta)|_{x=0} w(t) dt = 0$  для некоторой непрерывной функции  $w(t)$  при любой функции  $\eta(t) \in H^{1/2}[0, T]$ . Тогда из (11) и этого соотношения следует, что  $\int_0^T (\mathcal{E}_0 - \mathcal{A}_1)|_{x=0} \psi(x, t; \eta)|_{x=0} w(t) dt = 0$ . В силу плотности множества  $\{\psi(0, t; \eta)\}$  это означает, что  $(\mathcal{E}_0 - \mathcal{A}_1)|_{x=0} w(t) = 0$ , т.е.  $w(t) = 0$  при  $0 \leq t \leq T$ .

Установим теперь свойства усредненных на интервале  $(0, l_0)$  функций  $\Psi(t; \eta) = l_0^{-1} \int_0^{l_0} \psi(x, t; \eta) dx$ , где  $l_0$  — произвольная точка,  $0 < l_0 < l$ .

**Лемма 4.** Когда функция  $\eta(t)$  в граничном условии (12) пробегает пространство  $H^{1/2}[0, T]$ , соответствующие усредненные функции  $\Psi(t; \eta)$  образуют множество, всюду плотное в  $L_2[0, T]$ .

**Доказательство леммы 4.** Заметим прежде всего, что в любой достаточно малой окрестности границ  $x = 0$  и  $x = l$  свойством плотности обладают множества следов  $\{\psi(x, t; \eta)|_{x=\varepsilon}\}$  и  $\{\psi(x, t; \eta)|_{x=l-\varepsilon}\}$ . Это следует из плотности множеств  $\{\psi(x, t; \eta)|_{x=0}\}$ ,  $\{\psi(x, t; \eta)|_{x=l}\}$  (леммы 2, 3) и из непрерывности решений сопряженной задачи (10)–(13) при любой функции  $\eta(t) \in H^{1/2}[0, T]$ .

Пусть  $\varepsilon > 0$  — любое малое, но конечное число. В области  $\overline{Q}_s = \{s \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$ , где  $\varepsilon \leq s \leq l - \varepsilon$ , рассмотрим следующую краевую задачу для уравнения (17):

$$c(x, t, u_1^0)z_t - \mathcal{L}z = 0, \quad (x, t) \in Q_s, \quad (21)$$

$$a(x, t, u_1^0)z_x + (a(x, t, u_1^0)z)_x - \mathcal{A}_1 z|_{x=s} = w(t), \quad 0 < t \leq T, \quad (22)$$

$$a(x, t, u_1^0)z_x|_{x=l} = 0, \quad 0 < t \leq T, \quad (23)$$

$$z|_{t=0} = 0, \quad s \leq x \leq l, \quad (24)$$

в которой  $w(t)$  — некоторая непрерывная функция.

Как и при доказательстве леммы 3, требования гладкости входных данных и принадлежность  $u_1^0(x, t)$  и  $u_2^0(x, t)$  классу  $H^{2+\lambda, 1+\lambda/2}(\overline{Q})$  позволяют заключить, что эта линейная краевая задача имеет решение  $z(x, t; s) \in C(\overline{Q}_s) \cap C^{2,1}(Q_s)$ . Более того, если  $w(t) \in H^{1/2}[0, T]$ , то  $z(x, t; s) \in C^{2,1}(\overline{Q}_s)$  кроме точки  $x = s, t = 0$ , и  $z(x, t; s) \in C^{2,1}(\overline{Q}_s)$ , если  $w|_{t=0} = 0$ . Очевидно, что в силу своей гладкости и устойчивости относительно входных данных решение  $z(x, t; s)$  непрерывным образом зависит от параметра  $s$  [7].

Пусть  $l_0$  — произвольная точка,  $\varepsilon < l_0 \leq l - \varepsilon$ . Предположим, что при любой функции  $\eta(t) \in H^{1/2}[0, T]$  выполнены соотношения

$$\int_0^T \int_\varepsilon^{l_0} \psi(x, t; \eta) w(t) dx dt = 0, \quad (25)$$

$$\int_0^T \psi(x, t; \eta)|_{x=\varepsilon} w_1(t) dt = 0, \quad \int_0^T \psi(x, t; \eta)|_{x=l_0} w_2(t) dt = 0, \quad (26)$$

в которых  $w_1(t) = a(x, t, u_1^0)|_{x=\varepsilon} z(x, t; \varepsilon)|_{x=\varepsilon}$ ,  $w_2(t) = a(x, t, u_1^0)|_{x=l_0} z(x, t; l_0)|_{x=l_0}$ .

Покажем, что тогда  $w(t) = 0$ ,  $w_1(t) = 0$  и  $w_2(t) = 0$  при  $0 \leq t \leq T$ .

