

УДК 519.633.9

**ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ О ЦЕНТРАЛЬНОМ СЕЧЕНИИ
НА ЗАДАЧУ ВЕЕРНОЙ ТОМОГРАФИИ****В. В. Пикалов¹, Д. И. Казанцев¹, В. П. Голубятников²**

Для задач малоракурсной томографии необходимо применять итерационные алгоритмы, использующие максимум априорной информации об исследуемом объекте. Один из хорошо развитых для параллельной геометрии алгоритмов — это алгоритм Гершберга–Папулиса, использующий попеременно итерации в пространствах изображения и его Фурье-образа. Перенос этого алгоритма на веерную постановку задачи томографии мешает отсутствие соответствующей теоремы о центральном сечении, которая бы связывала Фурье-образы веерных проекций с Фурье-образом объекта. В данной работе формулируется такая связь и приводятся примеры ее использования.

1. Введение. В прикладных задачах томографической диагностики физических или биологических объектов, а также в задачах неразрушающего контроля промышленных изделий одна из основных проблем — получение достаточного числа направлений регистрации проекционных данных [1]. При обработке соответствующих экспериментальных данных с малым числом проекций стандартные алгоритмы томографии дают значительные погрешности, проявляющиеся в большой амплитуде артефактов. Соответственно, для таких задач малоракурсной томографии необходимо применять итерационные алгоритмы, использующие максимум априорной информации об исследуемом объекте [2–6]. Один из хорошо развитых для параллельной геометрии малоракурсных алгоритмов — алгоритм Гершберга–Папулиса, попеременно использующий итерации в пространствах изображения и его Фурье-образа [7–11]. Перенос этого алгоритма на веерную постановку задачи томографии мешает отсутствие соответствующей теоремы о центральном сечении, которая бы связывала Фурье-образы веерных проекций с Фурье-образом объекта. В данной работе формулируется такая связь и приводятся примеры ее использования. Основные идеи данной работы были кратко доложены [12] на 4-м Всемирном конгрессе по индустриальной томографии в Аидзу, Япония, сентябрь 2005 г.

2. Теория. В основе предлагаемого подхода лежит хорошо известное в проективной геометрии нелинейное координатное преобразование, переводящее задачу веерной томографии в задачу параллельной томографии, но для деформированного пространства, причем для каждого ракурса наблюдения такая деформация — своя. Полученные в обычном пространстве веерные проекции являются для нового деформированного пространства уже параллельными, и, соответственно, для них работает теорема о центральном сечении в деформированном пространстве. Поскольку деформации различны для разных ракурсов, после использования в этом деформированном пространстве тех или иных характеристик соответствующей проекции перед переходом к следующему ракурсу необходимо выполнить обратное преобразование к исходному пространству. Данный подход позволяет обобщить на веерную томографию такие итерационные алгоритмы параллельной томографии, как алгоритм Гершберга–Папулиса (ГП) [7–11], ART, а также классический алгоритм фильтрованного обратного проецирования (ФОП) [4, 13]. Правда, в последнем случае мы получаем классический ФОП-алгоритм для веерной томографии, только лишь в иной интерпретации [14].

Рассмотрим стандартную схему двумерной веерной томографии (рис. 1). Здесь область определения неизвестной функции $g(x, y)$ содержится внутри единичного круга $x^2 + y^2 < R = 1$. Источник веерных лучей E движется по окружности $x(\beta) = -D \sin \beta$, $y(\beta) = D \cos \beta$, где D — расстояние источника до оси абсцисс в повернутой на угол β системе координат, а детекторы расположены на прямой линии $D_1 - D_2$ (см. рис. 1). Каждый луч в веере для фиксированного угла β можно охарактеризовать углом γ к центральному лучу. Ясно, что зарегистрированный сигнал на линейке детекторов $D_1 - D_2$ можно рассматривать и на прямой $D'_1 - D'_2$, которую назовем виртуальным детектором.

