УДК 519.6

# О ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОЙ ОПТИМАЛЬНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

**И. В. Колос**[1], **М. В. Колос**[2]

Рассмотрена задача восстановления сигналов в системах с операторными коэффициентами при наличии цветных (небелых) шумов в измерениях. Задача линейной фильтрации в этом случае, вообще говоря, некорректно поставлена. Предложен метод нахождения приближенного решения задачи, основанный на идее регуляризации А.Н. Тихонова и сведении задачи линейной фильтрации в системах с операторными коэффициентами к задаче линейной фильтрации в системах, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями. Доказана сходимость алгоритма решения задачи. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 04–01–00026).

Пусть $H_u$ и $H_r$ — сепарабельные вещественные гильбертовы пространства; $[0,t]$ — сегмент, $t<\infty$; $L_2\big(H_u;[0,t]\big)$ и $L_2\big(H_r;[0,t]\big)$ — пространства измеримых по Лебегу функций $f(\tau)$ при $\tau\in[0,t]$, отображающих сегмент $[0,t]$ соответственно в пространства $H_u$ и $H_r$ со скалярным произведением $(f,g)_{0H_i}=\int\limits_0^t (f,g)_{H_i}\,d\tau$ и нормой $\|\,f\,\|_{0H_i}=\left(\int\limits_0^t \|\,f\,\|^2_{H_i}\,d\tau\right)^{1/2}$, где индекс $i\in\{u,r\}$ указывает на пространство, в котором вычисляется скалярное произведение (или норма). Через $\mathcal{F}(X,Y)$ будем обозначать банахово пространство всех линейных операторов, непрерывно отображающих гильбертово пространство $X$ в гильбертово пространство $Y$. Пополнение множества дважды дифференцируемых на $[0,t]$ функций $u(\tau)$, отображающих $[0,t]$ в $H_u$, для которых $u(t)=0$, $\left.\dfrac{du}{d\tau}\right|_{\tau=t}=0$ по норме

$$\|\,u\,\|_{1u}=\left[\int\limits_0^t\left(\|\,u\,\|^2_{H_u}+\left\|\frac{du}{d\tau}\right\|^2_{H_u}\right)d\tau\right]^{1/2}, \tag{1}$$

обозначим через $W^1_{2t}\big(H_u;[0,t]\big)$ с нормой $\|\,.\,\|_{1tu}$. Пусть $W^{-1}_{2t}\big(H_u;[0,t]\big)$ — пополнение $L_2\big(H_u;[0,t]\big)$ по негативной норме $\|\,v\,\|_{-1tu}=\sup\limits_u\dfrac{\big|(v,u)_{0H_u}\big|}{\|\,u\,\|_{1tu}}$, $u\in W^1_{2tu}\big(H_u;[0,t]\big)$, $u\neq 0$; $\langle u,v\rangle_u$ — билинейная форма, определенная для элементов $u\in W^1_{2t}\big(H_u;[0,t]\big)$ и $v\in W^{-1}_{2t}\big(H_u;[0,t]\big)$ и совпадающая со скалярным произведением в $L_2\big(H_u;[0,t]\big)$, если $v$ принадлежит $L_2\big(H_u;[0,t]\big)$ [1–4]; $(\Omega,\mathcal{G},p)$ — вероятностное пространство, в котором рассматриваются все случайные процессы.

**Постановка задачи.** Пусть $H_u$-значный полезный сигнал $u(\tau)=u(\tau,\omega)$ описывается уравнением

$$\begin{aligned}\mathcal{L}u\equiv\frac{d^2u(\tau)}{d\tau^2}+\mathcal{B}u(\tau)&=v(\tau),\\ u(0)=u_0,\quad \left.\frac{du(\tau)}{d\tau}\right|_{\tau=0}&=u_1,\end{aligned} \tag{2}$$

где $u_0=u_0(\omega)$, $u_1=u_1(\omega)$ — случайные процессы, реализации которых с вероятностью 1 принадлежат $L_2(H_u)$, $M[u_0]=M[u_1]=0$, $M[u_0,u_0]=\mathcal{U}_0$, $M[u_1,u_1]=\mathcal{U}_1$, $\mathcal{U}_0$ и $\mathcal{U}_1$ суть корреляционные операторы процессов $u_0$ и $u_1$, $\mathcal{U}_0,\mathcal{U}_1\in\mathcal{F}\big(L_2(H_u),L_2(H_u)\big)$; $v(\tau)=v(\tau,\omega)$ — случайный процесс типа белого шума, реализации которого почти наверное принадлежат негативному пространству $W^{-1}_{2t}\big(H_u;[0,t]\big)$ с нулевым средним $M\big[v(\tau)\big]=0$ и корреляцией $M\big[v(\tau),v(\sigma)\big]=\mathcal{V}(\tau)\delta(\tau-\sigma)$, $\mathcal{V}(\tau)\in\mathcal{F}\Big(W^1_{2t}\big(H_u;[0,t]\big),W^{-1}_{2t}\big(H_u;[0,t]\big)\Big)$;

[1] Университет Российской академии образования, ул. Б. Полянка, д. 58, 109180, Москва; e-mail: kolos_v@mail.ru

[2] Научно-исследовательский вычислительный центр, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, 119992, Москва; e-mail: arush@srcc.msu.su

$\delta(\tau-\sigma)$ — $\delta$-функция Дирака, $\delta(\tau-\sigma)\in W_{2t}^{-1}([0,t])$; $\mathcal{B}$ — замкнутый линейный оператор в $H_u$ со всюду плотной областью определения $D(\mathcal{B})$, симметричный $(\mathcal{B}u,v)_{0H_u}=(u,\mathcal{B}v)_{0H_u}$ для $\forall u,\, v\in D(\mathcal{B})$, положительно определенный $(\mathcal{B}u,u)_{0H_u}\geqslant c\|\,u\,\|_{0H_u}^2$ и такой, что справедливы неравенства: $\|\mathcal{L}u\|_{-1tu}\geqslant c\|\,u\,\|_{0H_u}$, $\|\mathcal{L}u\|_{-1tu}\leqslant c\|\,u\,\|_{10u}$, где $\|\,.\,\|_{10u}$ — норма в пространстве $W_{20}^1\big(H_u;[0,t]\big)$, полученном пополнением по норме (1) множества дважды дифференцируемых на $[0,t]$ функций $u(\tau)$, отображающих $[0,t]$ в $H_u$ и для которых выполняются условия $u(0)=0$, $\left.\dfrac{du(\tau)}{d\tau}\right|_{\tau=0}=0$.