Рассмотрим выражение

$$III = \int_0^T \int_s^l z \{ (c\psi)_t + \mathcal{L}^* \psi \} dx dt + \int_0^T \int_s^l \psi \{ cz_t - \mathcal{L}z \} dx dt, \quad (27)$$

которое представляет собой некоторую функцию параметра  $s$ . Обозначим ее  $F(s)$ .

Очевидно, что при всех  $s$ ,  $\varepsilon \leq s \leq l_0$ ,  $F(s) = 0$  в силу однородности уравнений (10) и (21). С другой стороны, интегрируя (27) по частям с учетом соотношений (10) – (13) и (21) – (24), устанавливаем, что при всех  $s$ ,  $\varepsilon \leq s \leq l_0$ , выполнено

$$F(s) = \int_0^T z(x, t; s)|_{x=l} \eta(t) dt + \int_0^T \psi(x, t; \eta)|_{x=s} \{ az_x(x, t; s) - \mathcal{A}_1 z(x, t; s) \}|_{x=s} dt - \\ - \int_0^T \psi_x(x, t; \eta)|_{x=s} \{ az(x, t; s) \}|_{x=s} dt. \quad (28)$$

Таким образом, можно заключить, что  $\int_\varepsilon^{l_0} F(s) ds = 0$ , а это вместе с (28) и (22) приводит к соотношению

$$\int_0^T \int_\varepsilon^{l_0} z(x, t; s)|_{x=l} \eta(t) ds dt + \int_0^T \int_\varepsilon^{l_0} \psi(s, t; \eta) w(t) ds dt - \\ - \int_0^T \psi(x, t; \eta)|_{x=l_0} \{ az(x, t; l_0) \}|_{x=l_0} dt + \int_0^T \psi(x, t; \eta)|_{x=\varepsilon} \{ az(x, t; \varepsilon) \}|_{x=\varepsilon} dt = 0. \quad (29)$$

Из этого соотношения и из (25), (26) вытекает, что  $\int_0^T \int_{\varepsilon}^{l_0} z(x, t; s)|_{x=l} ds \eta(t) dt = 0$ , где  $z(x, t; s)|_{x=l}$  — след на границе  $x = l$  решения задачи (21) – (24) в области  $\overline{Q}_s$ . Отсюда, пользуясь произвольностью функции  $\eta(t)$ , можно установить, что

$$\int_{\varepsilon}^{l_0} z(x, t; s)|_{x=l} ds = 0, \quad 0 \leq t \leq T,$$

при любом  $l_0, \varepsilon < l_0 \leq l - \varepsilon$ . Рассматривая этот интеграл как функцию  $t$  и верхнего предела, приходим к равенству  $z(x, t; l_0)|_{x=l} = 0$  при  $0 \leq t \leq T$ .

Полученное условие  $z(x, t; l_0)|_{x=l} = 0$  вместе с условием (23) означает, что на границе  $x = l$  области  $\overline{Q}_{l_0} = \{l_0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$  заданы нулевые данные Коши. Используя, как и при выводе леммы 3, результаты [1] о единственности решения такой нехарактеристической задачи Коши, приходим к тождеству  $z(x, t; l_0) \equiv 0$  при  $(x, t) \in \overline{Q}_{l_0}$ . Тогда на границе  $x = l_0$  этой области при  $0 \leq t \leq T$  имеют место равенства  $w(t) = 0$  (в силу условия (22)) и  $w_2(t) = a(x, t, u_1^0)|_{x=l_0} z(x, t; l_0)|_{x=l_0} = 0$ .

Заметим также, что при  $w(t) = 0$  краевая задача (21) – (24) в области  $\overline{Q}_s$  при  $s = \varepsilon$  имеет решение  $z(x, t; \varepsilon) \equiv 0$ . Следствием этого тождества и граничного условия (22) при  $x = \varepsilon$  является утверждение, что  $w_1(t) = 0$  при  $0 \leq t \leq T$ .

В силу произвольности  $\varepsilon > 0$  и  $l_0, \varepsilon < l_0 \leq l - \varepsilon$ , заключаем, что усредненные на интервале  $0 < x < l_0$  функции  $\Psi(t; \eta)$  обладают свойством плотности, в том числе и на всем интервале  $0 < x < l$ . Лемма 4 доказана.

Введем теперь функции

$$\Psi(t; \eta; p_0) = l_0^{-1} \int_0^{l_0} p_0(x, t) \psi(x, t; \eta) dx, \quad 0 < l_0 < l, \tag{30}$$

которые можно рассматривать как усреднения с весом  $p_0(x, t)$  решений сопряженной задачи (10) – (13) на интервале  $0 < x < l_0$ . Обобщением леммы 4 является

**Лемма 5.** Пусть коэффициент  $p_0(x, t)$  удовлетворяет в области  $\overline{Q}$  неравенству  $|p_0(x, t)| > 0$ . Тогда при пробегании функцией  $\eta(t)$  в граничном условии (12) пространства  $H^{1/2}[0, T]$  соответствующие усреднения  $\Psi(t; \eta; p_0)$  образуют множество, всюду плотное в  $L_2[0, T]$ .