¹ Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, ул. Институтская, 4/1, 630090, Новосибирск; e-mail: pickalov@itam.nsc.ru; www.itam.nsc.ru/lab17

² Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, пр. Коптюга, 4, 630090, Новосибирск; e-mail: glbntn@math.nsc.ru

Пусть (s, p) — новая система координат, повернутая на угол β к исходной системе (x, y) ; введем “деформирующее преобразование”

$$u = \frac{s}{1 - p/D} = \frac{s}{Q}; \quad v = p. \quad (1)$$

При таком преобразовании система веерных лучей в координатах (x, y) перейдет в систему прямых лучей в координатах (u, v) , параллельных координатной оси v . Однако и исходное изображение $g(x, y)$ будет деформировано в зависящее от угла β новое изображение $g(X(u, v), Y(u, v))$, где

$$\begin{aligned} x &= X(u, v) = u \left(1 - \frac{v}{D}\right) \cos \beta - v \sin \beta; \\ y &= Y(u, v) = u \left(1 - \frac{v}{D}\right) \sin \beta + v \cos \beta. \end{aligned} \quad (2)$$

Обозначим через $u = U(x, y), v = V(x, y)$ обратную замену переменных в (2). Отметим, что измеренный сигнал становится нулевым для $|p| \geq \frac{D}{\sqrt{D^2 - 1}}$.

В наших обозначениях (см. также [6, 15]), веерная проекция может быть выражена следующим образом (здесь r, ϕ — полярные координаты точки (x, y) , q, θ — нормальные координаты веерного луча (рис. 1), проходящего через эту точку):

$$f_\beta(u) = \iint \delta(q - U(x, y)) g(x, y) dx dy = \int \frac{1}{\cos \gamma(u)} g(X(u, v), Y(u, v)) dv. \quad (3)$$

Отметим, что якобиан преобразования в (3) равен $|(1 - v/D)| = |Q|$; его можно сократить со множителем Q^{-1} ($Q > 0$), вынесенным из-под знака дельта-функции ($\theta = \beta + \gamma$):

$$\begin{aligned} \delta(q - U) &= \delta(q - r \cos(\theta - \phi)) = \delta\left(D \sin \gamma - \cos \gamma [r \cos(\beta - \phi) - \operatorname{tg} \gamma r \sin(\beta - \phi)]\right) = \\ &= \frac{1}{\cos \gamma} \delta\left(u \left(1 + \frac{r \sin(\beta - \phi)}{D}\right) - r \cos(\beta - \phi)\right) = \frac{1}{\cos \gamma} \delta(uQ - r \cos(\beta - \phi)) = \frac{1}{Q \cos \gamma} \delta(u - u'), \end{aligned} \quad (4)$$

где $u' = \frac{r \cos(\beta - \phi)}{Q} = \frac{s}{Q}$. Обозначим подынтегральную функцию $g(u, v)$ в интеграле (3) через $h_\beta(u, v)$, и пусть $f'_\beta(u) = f_\beta(u) \cos \gamma(u)$. После Фурье-преобразования функции $f'_\beta(u)$ получим

$$\tilde{f}'_\beta(\nu_u) = \int \exp(-2\pi i \nu_u u) du \int h(u, v) dv = \tilde{h}_\beta(\nu_u, \nu_v)|_{\nu_v=0}.$$

Таким образом, теорема о центральном сечении теперь выражена в новой системе координат (u, v) , полученной из исходной нелинейным преобразованием переменных (1). Это преобразование является взаимно-однозначным между областями определения неизвестной функции $g(x, y)$ и деформированной функции $h_\beta(u, v)$. Иными словами, Фурье-образ модифицированной веерной проекции (т.е. умноженной на косинус угла падения каждого луча в веере) совпадает с центральным сечением двумерного Фурье-образа деформированного объекта $h_\beta(u, v)$. Это и понятно, поскольку в деформированной системе координат схема наблюдения стала параллельной. Еще раз подчеркнем, что для каждого ракурса наблюдения β деформация объекта будет своя.