Наблюдается процесс $\big\{r(\tau),\ 0\leqslant\tau\leqslant t\big\}$, связанный с $u(\tau)$ соотношением

$$r(\tau)=\mathcal{S}u(\tau)+w(\tau), \tag{3}$$

где $w(\tau)=w(\tau,\omega)$ — гауссовский вырожденный шум с нулевым средним $M\big[w(\tau)\big]=0$ и корреляцией $M\big[w(\tau),w(\sigma)\big]=\mathcal{W}(\tau)\delta(\tau-\sigma)$, $\mathcal{W}(\tau)\in\mathcal{F}\Big(W_{2t}^1\big(H_r;[0,t]\big),W_{2t}^{-1}\big(H_r;[0,t]\big)\Big)$, $\mathcal{W}(\tau)$ — вырожденный оператор; реализации $w(\tau)$ почти наверное принадлежат негативному пространству $W_{2t}^{-1}\big(H_r;[0,t]\big)$.

Требуется найти последовательность оценок $\big\{\widehat{u}_\alpha(t)\big\}_{\alpha>0}$ из пространства состояний $H_u$, такую, что

$$\lim_{\alpha\to0}M\big[(z,\mathcal{A}_\alpha r-u)_{H_u}^2\big]=\inf_{\mathcal{A}}M\big[(z,\mathcal{A}r-u)_{H_u}^2\big]=m(z),\quad \mathcal{A}_\alpha r=\widehat{u}_\alpha(t), \tag{4}$$

где $\mathcal{A}_\alpha$ — линейный непрерывный оператор, действующий из пространства наблюдений $W_{2t}^{-1}\big(H_r;[0,t]\big)$ в пространство состояний $H_u$; $z$ — произвольный элемент из $H_u$; нижняя грань берется по всем линейным непрерывным операторам $\mathcal{A}$, действующим из $W_{2t}^{-1}\big(H_r;[0,t]\big)$ в $H_u$.

Решение задачи фильтрации (2) – (4) эквивалентно решению операторного уравнения Винера–Хопфа

$$\mathcal{A}_0\mathcal{R}_r=\mathcal{R}_{ur}, \tag{5}$$

где $\mathcal{A}_0$ — линейный оператор, удовлетворяющий критерию (4); $\mathcal{R}_r$ — корреляционный оператор случайного процесса $r(\tau)$; $\mathcal{R}_r\in\mathcal{F}\Big(W_{2t}^1\big(H_r;[0,t]\big),W_{2t}^{-1}\big(H_r;[0,t]\big)\Big)$; $\mathcal{R}_{ur}$ — взаимнокорреляционный оператор случайных процессов $u(\tau)$ и $r(\tau)$, $\mathcal{R}_{ur}\in\mathcal{F}\Big(W_{2t}^1\big(H_r;[0,t]\big),H_u\Big)$.

Уравнение (5) является уравнением первого рода, задача решения которого некорректна (неустойчива) [1, 2].

Справедливо следующее утверждение.

**Теорема 1.** *Последовательность операторов* $\{\mathcal{A}_\alpha\}_{\alpha>0}$, $\mathcal{A}_\alpha\in\mathcal{F}\Big(W_{2t}^{-1}\big(H_r;[0,t]\big),H_u\Big)$, *удовлетворяющая критерию* (4), *находится из операторного уравнения*

$$\mathcal{A}_\alpha\mathcal{R}_r+\alpha\mathcal{A}_\alpha=\mathcal{R}_{ur}, \tag{6}$$

*где* $\alpha$ *— параметр регуляризации,* $\alpha>0$.

Доказательство теоремы аналогично доказательству соответствующих теорем из [3, 5].

**Приближенное решение задачи линейной фильтрации.** Пусть $\{e_i\}_{i=1}^\infty$ и $\{\rho_i\}_{i=1}^\infty$— ортонормированные базисы в гильбертовых сепарабельных пространствах $H_u$ и $H_r$.

Приближенное решение уравнения (2) будем искать в виде $u_n(\tau)=\sum\limits_{i=1}^n x_i(\tau)e_i$, $0\leqslant\tau\leqslant t$, $x_i(\tau)$ — искомые функции.

Система обыкновенных дифференциальных уравнений, которой удовлетворяет вектор-столбец $\boldsymbol{x}_{(n)}(\tau)$ с координатами $\big(x_1(\tau),x_2(\tau),x_3(\tau),\dots,x_n(\tau)\big)$, имеет вид:

$$\begin{gathered}\frac{d^2\boldsymbol{x}_{(n)}(\tau)}{d\tau^2}+F\boldsymbol{x}_{(n)}(\tau)=\boldsymbol{v}_{(n)}(\tau),\\ \boldsymbol{x}_{(n)}(0)=\boldsymbol{x}_0,\quad \left.\frac{d\,\boldsymbol{x}_{(n)}(\tau)}{d\tau}\right|_{\tau=0}=\boldsymbol{x}_{10}.\end{gathered} \tag{7}$$

В выражении (7) $F$ — матрица размерности $n\times n$ с элементами $F_{ij}=(\mathcal{B}e_i,e_j)_{0H_u}$, $i,j=1,2,\dots,n$; $\boldsymbol{v}_{(n)}(\tau)$ — случайный $n$-мерный белый гауссовский шум с нулевым средним и корреляционной матрицей $M\big[\boldsymbol{v}_{(n)}(\tau)\boldsymbol{v}_{(n)}^{\mathrm{T}}(\sigma)\big]=V_{(n)}(\tau)\delta(\tau-\sigma)$, $V_{(n)}(\tau)=\Big[\big(\mathcal{V}(\tau)e_i,e_j\big)_{0H_u}\Big]_{i,j=1}^n$ (здесь верхний индекс т — знак транспонирования). Задача (7) является обобщенной задачей Коши [3, 5].