Доказательство леммы 5 повторяет с соответствующими изменениями доказательство предыдущей леммы. Граничное условие при  $x = s$  принимает вид (ср. с (22)):

$$a(x, t, u_1^0)z_x + (a(x, t, u_1^0)z)_x - \mathcal{A}_1 z|_{x=s} = p_0(x, t)|_{x=s} w(t), \quad 0 < t \leq T, \tag{31}$$

что приводит к интегральному соотношению (ср. с (29))

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\varepsilon}^{l_0} z(x, t; s)|_{x=l} \eta(t) ds dt + \int_0^T \int_{\varepsilon}^{l_0} \psi(s, t; \eta) p_0(s, t) w(t) ds dt - \\ & - \int_0^T \psi(x, t; \eta)|_{x=l_0} \{az(x, t; l_0)\}|_{x=l_0} dt + \int_0^T \psi(x, t; \eta)|_{x=\varepsilon} \{az(x, t; \varepsilon)\}|_{x=\varepsilon} dt = 0 \end{aligned} \tag{32}$$

для произвольной точки  $l_0, \varepsilon < l_0 \leq l - \varepsilon$ . Краевая задача для уравнения (21) с граничным условием (31) имеет решение  $z(x, t; s) \in C(\overline{Q}_s) \cap C^{2,1}(Q_s)$ , которое, в силу своей гладкости и устойчивости относительно входных данных и в силу непрерывности коэффициента  $p_0(s, t)$ , является непрерывной функцией параметра  $s$  [7]. По аналогии с леммой 4, для  $z(x, t; l_0)$  устанавливается дополнительное условие  $z(x, t; l_0)|_{x=l} = 0$  при любом  $l_0, \varepsilon < l_0 \leq l - \varepsilon$ . Вместе с условием (23) это означает в силу [1], что  $z(x, t; l_0) \equiv 0$  в области  $\overline{Q}_{l_0}$ . Но тогда на границе  $x = l_0$  этой области из условия (31) вытекает, что  $p_0(x, t)|_{x=l_0} w(t) = 0$ , т.е.  $w(t) = 0$  при  $0 \leq t \leq T$  вследствие неравенства  $|p_0(x, t)| > 0$  в  $\overline{Q}$ .

Установим еще некоторые свойства усредненных функций  $\Psi(t; \eta; p_0)$ .

**Лемма 6.** *Предположим, что неравенство  $|p_0(x, t)| > 0$  будет иметь место в некоторой области  $Q' = \{x_0 < x < x_1, 0 \leq t \leq T\} \subset \bar{Q}$ , вне которой  $p_0(x, t) = 0$ . Тогда при пробегании функцией  $\eta(t)$  пространства  $H^{1/2}[0, T]$  соответствующее множество усреднений*

$$\Psi(t; \eta; p_0) = (l_0 - x_0)^{-1} \int_{x_0}^{l_0} p_0(x, t) \psi(x, t; \eta) dx, \quad x_0 < l_0 < x_1, \quad (33)$$

*обладает свойством плотности в  $L_2[0, T]$ .*

**Доказательство леммы 6.** Используем ту же схему доказательства, что и для леммы 5. В областях  $\bar{Q}_s = \{s \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$ , где  $0 < s < l$ , рассматривается краевая задача (21) – (24), в которой граничное условие (22) заменяется граничным условием (31).

Очевидно, что решением такой задачи в  $\bar{Q}_s$  при значениях  $s$ ,  $0 < s \leq x_0$  и  $x_1 \leq s < l$ , является  $z(x, t; s) \equiv 0$  в силу предположений леммы 6 относительно коэффициента  $p_0(x, t)$ :  $p_0(x, t) = 0$  при  $0 \leq x \leq x_0$ ,  $x_1 \leq x \leq l$ ,  $0 \leq t \leq T$ .

Но тогда интегральное соотношение, аналогичное (32), принимает следующий вид для произвольной точки  $l_0$ ,  $x_0 < l_0 < x_1$ :

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{x_0}^{l_0} z(x, t; s) \Big|_{x=l} \eta(t) ds dt + \int_0^T \int_{x_0}^{l_0} \psi(s, t; \eta) p_0(s, t) w(t) ds dt - \\ & - \int_0^T \psi(x, t; \eta) \Big|_{x=l_0} \{az(x, t; l_0)\} \Big|_{x=l_0} dt + \int_0^T \psi(x, t; \eta) \Big|_{x=x_0} \{az(x, t; x_0)\} \Big|_{x=x_0} dt = 0. \end{aligned}$$