3. Численное моделирование. На рис. 2 приведен численный пример, иллюстрирующий теорему о центральном сечении для веерных проекций. Здесь математический фантом состоял из эллиптической

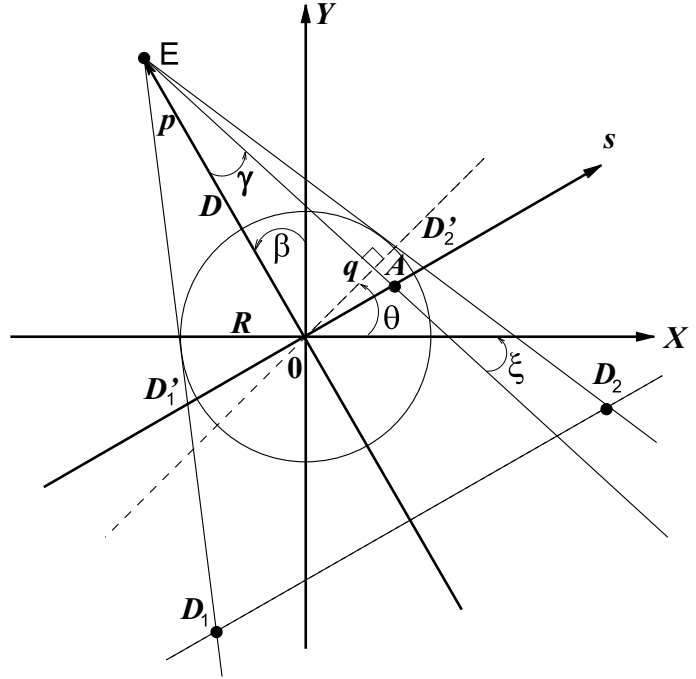


Рис. 1. Формирование проекции на плоском детекторе в схеме веерной томографии

гауссианы $g(x, y) = \exp \left\{ -4 \ln 2 \left(\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} \right) \right\}$ с двумерным Фурье-преобразованием

$$\tilde{g}(\nu_x, \nu_y) = \frac{\pi ab}{4 \ln 2} \exp \left[-\frac{\pi^2}{4 \ln 2} (a^2 \nu_x^2 + b^2 \nu_y^2) - 2\pi i (\nu_x x_0 + \nu_y y_0) \right].$$

Параметры расчета: $a = 0.4$, $b = 0.2$, $\beta = 10^0$, $x_0 = 0.2$, $y_0 = 0$, $D = 1.2$.