Наблюдения для приближенной задачи фильтрации строим следующим образом. Умножим скалярно наблюдения $r(\tau)$ на векторы $\{\rho_j\}_{j=1}^m$ и введем обозначения: $\boldsymbol{r}_{(m)}(\tau) \equiv \Big[\big(r(\tau),\rho_j\big)_{0H_r}\Big]_{j=1}^m$; $C$ — матрица размерности $m\times n$ с элементами $C_{ji} = (\mathcal{S}e_i,\rho_j)_{0H_r}$, $i=1,2,\dots,n$, $j=1,2,\dots,m$; $\boldsymbol{w}_{(m)}(\tau)$ — векторный гауссовский шум, $\boldsymbol{w}_{(m)}(\tau) = \Big[\big(w(\tau),\rho_j\big)_{0H_r}\Big]_{j=1}^m$, $M\big[\boldsymbol{w}_{(m)}(\tau)\big]=0$, $M\big[\boldsymbol{w}_{(m)}(\tau)\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}_{(m)}(\sigma)\big] = W_{(m)}(\tau)\delta(\tau-\sigma)$, $W_{(m)}(\tau)$ — вырожденная матрица размерности $m\times m$, $W_{(m)}(\tau) = \Big[\big(\mathcal{W}(\tau)\rho_i,\rho_j\big)_{0H_r}\Big]_{i,j=1}^m$.

Тогда измерения для приближенной задачи будут иметь вид

$$\boldsymbol{r}_{(m)}(\tau) = C\boldsymbol{x}_{(n)}(\tau) + \boldsymbol{w}_{(m)}(\tau). \tag{8}$$

Требуется найти последовательность оценок $\big\{\widehat{\boldsymbol{x}}_\alpha(\tau)\big\}_{\alpha>0}$ процесса $\boldsymbol{x}_{(n)}(\tau)$ в момент $\tau=t$, такую, что

$$\lim_{\alpha\to 0} M\Big[\big(z,\boldsymbol{x}_{(n)}(t)-\widehat{\boldsymbol{x}}_\alpha(t)\big)^2_{E_n}\Big] = \inf_{\mathcal{H}} M\Big[\big(z,\boldsymbol{x}_{(n)}(t)-\mathcal{H}\boldsymbol{r}_{(m)}(t)\big)^2_{E_n}\Big] = m(z); \tag{9}$$

нижняя грань берется по всем линейным непрерывным операторам $\mathcal{H}$, действующим из пространства наблюдений в пространство состояний, $\mathcal{H}\boldsymbol{r}_{(m)}(t) = \int\limits_0^t h(t,\tau)\boldsymbol{r}_{(m)}(\tau)\,d\tau$, $h(t,\tau)$ — матрица размерности $m\times n$ с элементами $h_{ij}(t,\tau)$, по аргументу $\tau$ принадлежащими позитивному пространству $W_2^1\big([0,t]\big)$, $z$ — произвольный вектор из евклидова $n$-мерного пространства $E_n$.

Имеют место следующие статистики:

$$\begin{aligned}
&M[\boldsymbol{x}_0]=0, \quad M[\boldsymbol{x}_0\boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}}]=P_0, \quad P_0^{ij}=(\mathcal{U}_0e_i,e_j)_{0H_u}, \quad i,j=1,2,\dots,n;\\
&M[\boldsymbol{x}_{10}]=0, \quad M[\boldsymbol{x}_{10}\boldsymbol{x}_{10}^{\mathrm{T}}]=P_{10}, \quad P_{10}^{ij}=(\mathcal{U}_1e_i,e_j)_{0H_u}, \quad i,j=1,2,\dots,n;\\
&M\big[\boldsymbol{v}_{(n)}(\tau)\boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}}\big]=0, \quad M\big[\boldsymbol{v}_{(n)}(\tau)\boldsymbol{x}_{10}^{\mathrm{T}}\big]=0,\\
&M\big[\boldsymbol{w}_{(m)}(\tau)\boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}}\big]=0, \quad M\big[\boldsymbol{w}_{(m)}(\tau)\boldsymbol{x}_{10}^{\mathrm{T}}\big]=0, \quad M\big[\boldsymbol{w}_{(m)}(\tau)\boldsymbol{v}_{(n)}^{\mathrm{T}}(\sigma)\big]=0.
\end{aligned}$$

Матрица $W_{(m)}(\tau)$ может быть вырожденной. Поэтому для решения задачи фильтрации (7) – (9) необходимо использовать алгоритм, аналогичный изученному в [3, 5].

Покажем, что построенное согласно (7) – (9) приближенное решение задачи линейной оптимальной фильтрации (2) – (4) $\widehat{u}_n^\alpha(\tau,x) = \sum\limits_{i=1}^n \widehat{x}_i^\alpha(\tau)e_i(x)$ при $n\to\infty$ сходится в соответствующей норме к точному решению.

Отметим, что при выполнении неравенств $\|\mathcal{L}u\|_{-1tu} \geqslant c\|\,u\,\|_{0H_u}$ и $\|\mathcal{L}u\|_{-1tu} \leqslant c\|\,u\,\|_{10u}$ существует и единственно обобщенное решение уравнения (2), а последовательность приближенных решений системы (2) при $n\to\infty$ сходится по норме пространства $L_2\big(H_u;[0,t]\big)$ при каждом фиксированном $t$ к точному решению (2), т.е. $\|u_n-\overline{u}\,\|_{0H_u}\to 0$, $n\to\infty$, где $\overline{u}$ — точное решение уравнения (2). Доказательство этих фактов аналогично доказательствам, приведенным в [3, 5, 6, 8, 9].