Повторяя рассуждения при выводе лемм 4 и 5, можно установить, что решение  $z(x, t; l_0)$  удовлетворяет на границе  $x = l$  области  $\bar{Q}_{l_0} = \{l_0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$  дополнительному условию  $z(x, t; l_0) \Big|_{x=l} = 0$  при любом  $l_0$ ,  $x_0 < l_0 < x_1$ . Это условие вместе с граничным условием (23) позволяет заключить [1], что  $z(x, t; l_0) \equiv 0$  в  $\bar{Q}_{l_0}$ . Но тогда, учитывая условие (31) на границе  $x = l_0$  и неравенство  $|p_0(x, t)| > 0$  при  $(x, t) \in Q'$ , приходим к выводу, что  $w(t) = 0$  при  $0 \leq t \leq T$ . Лемма 6 для усреднений вида (33) доказана.

**2.3. Достаточные условия единственности для обратной задачи (1) – (5).** Установленные свойства решений сопряженной задачи (10) – (13) позволяют сформулировать теоремы единственности решения  $\{u^0(x, t), f^0(t)\}$  в смысле определения 1.

**Теорема 1.** *Пусть входные данные обратной задачи (1) – (5) удовлетворяют требованиям (i) – (iv) и, кроме того, функция  $c(x, t, u)$  имеет непрерывную производную по  $t$  при  $(x, t, u) \in \bar{D}$ . Предположим также, что при  $(x, t) \in \bar{Q}$  выполнено неравенство  $|p_0(x, t)| > 0$ . Тогда в случае существования решения обратной задачи (1) – (5)  $\{u^0(x, t), f^0(t)\}$  в классах Гельдера  $H^{2+\lambda, 1+\lambda/2}(\bar{Q}) \times H^{\lambda/2}[0, T]$  оно определяется однозначно.*

**Теорема 2.** *Пусть выполнены предположения теоремы 1. Коэффициент  $p_0(x, t)$  удовлетворяет неравенству  $|p_0(x, t)| > 0$  в некоторой подобласти  $Q' = \{x_0 < x < x_1, 0 \leq t \leq T\} \subset \bar{Q}$ , вне которой  $p_0(x, t) = 0$ . Тогда решение  $\{u^0(x, t), f^0(t)\}$  обратной задачи (1) – (5) в смысле определения 1 также обладает свойством единственности в классах Гельдера  $H^{2+\lambda, 1+\lambda/2}(\bar{Q}) \times H^{\lambda/2}[0, T]$ .*

Для доказательства этих утверждений достаточно воспользоваться свойством плотности усреднений  $\Psi(t; \eta; p_0)$  (лемма 5 для теоремы 1 и, соответственно, лемма 6 для теоремы 2), чтобы заключить из интегрального соотношения (14) леммы 1, что  $\Delta f(t) = 0$  при  $0 \leq t \leq T$ . Тогда из соотношений (6) – (9), которые представляют собой линейную краевую задачу с гладкими коэффициентами относительно  $\Delta u$ , вытекает в силу единственности решения такой задачи [7], что  $\Delta u \equiv 0$  в  $\bar{Q}$ . Эти рассуждения завершают доказательство теорем 1 и 2.

**Замечание 1.** Полученные результаты подтверждают справедливость соответствующих теорем единственности, сформулированных ранее в [2, 3]. Уточнение, которое необходимо сделать в [2, 3], касается только применения к интегральному соотношению леммы 1 свойств плотности усреднений  $\Psi(t; \eta; p_0)$ .

**2.4.** Остановимся кратко на достаточных условиях единственности, которые вытекают из проведенного исследования в том случае, когда обратная задача состоит в нахождении функций  $u(x, t)$  в  $\bar{Q}$  и  $f(t)$  при  $0 \leq t \leq T$ , удовлетворяющих линейному параболическому уравнению

$$c(x, t)u_t - Lu = p_0(x, t)f(t) + p_1(x, t), \quad (x, t) \in Q, \quad (34)$$



где  $Lu \equiv (a(x, t)u_x)_x - b(x, t)u_x - d(x, t)u$ , и граничным условиям

$$a(x, t)u_x - e_0(t)u|_{x=0} = q_0(t), \quad 0 < t \leq T, \tag{35}$$

$$a(x, t)u_x + e_1(t)u|_{x=l} = q_1(t), \quad 0 < t \leq T, \tag{36}$$

начальному условию (2) и граничному наблюдению (3).

Соответствующая этой обратной задаче теорема единственности решения  $\{u^0(x, t), f^0(t)\}$  в классах Гельдера принимает следующий вид.