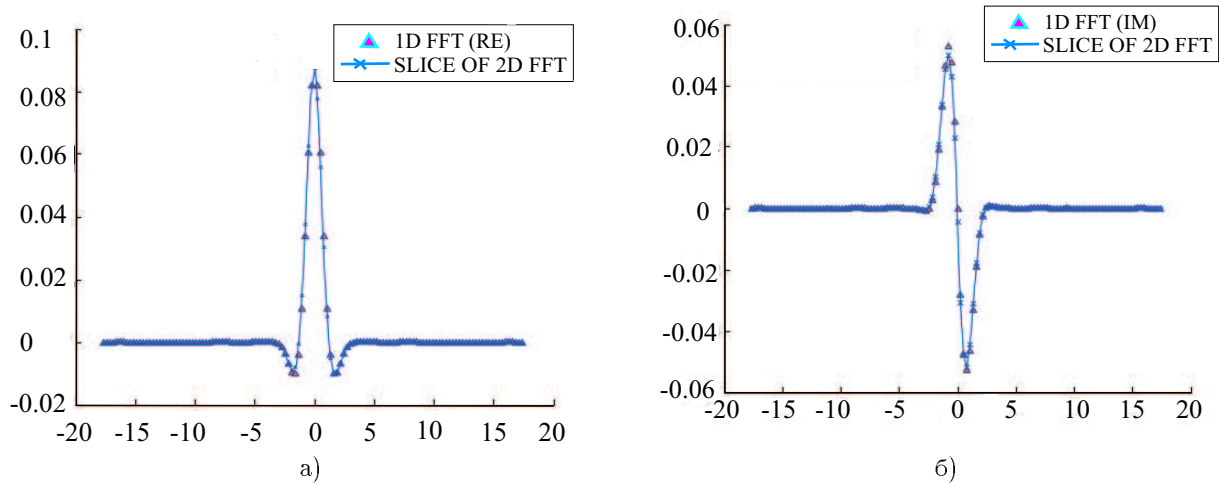


Рис. 2. Сравнение одномерного Фурье-преобразования модифицированной веерной проекции с сечением двумерного Фурье-преобразования эллиптической гауссианы, повернутой на 10° :
а) действительная часть; б) мнимая часть

На рис. 3 показана реконструкция фантома № 54 из библиотеки пакета Tomax-Micro [6] (реконструкция одним из алгоритмов пакета) и результат деформации этой томограммы, угол $\beta = 0$. Здесь фокальная точка находится на оси Y снизу, фокальное расстояние $D = 1.61$.

На рис. 4 показан процесс перехода “вклеенных” в деформированный объект (фантом № 16 из библиотеки пакета Tomax-Micro [6]) параллельных линий наблюдения в систему веерных лучей при обратном преобразовании от координат (u, v) к координатам (x, y) . Здесь также угол $\beta = 0$, фокальная точка находится на оси Y снизу, фокальное расстояние $D = 1.61$. Радиус вписанного в квадрат изображения на рис. 4б внешнего круга равен 1.2275, что совпадает с половиной длины виртуального детектора.

После установления теоремы о центральном сечении для веерных проекций вполне естественно можно получить и обобщение алгоритма Гершберга–Папулиса с параллельной томографии [6, 16] на веерную, например следующим образом.

Шаг 1. По заданному набору веерных проекций (скорректированных на косинус угла падения) с помощью быстрого преобразования Фурье (БПФ) получается набор их одномерных Фурье-образов. По теореме о центральном сечении эти величины дают в полярной системе координат в Фурье-пространстве деформированной томограммы значения спектра на K лучах (и K деформациях). Значения спектральных амплитуд полагаются равными нулю вне указанных лучей.

Шаг 2. Выполняется обратное двумерное БПФ для получения оценки томограммы после ее обратной деформации $g_\beta^i(x, y)$.

Шаг 3. В получившуюся оценку вносится априорная информация о положительности решения и его пространственной ограниченности.

Шаг 4. Выполняется прямое двумерное БПФ от оценки деформированной томограммы $g_\beta^i(x, y)$ после шага 3. Значения спектра на лучах, определенных на шаге 1, заменяются на значения, определенные там же непосредственно по веерным проекциям. Вносится также априорная информация о спектре объекта, проводится его сглаживание, согласование с уровнем шума в измерениях.

Шаг 5. Проверяются критерии окончания итерационного процесса. Если они не выполняются, то осуществляется переход на шаг 2.

4. Заключение. Авторы работ [17, 18] ставят вопрос о выводе теоремы о центральном сечении и ее применении для определения совместности веерных проекций. Однако они используют иной подход, в частности, вводят локальное Фурье-преобразование в плавающей для каждого ракурса системе координат. Как следствие, новая теорема о центральном сечении в веерной постановке задачи томографии

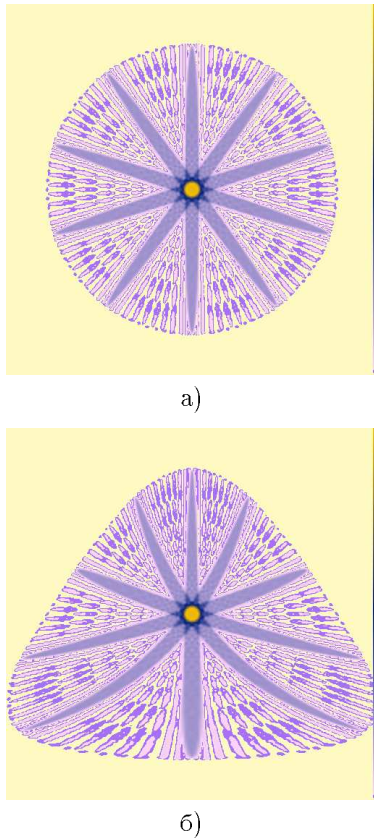


Рис. 3. Пример деформации модели № 54; а) исходное изображение; б) результат его деформации, $\beta = 0$