Известно [3], что для того, чтобы оператор $\mathcal{A}$, действующий из $W_{2t}^{-1}\big(H_r;[0,t]\big)$ в $L_2\big(H_u;[0,t]\big)$ и определяемый выражением $\mathcal{A}g \equiv \sum\limits_{i=1}^\infty y_i(\tau)e_i$, $g\in W_{2t}^{-1}\big(H_r;[0,t]\big)$, был непрерывным, необходимо и достаточно, чтобы вектор $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(\tau) = \big(y_1(\tau),y_2(\tau),\dots,y_i(\tau),\dots\big)$ имел вид: $\boldsymbol{y}(\tau) = \int\limits_0^\tau H(\tau,s)\boldsymbol{\vartheta}(s)\,ds$, где $H(\tau,s)$ — бесконечная матрица с элементами $h_{ij}(\tau,s)$, принадлежащими по аргументу $s$ позитивному пространству $W_2^1[0,t]$, а $\boldsymbol{\vartheta}^{\mathrm{T}}(\tau) = \big(\vartheta_1(\tau),\vartheta_2(\tau),\dots,\vartheta_i(\tau),\dots\big)$ — вектор с координатами из $W_2^{-1}\big([0,t]\big)$. Напомним, что если оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве имеет матричное представление, то он ограничен [3, 4].

**Лемма 1**. *Для почти всех значений* $t<\infty$ *справедливо равенство* $\lim\limits_{n\to\infty} M\Big[\big\|u_n(t)-u(t)\big\|^2_{0H_u}\Big]=0$, *где* $u_n(t)=\sum\limits_{i=1}^n x_i(\tau)e_i$, *а* $u(\tau)$ *— решение уравнения* (2) *в точке* $\tau=t$.

**Доказательство.** Используя неравенства $\|\mathcal{L}u\|_{-1tu}\geqslant c\|\,u\,\|_{0H_u}$, $\|\mathcal{L}u\|_{-1tu}\leqslant c\|\,u\,\|_{10u}$, легко показать [7], что для почти всех $\omega\in\Omega$ имеет место соотношение $\int\limits_0^t \big\|u_n(\tau)-u(\tau)\big\|^2_{H_u}\,d\tau\to 0$, $n\to\infty$. Отсюда

$M\Bigl[\int\limits_0^t \bigl\|u_n(\tau)-u(\tau)\bigr\|^2_{H_u}\,d\tau\Bigr]\to 0$, $n\to\infty$. Лемма доказана.

Уравнение Винера–Хопфа для задачи (7)–(9) можно записать следующим образом:

$$M\bigl[\boldsymbol{x}_{(n)}(t)\boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}_{(m)}(\sigma)\bigr]=\int\limits_0^t h_{mn}(t,\tau)M\bigl[\boldsymbol{r}_{(m)}(\tau)\boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}_{(m)}(\sigma)\bigr]\,d\tau.$$

Регуляризованное уравнение имеет вид

$$M\bigl[\boldsymbol{x}_{(n)}(t)\boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}_{(m)}(\sigma)\bigr]=\int\limits_0^t h^\alpha_{mn}(t,\tau)M\bigl[\boldsymbol{r}_{(m)}(\tau)\boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}_{(m)}(\sigma)\bigr]\,d\tau+\alpha h^\alpha_{mn}(t,\sigma). \qquad (10)$$

Представим корреляционную матрицу $M\bigl[\boldsymbol{x}_{(n)}(t)\boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}_{(m)}(\sigma)\bigr]$ в виде бесконечной матрицы

$$K_{nm}(t,\sigma)=\begin{bmatrix} M\bigl[\boldsymbol{x}_{(n)}(t)\boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}_{(m)}(\sigma)\bigr] & 0 & \dots\\ 0 & 0 & \dots\\ \dots & \dots & \dots\end{bmatrix}.$$

Эта матрица задает над пространством $W^{-1}_{2t}\bigl(H_r;[0,t]\bigr)$ линейный непрерывный оператор, действующий из $W^{-1}_{2t}\bigl(H_r;[0,t]\bigr)$ в $L_2\bigl(H_u;[0,t]\bigr)$ [3, 5]. Обозначим этот оператор через $\mathcal{R}_{nm}$.

Аналогично, бесконечная матрица $K_{mm}(\tau,\sigma)$, построенная по $M\bigl[\boldsymbol{r}_{(m)}(\tau)\boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}_{(m)}(\sigma)\bigr]$, задает линейный оператор $\mathcal{R}_{mm}$, действующий из $W^{-1}_{2t}\bigl(H_r;[0,t]\bigr)$ в $L_2\bigl(H_u;[0,t]\bigr)$.

Пусть $H^\alpha_{mn}(t,\sigma)=\begin{bmatrix} h^\alpha_{mn}(t,\sigma) & 0 & \dots\\ 0 & 0 & \dots\\ \dots & \dots & \dots\end{bmatrix}$. Тогда с использованием бесконечных матриц уравнение (10) можно записать в виде $K_{nm}(t,\sigma)=\int\limits_0^t H^\alpha_{mn}(t,\tau)K_{mm}(\tau,\sigma)\,d\tau+\alpha H^\alpha_{mn}(t,\sigma)$, или в операторной форме

$$\mathcal{A}^\alpha_{mn}\mathcal{R}_{mm}+\alpha\mathcal{A}^\alpha_{mn}=\mathcal{R}_{nm}, \qquad (11)$$

где $\mathcal{A}^\alpha_{mn}$ — искомый оператор, определяемый матрицей $H^\alpha_{mn}(t,\sigma)$.

Покажем, что решение уравнения (11) задает приближенное решение уравнения (6).