**Теорема 3.** *Предположим, что входные данные линейной краевой задачи (34)–(36), (2) удовлетворяют требованиям гладкости и согласования, обеспечивающим существование и единственность  $u(x, t)$  в  $H^{2+\lambda, 1+\lambda/2}(\bar{Q})$  при любой функции  $f(t) \in H^{\lambda/2}[0, T]$  в правой части уравнения (34):*

$$a, a_x, b, c, c_x, d \in H^{\lambda, \lambda/2}(\bar{Q}), \quad p_i \in H^{\lambda, \lambda/2}(\bar{Q}), \quad 0 < \lambda < 1,$$

$$e_i, q_i \in H^{(1+\lambda)/2}[0, T], \quad e_i \geq 0, \quad \varphi \in H^{2+\lambda}[0, l], \quad i = 0, 1,$$

$$a(x, 0)\varphi_x - e_0(0)\varphi|_{x=0} = q_0(0), \quad a(x, 0)\varphi_x + e_1(0)\varphi|_{x=l} = q_1(0).$$

Пусть, кроме того, производные  $a_t, b_x$  и  $c_t$  непрерывны в  $\bar{Q}$ , функция  $g(t) \in H^{1+\lambda/2}[0, T]$ ,  $|p_0(x, t)| > 0$  либо во всей области  $\bar{Q}$ , либо в ее подобласти  $Q' = \{x_0 < x < x_1, 0 \leq t \leq T\} \subset \bar{Q}$ , вне которой  $p_0(x, t) = 0$ . Тогда решение  $\{u^0(x, t), f^0(t)\}$  такой обратной задачи в случае его существования единственно в классе функций  $H^{2+\lambda, 1+\lambda/2}(\bar{Q}) \times H^{\lambda/2}[0, T]$ .

Доказательство повторяет с соответствующими упрощениями доказательство теорем 1, 2, опираясь на соотношение (14) для решения  $\psi(x, t; \eta)$  сопряженной задачи, имеющей в данном случае вид

$$(c(x, t)\psi)_t + (a(x, t)\psi_x)_x + (b(x, t)\psi)_x - d(x, t)\psi = 0, \quad 0 < x < l, \quad 0 \leq t < T,$$

$$a(x, t)\psi_x - (e_0(t) - b(x, t))\psi|_{x=0} = 0, \quad 0 \leq t < T,$$

$$a(x, t)\psi_x + b(x, t)\psi|_{x=l} = \eta(t), \quad 0 \leq t < T, \quad \psi|_{t=T} = 0, \quad 0 \leq x \leq l,$$

и на плотность множества усреднений  $\Psi(t; \eta; p_0)$  при пробегании функцией  $\eta(t)$  пространства  $H^{1/2}[0, T]$ .

**2.5. Класс допустимых решений для обратных задач с граничным переопределением.** Выбор пространств Гельдера  $H^{2+\lambda, 1+\lambda/2}(\bar{Q}) \times H^{\lambda/2}[0, T]$  для решения рассматриваемых обратных задач о нахождении неизвестной правой части в параболических уравнениях типа (1) и (34) является естественным, так как он обусловлен точными дифференциальными зависимостями в классах Гельдера между входными данными и решением соответствующих краевых задач (т.е. прямых постановок задач Неймана).

Однако если функция  $f$  в правой части уравнения (1) или (34) ищется в виде  $f(x, t)$ , а не  $f(t)$ , то такая обратная задача не обладает, вообще говоря, свойством единственности (см. примеры в [3]). Таким образом, класс, состоящий из пар функций  $\{u(x, t), f(t)\} \in H^{2+\lambda, 1+\lambda/2}(\bar{Q}) \times H^{\lambda/2}[0, T]$ , является естественным классом допустимых решений рассматриваемых обратных задач с граничным переопределением для линейных и квазилинейных уравнений.

**3. Достаточные условия единственности для обратной задачи со смешанными краевыми условиями.** Предположим теперь, что вместо (5) дополнительным условием к задаче с данными Коши для параболического уравнения (1) с неизвестной правой частью  $f(t)$  является условие

$$u|_{x=0} = v(t), \quad 0 < t \leq T. \tag{37}$$

**3.1.** Рассмотрим такую задачу как обратную задачу с граничным переопределением: найти функции  $u(x, t)$  в  $\bar{Q}$  и  $f(t)$  при  $0 \leq t \leq T$ , удовлетворяющие уравнению (1), начальному условию (2), смешанным краевым условиям (37) и (4) при  $x = 0$  и  $x = l$ , а также граничному наблюдению (3), в которых входные данные  $a > 0, b, c > 0, d, p_0, p_1, v, e_1, q_1, \varphi$  и  $g$  предполагаются заданными.