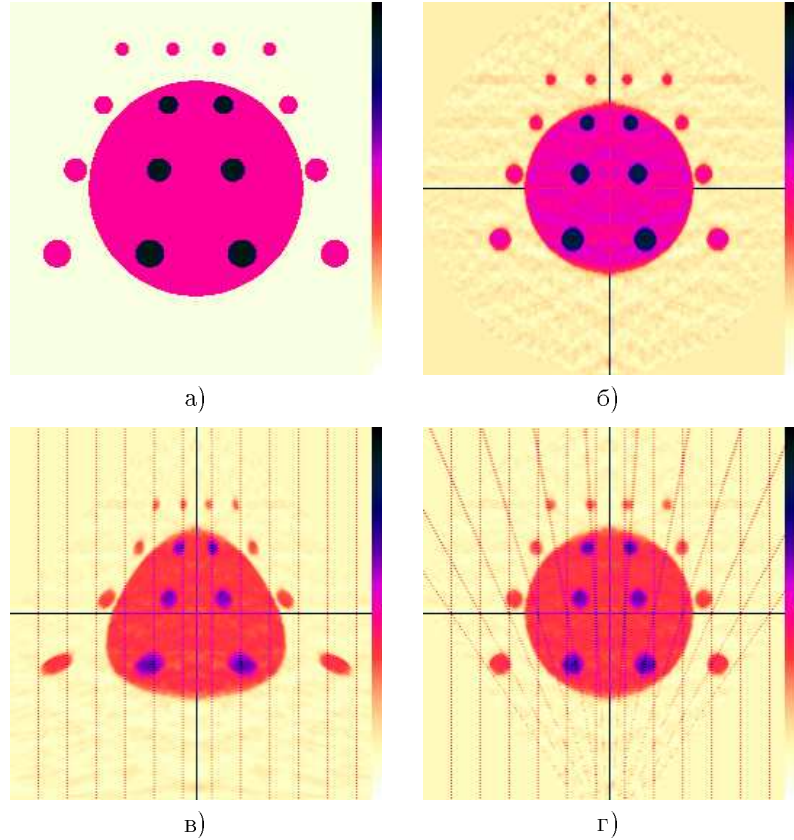


Рис. 4. Пример деформации модели № 16; а) исходное изображение; б) реконструкция фантома одним из алгоритмов пакета Torgas-Micro; в) результат прямой деформации, $\beta = 0$; г) обратная деформация изображения (в) вместе со встроенными в него параллельными прямыми

формулируется ими как набор правил по использованию Фурье-образа проекции, конечным результатом которых будет получение Фурье-образа томограммы в полярной системе координат. Как такового, сечения в Фурье-пространстве у них не получается, что специально подчеркивается авторами как главное отличие от параллельной схемы. В нашем подходе естественным образом получено сечение — центральное сечение деформированной томограммы, совпадающее с Фурье-образом веерной проекции (умноженной на косинус угла падения луча на детектор). Процедура обратной деформации легко выполняется для любого положения фокальной точки, что позволяет обобщить операцию обратного проецирования на любую траекторию источника (в этом случае параметр D в формуле (1) становится функцией угла β). Операция обратного проецирования, которую здесь необходимо выполнить по параллельным прямым в деформированном пространстве, является составной частью разных классов томографических алгоритмов (ART, максимума энтропии — MENT, SIRT, Гершберга-Папулиса и т.д.). Тем самым, с помощью рассмотренного в данной работе нелинейного преобразования пространства томограммы все эти алгоритмы легко обобщаются на веерную томографию. Отметим, что аналогичной деформацией трехмерного пространства можно также перевести задачу лучевой конической (либо бифокальной [19]) трехмерной томографии к задаче лучевой параллельной (также трехмерной) томографии на произвольных траекториях.