**Лемма 2**. *Справедливо соотношение* $\lim\limits_{n,m\to\infty}\|\mathcal{R}_{ur}-\mathcal{R}_{nm}\|=0$.

**Доказательство.** Для почти всех $t<\infty$ и элементов $\varphi\in W^{-1}_{2t}\bigl(H_r;[0,t]\bigr)$ и $\psi\in L_2\bigl(H_u;[0,t]\bigr)$, таких, что $\|\varphi\|_{-1tr}\neq 0$, $\|\psi\|_{0H_u}\neq 0$, имеем $\|\mathcal{R}_{ur}-\mathcal{R}_{nm}\|=\sup\limits_{\varphi,\psi}\left\{\dfrac{\Bigl|\bigl([\mathcal{R}_{ur}-\mathcal{R}_{nm}]\varphi,\psi\bigr)_{0H_u}\Bigr|}{\|\varphi\|_{-1tr}\|\psi\|_{0H_u}}\right\}$.

Числитель в правой части этого равенства представим в виде

$$\Bigl|\bigl([\mathcal{R}_{ur}-\mathcal{R}_{nm}]\varphi,\psi\bigr)_{0H_u}\Bigr|=\Bigl|M\bigl[(u,\psi)_{0H_u}(r,\varphi)_{-1tr}-(u_n,\psi)_{0H_u}(\boldsymbol{r}_m,\varphi)_{-1tr}\bigr]\Bigr|.$$

Применяя обобщенное неравенство Коши–Буняковского [10], находим, что

$$\Bigl|\bigl([\mathcal{R}_{ur}-\mathcal{R}_{nm}]\,\varphi,\psi\bigr)_{0H_u}\Bigr|\leqslant$$
$$\leqslant\left|\Bigl(M\bigl[\,\|u-u_n\|^2_{0H_u}\bigr]\,M\bigl[\,\|r\|^2_{-1tr}\bigr]\Bigr)^{1/2}+\Bigl(M\bigl[\,\|u_n\|^2_{0H_u}\bigr]\,M\bigl[\,\|r-\boldsymbol{r}_m\|^2_{-1tr}\bigr]\Bigr)^{1/2}\right|\|\varphi\|_{-1tr}\,\|\psi\|_{0Q}.$$

Из леммы 1 следует, что первое слагаемое в правой части при $n\to\infty$ стремится к 0. Покажем, что $M\bigl[\|r-\boldsymbol{r}_m\|^2_{-1tr}\bigr]\to 0$ при $m\to\infty$.

Рассмотрим норму $\|r-\boldsymbol{r}_{(m)}\|_{-1tr}$. Отметим, что здесь $r=\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{r}_m$ понимаются как бесконечные векторы. Координаты вектора $\boldsymbol{r}$ имеют вид $r_i=(r,\rho_i)_{0H_r}$, вектора $\boldsymbol{r}_{(m)}$ — $r^i_m=\begin{cases}(r,\rho_i)_{0H_r}, & i\leqslant m,\\ 0, & i>m.\end{cases}$ Кроме того, справедливо равенство $\|\boldsymbol{r} - r_{(m)}\|_{-1tr} = \|r - r_{(m)}\|_{-1tr}$, где $r$ и $r_{(m)}$ представлены обобщенными рядами Фурье $j_t^* r = \sum_{i=1}^{\infty} (j_t^* r, \rho_i)_{0H_r}\, \rho_i$, $j_t^* r_{(m)} = \sum_{i=1}^{m} (j_t^* r_{(m)}, \rho_i)_{0H_r}\, \rho_i$, где $j_t^*$ — изометрический оператор, переводящий пространство $W_{2t}^{-1}\big(H_r;[0,t]\big)$ на $L_2\big(H_r;[0,t]\big)$ [3, 5]. Тогда при $m \to \infty$ имеем

$$\|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_{(m)}\|_{-1tr} = \left\| \sum_{i=m+1}^{\infty} (j_t^* r, \rho_i)_{0H_r}\, \rho_i \right\|_{0H_r} \leqslant \sum_{i=m+1}^{\infty} \big\|(j_t^* r, \rho_i)_{0H_r}\, \rho_i\big\|_{0H_r} = \sum_{i=m+1}^{\infty} \big\|(r, \rho_i)_{0H_r}\, \rho_i\big\|_{-1tr} \to 0$$

в силу стремления к нулю остаточного члена разложения функции в ряд Фурье.

Таким образом, $M\big[\|r - r_m\|^2_{-1tG}\big] \to 0$, $m \to \infty$. Лемма доказана.

**Лемма 3.** *Для почти всех* $t < \infty$ *и* $\alpha > 0$ *имеет место соотношение* $\lim\limits_{m\to\infty} \|\mathcal{R}_r^\alpha - \mathcal{R}_{mm}^\alpha\| = 0$, *где* $\mathcal{R}_r^\alpha = \mathcal{R}_r + \alpha I \delta(\tau - \sigma)$ *и* $\mathcal{R}_{mm}^\alpha = \mathcal{R}_{mm} + \alpha I \delta(\tau - \sigma)$.

**Доказательство.** Операторы $\mathcal{R}_r^\alpha$ и $\mathcal{R}_{mm}^\alpha$ для всех $\alpha > 0$ определены на всем $W_{2t}^1\big(H_r;[0,t]\big)$. По определению операторной нормы имеем

$$\|\mathcal{R}_r^\alpha - \mathcal{R}_{mm}^\alpha\| = \sup_g \left\{ \frac{\left|\big\langle [\mathcal{R}_r^\alpha - \mathcal{R}_{mm}^\alpha] g, g \big\rangle\right|}{\|g\|_{1tr}^2}, \quad g \in W_{2t}^1\big(H_r;[0,t]\big), \quad \|g\|_{1tr} \neq 0 \right\}.$$

Оценим числитель. После несложных преобразований находим

$$\left|\big\langle [\mathcal{R}_r^\alpha - \mathcal{R}_{mm}^\alpha] g, g \big\rangle\right| = \Big| M\big[\langle r_\alpha, g\rangle^2 - \langle r_{m\alpha}, g\rangle^2\big]\Big| = \Big| M\big[\langle r_\alpha - r_{m\alpha}, g\rangle \langle r_\alpha + r_{m\alpha}, g\rangle\big]\Big|, \tag{12}$$

где $r_\alpha(\tau)$ — наблюдения, связанные с $u(\tau)$ соотношением $r_\alpha(\tau) = \mathcal{S}u + w_\alpha(\tau)$, $w_\alpha(\tau)$ — белый невырожденный шум с нулевым средним и корреляционным оператором $M\big[w_\alpha(\tau), w_\alpha(\sigma)\big] = (\mathcal{W} + \alpha I)\delta(\tau - \sigma)$. Наблюдения $r_{m\alpha}(\tau)$ строятся аналогично.