Пусть выполнены требования (i)–(iii) к соответствующим входным данным и пусть, кроме того, граничная функция  $v(t)$  удовлетворяет условию

$$(v). \quad v(t) \text{ принадлежит } H^{1+\lambda/2}[0, T], \quad v|_{t=0} = \varphi|_{x=0}.$$

Тогда квазилинейная краевая задача (1), (2), (37), (4) имеет единственное решение  $u(x, t)$  в классе Гельдера  $H^{2+\lambda, 1+\lambda/2}(\bar{Q})$  при любой функции  $f(t) \in H^{\lambda/2}[0, T]$  в правой части уравнения (1), удовлетворяющей условиям согласования [7]:

$$c(x, 0, \varphi)v_t - L\varphi|_{x=0, t=0} = p_0(x, 0)f(0) + p_1(x, 0)|_{x=0}. \tag{38}$$

Исходя из этого, дадим следующее

**Определение 2.** Решением обратной задачи со смешанными краевыми условиями назовем пару функций  $\{u^0(x, t), f^0(t)\}$ :

$$u^0(x, t) \in H^{2+\lambda, 1+\lambda/2}(\overline{Q}), \quad f^0(t) \in H^{\lambda/2}[0, T], \quad 0 < \lambda < 1,$$

удовлетворяющих соотношениям (1), (2), (4), (37), (38) и граничному наблюдению (3) в обычном смысле.

**3.2.** Ограничимся изложением основных моментов доказательства единственности решения в смысле определения 2, так как оно повторяет с соответствующими модификациями доказательство теорем 1, 2.

Предположим, что  $\{u_1^0, f_1^0\}$  и  $\{u_2^0, f_2^0\}$  — два решения рассматриваемой обратной задачи. Тогда  $u_1^0(x, t)$  и  $u_2^0(x, t)$  являются решениями смешанной краевой задачи (1), (2), (37), (4) в классе Гельдера  $H^{2+\lambda, 1+\lambda/2}(\overline{Q})$ , соответствующими функциям  $f_1^0(t)$  и  $f_2^0(t)$  правой части уравнения (1).

Пусть  $\Delta u = u_2^0 - u_1^0$ ,  $\Delta f = f_2^0 - f_1^0$ . В силу (38)  $\Delta f|_{t=0} = 0$ , кроме того, из (1)–(4) и (37) следует, что  $\Delta u$  и  $\Delta f$  удовлетворяют соотношениям (6), (8), (9) и условию

$$\Delta u|_{x=0} = 0, \quad 0 < t \leq T.$$

Утверждение, что  $\Delta u = 0$  в  $\overline{Q}$ ,  $\Delta f = 0$  при  $0 \leq t \leq T$ , основано на свойствах соответствующей сопряженной задачи

$$(c(x, t, u_1^0)\psi)_t + \mathcal{L}^*\psi = 0, \quad 0 < x < l, \quad 0 \leq t < T, \quad (39)$$

$$\psi|_{x=0} = 0, \quad 0 \leq t < T, \quad (40)$$

$$a(x, t, u_1^0)\psi_x + \mathcal{A}_1\psi|_{x=l} = \eta(t), \quad 0 \leq t < T, \quad (41)$$

$$\psi|_{t=T} = 0, \quad 0 \leq x \leq l, \quad (42)$$

в которой  $\mathcal{L}^*\psi \equiv (a(x, t, u_1^0)\psi_x)_x + (\mathcal{A}_1\psi)_x - \mathcal{A}_2\psi$ ,  $\eta(t)$  — произвольная функция, пробегающая пространство  $H^{1/2}[0, T]$ .

Имеет место аналогичная лемме 1

**Лемма 7.** Пусть входные данные рассматриваемой обратной задачи удовлетворяют требованиям (i)–(v) и функция  $c(x, t, u)$  имеет непрерывную производную по  $t$  при  $(x, t, u) \in \overline{D}$ . Тогда при любой граничной функции  $\eta(t) \in H^{1/2}[0, T]$  решение  $\psi(x, t; \eta)$  сопряженной задачи (39)–(42) удовлетворяет соотношению

$$\int_0^T \int_0^l \psi(x, t; \eta) p_0(x, t) \Delta f(t) dx dt = 0 \quad \forall \eta(t) \in [0, T].$$

Для  $\psi(x, t; \eta)$  на границе  $x = l$  справедливо утверждение леммы 2. На другой границе  $x = 0$  имеет место

**Лемма 8.** Пусть входные данные удовлетворяют условиям леммы 7. Если при любой функции  $\eta(t) \in H^{1/2}[0, T]$  выполнено соотношение

$$\int_0^T \psi_x(x, t; \eta)|_{x=0} \theta(t) dt = 0 \quad (43)$$

для некоторой непрерывной функции  $\theta(t)$ ,  $\theta(t)|_{t=0} = 0$ , то  $\theta(t) = 0$  при  $0 \leq t \leq T$ , т.е. множество следов  $\{\psi_x(x, t; \eta)|_{x=0}\}$ , получаемое при пробегании функцией  $\eta(t)$  пространства  $H^{1/2}[0, T]$ , является всюду плотным.