Работа частично поддержана грантами РФФИ (коды проектов 04-01-00235, 04-01-04003-ННИО), а также грантом 8526.2006.1 Президента РФ для поддержки ведущих научных школ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пикалов В.В., Преображенский Н.Г. Вычислительная томография и физический эксперимент // УФН. 1983. 141, № 3. 469-498.
2. Преображенский Н.Г., Пикалов В.В. Неустойчивые задачи диагностики плазмы. Новосибирск: Наука, 1982.
3. Deans S.R. The Radon transform and some of its applications. New York: John Wiley, 1983.

4. *Хермен Г.* Восстановление изображений по проекциям. Основы реконструктивной томографии. М.: Мир, 1983.
5. *Пикалов В.В., Преображенский Н.Г.* Реконструктивная томография в газодинамике и физике плазмы. Новосибирск: Наука, 1987.
6. *Пикалов В.В., Мельникова Т.С.* Томография плазмы. Новосибирск: Наука, 1995.
7. *Sato T., Norton S.J., Linzer M.J., Ikeda U., Hirama M.* Tomographic image reconstruction from limited projections using iterative revisions in image and transform spaces // *Applied Optics*. 1981. **20**, N 3. 395–399.
8. *Tam K.C.* The use of multispectral imaging in limited-angle reconstruction // *IEEE Trans. Nucl. Sci.* 1982. **29**, N 1. 512–515.
9. *Defrise M., De Mol C.* A regularized iterative algorithm for limited-angle inverse Radon transform // *Optica Acta*. 1983. **30**, N 4. 403–408.
10. *Вишняков Г.Н., Гильман Г.А., Левин Г.Г.* Восстановление томограмм при ограниченном числе проекций. Итерационные методы // *Опт. спектр.* 1985. **58**, № 2. 406–413.
11. *Пикалов В.В., Лихачев А.В.* Применение метода Гершберга–Папулиса в трехмерной доплеровской томографии // *Вычислительные методы и программирование*. 2004. **5**, № 2. 27–34.
12. *Pickalov V.V., Kazantzev D.I., Ayupova N.B., Golubyatnikov V.P.* Considerations on iterative algorithms for fan-beam tomography scheme // *Proc. 4-th World Congress on Industrial Process Tomography*. Aizu, Japan, 5–8 September 2005. **2**. 2005. 687–690.
13. *Natterer F., Wubbeling F.* Mathematical methods in image reconstruction. Philadelphia: SIAM, 2001.
14. *Kak A.C., Slaney M.* Principles of computerized tomographic imaging. New York: IEEE Press, 1988.
15. *Minerbo G.* Maximum entropy reconstruction from cone-beam projection data // *Comput. Biol. Med.* 1979. **9**, N 1. 29–37.
16. *Пикалов В.В., Непомнящий А.В.* Итерационный алгоритм с вейвлет-фильтрацией в задаче двумерной томографии // *Вычислительные методы и программирование*. 2003. **4**, № 2. 75–84.
17. *Chen G.-H., Leng S., Mistretta C.A.* A novel extension of the parallel-beam projection-slice theorem to divergent fan-beam and cone-beam projections // *Medical Physics*. 2005. **32**, N 3. 654–665.
18. *Chen G.-H., Leng S.* A new data consistency condition for fan-beam projection data // *Medical Physics*. 2005. **32**, N 4. 961–967.
19. *Likhachov A.V., Pickalov V.V.* Modification of Feldkamp algorithm for bifocal tomography // *Automation, Control, and Information Technology (Proc. IASTED Int. Conf., June 10–13, 2002, Novosibirsk, Russia)*. Anaheim: ACTA Press, 2002. 474–479.

Поступила в редакцию
26.05.2006