Применяя обобщенное неравенство Коши–Буняковского к правой части (12), получим

$$\left|\big\langle [\mathcal{R}_r^\alpha - \mathcal{R}_{mm}^\alpha] g, g \big\rangle\right| \leqslant \Big( M\big[\|r_\alpha - r_{m\alpha}\|^2_{-1tr}\big] M\big[\|r_\alpha + r_{m\alpha}\|^2_{-1tr}\big] \Big)^{1/2} \|g\|^2_{1tr} \to 0, \quad m \to \infty,$$

так как поведение $r_\alpha$ и $r_{m\alpha}$ такое же, как у $r$ и $r_{(m)}$ (см. доказательство леммы 2).

**Теорема 2.** *Для каждого фиксированного* $\alpha > 0$ *и почти всех* $t < \infty$ *выполняется равенство*

$$\lim_{n,m\to\infty} M\big[(z, \widehat{u}_{nm}^\alpha - \widehat{u}_\alpha)^2_{H_u}\big] = 0, \quad z \in H_u, \tag{13}$$

*где* $\widehat{u}_\alpha = \mathcal{A}_\alpha r$, $\mathcal{A}_\alpha$ *— решение уравнения* (6), *а* $\widehat{u}_{nm}^\alpha = \mathcal{A}_{mn}^\alpha r$, $\mathcal{A}_{mn}^\alpha$ *— решение уравнения* (11).

**Доказательство.** Из уравнения (11) находим, что $\mathcal{A}_{mn}^\alpha = \mathcal{R}_{nm}(\mathcal{R}_{mm} + \alpha I)^{-1}$; отсюда следует, что $\widehat{u}_{nm}^\alpha(t) = \mathcal{A}_{mn}^\alpha r = \mathcal{R}_{nm}(\mathcal{R}_{mm} + \alpha I)^{-1} r = \mathcal{R}_{nm}(\mathcal{R}_{mm}^\alpha)^{-1} r$.

Аналогично, из уравнения (6) имеем $\widehat{u}_\alpha(t) = \mathcal{A}_\alpha r = \mathcal{R}_{ur}(\mathcal{R}_r + \alpha I)^{-1} r = \mathcal{R}_{ur}(\mathcal{R}_r^\alpha)^{-1} r$. Согласно этим соотношениям математическое ожидание имеет вид

$$\begin{aligned} M\Big[\big(z, \widehat{u}_{nm}^\alpha - \widehat{u}_\alpha(t)\big)^2_{H_u}\Big] &= M\bigg[\Big(z, \mathcal{R}_{nm}(\mathcal{R}_{mm}^\alpha)^{-1}(r_{(m)} - r) + \big\{\mathcal{R}_{nm}(\mathcal{R}_{mm}^\alpha)^{-1} - \mathcal{R}_{ur}(\mathcal{R}_r^\alpha)^{-1}\big\} r\Big)^2_{H_u}\bigg] \leqslant \\ &\leqslant 2\Bigg( M\bigg[\Big(z, \mathcal{R}_{nm}(\mathcal{R}_{mm}^\alpha)^{-1}(r_{(m)} - r)\Big)^2_{H_u}\bigg] + M\bigg[\Big(z, \big\{\mathcal{R}_{nm}(\mathcal{R}_{mm}^\alpha)^{-1} - \mathcal{R}_{ur}(\mathcal{R}_r^\alpha)^{-1}\big\} r\Big)^2_{H_u}\bigg]\Bigg). \end{aligned} \tag{14}$$

Применяя неравенство Коши–Буняковского к первому слагаемому в правой части (14), согласно лемме 2 получим при $n$, $m \to \infty$, что

$$M\Big[\big(z, \mathcal{R}_{nm}(\mathcal{R}_{mm}^\alpha)^{-1}(r_{(m)} - r)\big)^2_{H_u}\Big] \leqslant \|z\|^2_{H_u} \big\|\mathcal{R}_{nm}(\mathcal{R}_{mm}^\alpha)^{-1}\big\|^2 M\big[\|r_{(m)} - r\|^2_{-1tr}\big] \to 0.$$

Оценим второе слагаемое. Прибавим и вычтем $\mathcal{R}_{nm}(\mathcal{R}_r^\alpha)^{-1}$ и после преобразований применим неравенство Коши–Буняковского. Тогда согласно леммам 2 и 3 при $n$, $m \to \infty$ получим

$$\begin{aligned} &M\bigg[\Big(z, \big\{\mathcal{R}_{nm}(\mathcal{R}_{mm}^\alpha)^{-1} - \mathcal{R}_{ur}(\mathcal{R}_r^\alpha)^{-1}\big\} r\Big)^2_{H_u}\bigg] \leqslant \\ &\qquad \leqslant 2\Big( \|z\|^2_{H_u} \|\mathcal{R}_{nm}\|^2 \big\|(\mathcal{R}_{mm}^\alpha)^{-1} - (\mathcal{R}_r^\alpha)^{-1}\big\|^2 + \big\|(\mathcal{R}_r^\alpha)^{-1}\big\|^2 \|\mathcal{R}_{km} - \mathcal{R}_{ur}\|^2 \|r\|^2_{-1tr} \Big) \to 0. \end{aligned}$$

Подставляя эти соотношения в (14), получим утверждение теоремы.