**Доказательство леммы 8.** Рассмотрим в области  $\overline{Q}$  краевую задачу, сопряженную с (39)–(42):

$$c(x, t, u_1^0)z_t - \mathcal{L}z = 0, \quad (x, t) \in Q, \quad (44)$$

$$z|_{x=0} = w(t), \quad 0 < t \leq T, \quad (45)$$

$$a(x, t, u_1^0)z_x|_{x=l} = 0, \quad 0 < t \leq T, \quad (46)$$

$$z|_{t=0} = 0, \quad 0 \leq x \leq l, \quad (47)$$

где оператор  $\mathcal{L}z$  имеет тот же вид, что и в (17),  $w(t) = (a(x, t, u_1^0)|_{x=0})^{-1}\theta(t)$  — непрерывная функция в силу гладкости входных данных и непрерывности  $\theta(t)$ ,  $w(t)|_{t=0} = 0$ . Соотношения (44) – (47) представляют собой линейную краевую задачу со смешанными граничными условиями, которая вследствие гладкости коэффициентов уравнения (44) имеет решение  $z(x, t) \in C(\overline{Q}) \cap C^{2,1}(Q)$ . Покажем, что при  $x = l$  в дополнение к (46) имеет место условие  $z|_{x=l} = 0$ .

Рассматривая, как и в лемме 3, вспомогательное выражение  $II$ , нетрудно установить из (39) – (42) и (44) – (47), что

$$II = \int_0^T z|_{x=l} \{a\psi_x + \mathcal{A}_1\psi\}|_{x=l} dt - \int_0^T \psi_x|_{x=0} \{az\}|_{x=0} dt = 0,$$

т.е. в силу (41), (45) и вида функции  $w(t)$  имеем  $\int_0^T z|_{x=l} \eta(t) dt - \int_0^T \psi_x|_{x=0} \theta(t) dt = 0$ . Отсюда вследствие предположения (43) и произвольности функции  $\eta(t)$  и вытекает, что  $z|_{x=l} = 0$ .

Дальнейшие рассуждения, как и в лемме 3, основаны на возможности применить результаты, полученные в [1], для нехарактеристической задачи Коши с нулевыми данными на границе  $x = l$  и заключить, что  $z(x, t) \equiv 0$  в области  $\overline{Q}$ . Тогда из (45) вытекает, что  $w(t) = 0$ , т.е., исходя из вида функции  $\theta(t)$ , заключаем, что и  $\theta(t) = 0$  при  $0 \leq t \leq T$ , что и требовалось доказать. Лемма 8 установлена.

Усреднения решений  $\psi(x, t; \eta)$  при  $0 \leq x \leq l_0$ ,  $0 < l_0 < l$ , т.е. функции  $\Psi(t; \eta)$  и  $\Psi(t; \eta; p_0)$ , обладают свойством плотности при пробегании функцией  $\eta(t)$  в граничном условии (41) пространства  $H^{1/2}[0, T]$ . Для них справедливы соответствующие утверждения лемм 4–6, при доказательстве которых рассматривается краевая задача (21) – (24) в областях  $\overline{Q}_s = \{s \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$  при  $0 \leq s \leq l_0$ . Аналогами соотношений (29) и (32) являются следующие соотношения (см. (40)):

$$\int_0^T \int_0^{l_0} z(x, t; s)|_{x=l} \eta(t) ds dt + \int_0^T \int_0^{l_0} \psi(s, t; \eta) w(t) ds dt - \int_0^T \psi(x, t; \eta)|_{x=l_0} \{az(x, t; l_0)\}|_{x=l_0} dt = 0,$$

$$\int_0^T \int_0^{l_0} z(x, t; s)|_{x=l} \eta(t) ds dt + \int_0^T \int_0^{l_0} \psi(s, t; \eta) p_0(s, t) w(t) ds dt - \int_0^T \psi(x, t; \eta)|_{x=l_0} \{az(x, t; l_0)\}|_{x=l_0} dt = 0.$$

Лемма 7 и свойства плотности усреднений  $\Psi(t; \eta; p_0)$  позволяют показать, что  $\Delta u \equiv 0$  в  $\overline{Q}$ ,  $\Delta f(t) = 0$  при  $0 \leq t \leq T$ , с помощью рассуждений, подобных проведенным при доказательстве теорем 1, 2. В частности, аналогом теоремы 1 является следующая

**Теорема 4.** Пусть входные данные обратной задачи со смешанными краевыми условиями удовлетворяют соответствующим требованиям (i) – (v) и, кроме того, функция  $c(x, t, u)$  имеет непрерывную производную по  $t$  при  $(x, t, u) \in \overline{D}$ . Предположим также, что  $|p_0(x, t)| > 0$  при  $(x, t) \in \overline{Q}$  и что функция  $g(t)$  удовлетворяет условию согласования

$$c(x, 0, \varphi)g_t - L\varphi|_{x=l, t=0} = p_0(x, 0)g^* + p_1(x, 0)|_{x=l}, \tag{48}$$

где  $g^* = \{c(x, 0, \varphi)v_t - L\varphi - p_1(x, t)\}|_{x=0, t=0} p_0^{-1}(x, 0)|_{x=0}$ . Тогда в случае существования решения такой обратной задачи  $\{u^0(x, t), f^0(t)\}$  в смысле определения 2 это решение определяется однозначно.