**Теорема 3.** *Для почти всех* $t < \infty$ *справедливо* $\lim\limits_{\alpha\to 0}\varliminf\limits_{n,m\to\infty} M\left[\left(z,\widehat{u}^{\alpha}_{nm}(t)-u(t)\right)^2_{H_u}\right] = m(z)$, *где* $\widehat{u}^{\alpha}_{nm}(t)$ *— решение приближенной задачи фильтрации* (7)–(9).

**Доказательство.** Прибавим и вычтем $\widehat{u}_{\alpha}(t)$ под знаком скалярного произведения и после ряда преобразований находим, что согласно теореме 2 выполнено

$$\lim_{\alpha\to 0}\varliminf_{n,m\to\infty} M\left[\left(z,\widehat{u}^{\alpha}_{nm}(t)-u(t)\right)^2_{H_u}\right] \leqslant \lim_{\alpha\to 0}\Biggl(\varliminf_{n,m\to\infty} M\left[\left(z,\widehat{u}^{\alpha}_{nm}(t)-\widehat{u}_{\alpha}(t)\right)^2_{H_u}\right] +$$
$$+\,2\Biggl\{\varliminf_{n,m\to\infty} M\left[\left(z,\widehat{u}^{\alpha}_{nm}(t)-\widehat{u}_{\alpha}(t)\right)^2_{H_u}\right] M\left[\left(z,\widehat{u}_{\alpha}(t)-u(t)\right)^2_{H_u}\right]\Biggr\}^{1/2} + M\left[\left(z,\widehat{u}_{\alpha}(t)-u(t)\right)^2_{H_u}\right]\Biggr) = m(z).$$

Таким образом, доказана сходимость решения приближенной регуляризованной задачи линейной фильтрации к решению исходной задачи.

Приведем алгоритм решения приближенной задачи линейной оптимальной фильтрации (7)–(9), основанный на построении последовательности регуляризованных оценок, полученных с помощью фильтра Калмана–Бьюси.

Обозначим через $\chi(\tau)$ вектор с координатами $\chi_i(\tau) = \begin{cases} x_i(\tau) & \text{при } i\leqslant n, \\ dx_{i-n}(\tau)/d\tau & \text{при } k < i \leqslant 2n. \end{cases}$ Пусть $F_{2n} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ F & 0 \end{bmatrix}$, где $I$ — единичная матрица порядка $n$; $\zeta(\tau)$ — вектор с координатами $\zeta_i(\tau)=0$ при $i=1,2,\ldots,n$ и $\zeta_i(\tau) = (v, e_{i-n})_{0H_u}$ при $i=n+1,n+2,\ldots,2n$, и пусть $\overline{C}$ — матрица размерности $m\times 2n$, $\overline{C} = [C\ \overline{0}]$, где $\overline{0}$ — нулевая матрица размера $m\times n$.

С учетом введенных обозначений задачу линейной оптимальной фильтрации можно сформулировать в следующем виде.

Векторный случайный процесс $\chi(\tau)$ моделируется системой

$$\frac{d\chi(\tau)}{d\tau} = F_{2n}\chi(\tau)+\zeta(\tau), \quad \chi(0) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_0 \\ \boldsymbol{x}_{10} \end{bmatrix}, \tag{15}$$

где $\zeta(\tau)$ — белый вырожденный шум.

Наблюдается процесс $\left\{\boldsymbol{r}_{(m)}(\tau),\ 0\leqslant\tau\leqslant t\right\}$, связанный с $\chi(\tau)$ соотношением

$$\boldsymbol{r}_{(m)}(\tau) = \overline{C}\chi(\tau)+\boldsymbol{w}_{(m)}(\tau). \tag{16}$$

Требуется найти последовательность оценок $\left\{\widehat{\chi}^{\,\alpha}(\tau)\right\}_{\alpha>0}$ процесса $\chi(\tau)$ в момент $\tau=t$, удовлетворяющую критерию

$$\lim_{\alpha\to 0}\left\{M\left[\left(z,\chi(t)-\mathcal{H}^{\alpha}\boldsymbol{r}_{(m)}(t)\right)^2_{E_{2n}}\right] - \inf_{\mathcal{H}} M\left[\left(z,\chi(t)-\mathcal{H}\boldsymbol{r}_{(m)}(t)\right)^2_{E_{2n}}\right]\right\} = 0, \tag{17}$$

где нижняя грань берется по всем линейным операторам $\mathcal{H}$, действующим из пространства наблюдений в пространство состояний, $\mathcal{H}$ определяется соотношением $\mathcal{H}\boldsymbol{r}_{(m)} = \int\limits_0^t h(t,\tau)\boldsymbol{r}_{(m)}(\tau)\,d\tau$, $\widehat{\chi}^{\,\alpha}(t) = \mathcal{H}^{\alpha}\boldsymbol{r}_{(m)} = \int\limits_0^t \widehat{h}^{\,\alpha}(t,\tau)\boldsymbol{r}_{(m)}(\tau)\,d\tau$, матрица $\widehat{h}^{\,\alpha}(t,\tau)$ удовлетворяет уравнению

$$M\left[\chi(t)\boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}_{m}(\sigma)\right] = \int\limits_0^t \widehat{h}^{\,\alpha}(t,\tau)\overline{C}(\tau)M\left[\chi(\tau)\chi^{\mathrm{T}}(\sigma)\overline{C}^{\mathrm{T}}(\sigma)\right]d\tau + \widehat{h}^{\,\alpha}(t,\sigma)S_{\alpha}(\sigma), \tag{18}$$

а $S_{\alpha}(\sigma) = W_{(m)}(\sigma)+\alpha I_m$, $I_m$ — единичная матрица порядка $m$; $z$ — произвольный вектор из $E_{2n}$.