**3.3.** Рассмотрим теперь обратную задачу со смешанными краевыми условиями для линейного параболического уравнения (34), включающую в себя условия (36) и (37) при  $x = 0$  и  $x = l$ , начальное условие (2) и граничное наблюдение (3). Сформулируем достаточные условия единственности для такой задачи.

**Теорема 5.** Предположим, что входные данные удовлетворяют требованиям гладкости и согласования

$$a, a_x, b, c, c_x, d \in H^{\lambda, \lambda/2}(\overline{Q}), \quad p_0, p_1 \in H^{\lambda, \lambda/2}(\overline{Q}), \quad 0 < \lambda < 1,$$

$$v(t) \in H^{1+\lambda/2}[0, T], \quad e_1, q_1 \in H^{(1+\lambda)/2}[0, T], \quad e_1 \geq 0, \quad \varphi \in H^{2+\lambda}[0, l],$$

$$v|_{t=0} = \varphi|_{x=0}, \quad a(x, 0)\varphi_x + e_1(0)\varphi|_{x=l} = q_1(0),$$

обеспечивающим существование и единственность  $u(x, t)$  в  $H^{2+\lambda, 1+\lambda/2}(\bar{Q})$  при любой функции  $f(t)$  в правой части уравнения (34), такой, что

$$f(t) \in H^{\lambda/2}[0, T], \quad c(x, 0)v_t - L\varphi|_{x=0, t=0} = p_0(x, 0)f(0) + p_1(x, 0)|_{x=0}. \quad (49)$$

Пусть, кроме того, производные  $a_t$ ,  $b_x$  и  $c_t$  непрерывны в  $\bar{Q}$ ,  $|p_0(x, t)| > 0$  при  $(x, t) \in \bar{Q}$ , функция  $g(t)$  принадлежит  $H^{1+\lambda/2}[0, T]$  и удовлетворяет линейному аналогу условия (48). Тогда в случае существования решения  $\{u^0(x, t), f^0(t)\}$  рассматриваемой обратной задачи, удовлетворяющего соотношению (49), оно определяется однозначно в классе функций  $H^{2+\lambda, 1+\lambda/2}(\bar{Q}) \times H^{\lambda/2}[0, T]$ .

Единственность решения обратной задачи со смешанными граничными условиями в этих классах Гельдера имеет место и в том случае, когда неравенство  $|p_0(x, t)| > 0$  выполняется в некоторой подобласти  $Q' = \{x_0 < x < x_1, 0 \leq t \leq T\} \subset \bar{Q}$ , вне которой  $p_0(x, t) = 0$ .

Вывод этих утверждений основан на линейных аналогах соответствующих лемм о плотности множества усреднений  $\{\Psi(t; \eta; p_0)\}$  при пробегании граничной функцией  $\eta(t)$  пространства  $H^{1/2}[0, T]$ .

**3.4.** Для рассматриваемых в настоящей статье обратных задач со смешанными краевыми условиями естественный класс допустимых решений состоит из пар функций  $\{u(x, t), f(t)\}$ , которые принадлежат пространствам  $H^{2+\lambda, 1+\lambda/2}(\bar{Q}) \times H^{\lambda/2}[0, T]$ . Расширение этого класса путем включения в него пар функций  $\{u(x, t), f(x, t)\}$  приводит к нарушению единственности решения (см. соответствующий пример в [3]).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ландис Е.М. Некоторые вопросы качественной теории эллиптических и параболических уравнений // Успехи матем. наук. 1959. **14**, № 1. 21–85.
2. Гольдман Н.Л. Единственность определения правой части в квазилинейных параболических уравнениях с финальным и граничным наблюдением // Докл. РАН. 2004. **395**, № 2. 151–156.
3. Гольдман Н.Л. Об одном классе обратных задач с данными Коши для квазилинейного параболического уравнения // Вычислительные методы и программирование. 2004. **5**, № 1. 74–86.
4. Клибанов М.В. Об одном классе обратных задач для нелинейных параболических уравнений // Докл. РАН. 1985. **280**, № 3. 533–536.
5. Prilepko A.I., Orlovsky D.G., Vasin I.A. Methods for solving inverse problems in mathematical physics. New York–Basel: Marcel Dekker, 1999.
6. Engl H.W., Scherzer O., Yamamoto M. Uniqueness and stable determination of forcing terms in linear partial differential equations with overspecified boundary data // Inverse Problems. 1994. **10**, N 6. 1253–1276.
7. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.

Поступила в редакцию  
26.04.2007