Имеют место следующие статистики:

$$M[\boldsymbol{x}_0] = 0, \quad M[\boldsymbol{x}_0\boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}}] = P_0, \quad P_0^{ij} = (\mathcal{U}_0 e_i, e_j)_{0H_u}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n;$$
$$M[\boldsymbol{x}_{10}] = 0, \quad M[\boldsymbol{x}_{10}\boldsymbol{x}_{10}^{\mathrm{T}}] = P_{10}, \quad P_{10}^{ij} = (\mathcal{U}_1 e_i, e_j)_{0H_u}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n;$$
$$M\big[\zeta(\tau)\big] = 0, \quad M\Big[\zeta(\tau)\big(\zeta(\sigma)\big)^{\mathrm{T}}\Big] = Q(\tau)\delta(\tau-\sigma), \quad Q_{ij}(\tau) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & V_{(n)}(\tau) \end{bmatrix},$$
$$M\big[\chi(0)\big] = 0, \quad M\big[\chi(0)\chi^{\mathrm{T}}(0)\big] = \begin{bmatrix} P_0 & 0 \\ 0 & P_{10} \end{bmatrix}, \quad M\big[\chi(0)\zeta^{\mathrm{T}}(\tau)\big] = M\big[\chi(0)\boldsymbol{w}_{(m)}^{\mathrm{T}}(\tau)\big] = M\big[\boldsymbol{w}_{(m)}(\tau)\zeta^{\mathrm{T}}(\sigma)\big] = 0.$$

Запишем матрицу $\widehat{h}^{\,\alpha}(t,\tau)$ в виде $\widehat{h}^{\,\alpha}(t,\tau) = \begin{bmatrix} h_{1mn}^{\alpha}(t,\tau) \\ h_{2mn}^{\alpha}(t,\tau) \end{bmatrix}$, где $h_{1mn}^{\alpha}(t,\tau)$ и $h_{2mn}^{\alpha}(t,\tau)$ — матрицы размера $n \times m$. Тогда уравнение Винера–Хопфа (18) можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} M\big[\boldsymbol{x}_{(n)}(t)\boldsymbol{r}_{(m)}^{\mathrm{T}}(\sigma)\big] &= \int\limits_0^t h_{1mn}^{\alpha}(t,\tau)C(\tau)M\big[\boldsymbol{x}_{(n)}(\tau)\boldsymbol{x}_{(n)}^{\mathrm{T}}(\sigma)C^{\mathrm{T}}(\sigma)\big]\,d\tau + h_{1mn}^{\alpha}(t,\sigma)S_{\alpha}(\sigma), \\ M\big[\boldsymbol{x}_{(n)}(t)\boldsymbol{r}_{(m)}^{\mathrm{T}}(\sigma)\big] &= \int\limits_0^t h_{2mn}^{\alpha}(t,\tau)C(\tau)M\big[\boldsymbol{x}_{(n)}(\tau)\boldsymbol{x}_{(n)}^{\mathrm{T}}(\sigma)C^{\mathrm{T}}(\sigma)\big]\,d\tau + h_{2mn}^{\alpha}(t,\sigma)S_{\alpha}(\sigma). \end{aligned} \tag{19}$$

Интегральные уравнения в (19) независимы и первое уравнение совпадает с уравнением Винера–Хопфа (10) для задачи (7)–(9), т.е. решение $h_{1mn}^{\alpha}$ совпадает с $h_{mn}^{\alpha}$. Следовательно, оценка состояния $\widehat{\boldsymbol{x}}_{(n)}^{\alpha}(t)$ системы (7)–(9) равна первым $n$ координатам вектора $\widehat{\chi}^{\,\alpha}(t)$ — решения задачи (15)–(17), которое удовлетворяет уравнению $\dfrac{d\widehat{\chi}^{\,\alpha}(\tau)}{d\tau} = F(\tau)\widehat{\chi}^{\,\alpha}(\tau) + P(\tau)\overline{C}^{\,\mathrm{T}}(\tau)S_{\alpha}^{-1}(\tau)\big[r_m(\tau) - \overline{C}(\tau)\widehat{\chi}^{\alpha}(\tau)\big]$, $\widehat{\chi}^{\,\alpha}(0) = 0$, $0 \leqslant \tau \leqslant t < \infty$, где $P(\tau)$ — решение уравнения Риккати

$$\frac{dP(\tau)}{d\tau} = F(\tau)P(\tau) + P(\tau)F^{\mathrm{T}}(\tau) + Q(\tau) - P(\tau)\overline{C}^{\mathrm{T}}(\tau)S_{\alpha}^{-1}(\tau)\overline{C}(\tau)P(\tau), \quad P(0) = \begin{bmatrix} P_{10} & 0 \\ 0 & P_0 \end{bmatrix}.$$

Обоснование алгоритма решения задачи (15)–(17) дано в [3, 5]. Параметр регуляризации выбирается согласно одному из методов, приведенных в [1–3, 5].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986.
2. *Морозов В.А.* Регулярные методы решения некорректно поставленных задач. М.: Наука, 1987.
3. *Ляшко И.И., Диденко В.П., Цитрицкий О.Е.* Фильтрация шумов. Киев: Наукова думка, 1979.
4. *Березанский Ю.М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Киев: Наукова думка, 1965.
5. *Колос И.В., Колос М.В.* Методы оптимальной линейной фильтрации. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2001.
6. *Колос И.В., Колос М.В.* О разрешимости обобщенной задачи Дирихле для гиперболического уравнения // Вычислительные методы и программирование. 2002. **3**, № 2. 68–78.
7. *Колос И.В., Колос М.В.* О решении линейной задачи фильтрации для гиперболических систем // Вычислительные методы и программирование. 2003. **4**, № 2. 116–126.
8. *Колос И.В., Колос М.В.* О приближенном решении обобщенной смешанной краевой задачи для уравнений параболического и гиперболического типов // Вычислительные методы и программирование. 2004. **5**, № 2. 149–161.
9. *Колос И.В., Колос М.В.* О приближенном решении одной обобщенной краевой задачи для уравнений гиперболического типа с вырождением // Вычислительные методы и программирование. 2005. **6**, № 2. 160–166.
10. *Соболев С.Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988.


Поступила в редакцию
07.09.2006