

УДК 517.958

**ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ В ОПТИЧЕСКОМ ДИАПАЗОНЕ****И. П. Яровенко<sup>1</sup>**

В работе рассматривается процесс переноса излучения в рассеивающей и поглощающей многослойной системе, состоящей из материалов с различными оптическими свойствами. На границах раздела материалов ставятся условия сопряжения, учитывающие преломление и отражение по законам Френеля. Предложен численный метод решения прямой задачи для уравнения переноса, описывающего данный процесс. Рассматривается обратная задача определения неизвестного показателя преломления по заданным значениям светового потока, выходящего из среды. Приводятся результаты численных экспериментов по ее решению. Работа выполнена при поддержке РФФИ (коды проектов 04-01-00126, 05-07-90055).

**1. Введение.** Рассмотрим процесс распространения монохроматического неполяризованного излучения видимого спектра в слоистой среде. Общепризнанной моделью для описания данного процесса является система уравнений Максвелла, которая в рассматриваемом случае сводится к системе уравнений первого порядка [3]. В настоящее время имеется огромное количество работ по данной тематике, однако авторы достаточно часто пренебрегают рассеянием излучения на частицах среды (атомах, молекулах и других микронеоднородностях). Данное обстоятельство приводит к потере адекватности модели реальному физическому процессу, в особенности при моделировании распространения излучения в сильно рассеивающих (мутных) и случайно-неоднородных средах [12]. Введение в рассмотрение рассеяния на частицах в рамках теории Максвелла, как правило, приводит к анализу одного из приближений теории многократного рассеяния [12], что, в свою очередь, приводит к достаточно громоздкой (чрезмерно детализированной) модели и существенно усложняет ее исследование.

Альтернативой данному подходу является модель, основанная на кинетическом уравнении переноса излучения, которая также достаточно известна и широко применяется при моделировании указанного процесса [1, 4–6, 9, 10]. Теория переноса рассматривает процесс распространения излучения как движение через среду фотонов. При этом волновые эффекты преломления и отражения на границах раздела однородных компонент среды учитываются при помощи специальных условий сопряжения. Такой подход имеет достаточно давнюю историю и используется как отечественными [4, 13, 16–19, 21], так и зарубежными авторами [1, 12, 22]. Интерес к изучению данной модели связан не только с рассматривавшимися ранее задачами атмосферной оптики [13] и фотометрии [6], но и с бурным развитием методов исследования биологических тканей [20, 21]. В последнее время интерес к уравнению переноса также возрос в связи с разработкой более совершенных алгоритмов визуализации трехмерных объектов [1, 19].

В работе рассматривается краевая задача для стационарного моноэнергетического уравнения переноса излучения в области, имеющей плоскопараллельную геометрию. Предполагается, что коэффициенты уравнения переноса могут иметь разрывы первого рода. Разрывность коэффициентов моделирует случай, когда среда, в которой изучается процесс переноса излучения, состоит из нескольких разнородных по своим физическим характеристикам материалов. Кроме этого, для каждого материала задан коэффициент преломления, характеризующий его оптические свойства. На поверхностях разрыва коэффициентов ставятся условия сопряжения, которые являются следствием известных формул Френеля [8]. Условия сопряжения выражают связь между падающим, отраженным и преломленным потоками на границе раздела однородных сред. Отметим, что в теории переноса более распространены условия сопряжения типа “склейки” решения, в которых эффекты отражения (преломления) не учитываются [5, 9, 10]. Теория для уравнений такого рода достаточно хорошо изучена и имеется много работ, посвященных анализу поведения их решений. Особенно следует выделить работу Т. А. Гермогеновой [10], в которой изучаются локальные свойства решений уравнения переноса с условиями сопряжения типа “склейки”. При использовании условий сопряжения, учитывающих преломление и отражения по законам Френеля, поведение

<sup>1</sup> Институт прикладной математики ДВО РАН, ул. Радио, 7, 690041, г. Владивосток; e-mail: yarovenko@iam.dvo.ru

решения уравнения переноса усложняется (в частности, появляются особенности у производной решения по угловой переменной) при приближении к углам полного внутреннего отражения на какой-либо из границ. Кроме того, значения угловой переменной, при которых возникают эти особенности, могут изменяться при переходе через другие границы согласно закону отражения и закону Снеллиуса, что еще более усложняет качественное поведение решения.

В работе предложены численные методы решения прямой задачи для уравнения переноса, основанные на имитационной модели Монте-Карло. Рассмотрена также обратная задача определения неизвестного показателя преломления по известным данным о потоке выходящего из среды излучения. Задачи такого типа, как правило, являются некорректно-поставленными и достаточно сложными в плане исследования. Практическая важность этих задач обсуждается в [2, 21]. В частности, измерение показателей преломления биотканей и отдельных ее компонентов является одной из актуальных задач оптики биотканей [2, 21]. Для решения поставленной обратной задачи в настоящей статье введена специальная функция, позволяющая находить искомым показатель преломления с учетом упомянутых особенностей. Выполнены соответствующие численные эксперименты.

Следует сказать несколько слов о применимости полученных результатов. В уравнение переноса явным образом не входит длина волны излучения. Поэтому используемая модель будет применима только в некогерентном случае, при котором толщины слоев много больше длины когерентности излучения. Кроме того, в данной работе не рассматриваются поляризационные эффекты, поэтому полученные результаты могут рассматриваться лишь как некоторое приближение.

**2. Прямая задача.** Рассмотрим стационарный процесс распространения неполяризованного монохроматического излучения в бесконечной по направлениям  $x$  и  $y$  среде  $G = (z_0, z_p)$ , имеющей плоскопараллельное строение.

Будем считать, что среда состоит из набора пластин, обладающих различными оптическими характеристиками. Пусть плоскости  $z = z_i$  ( $i = 0, \dots, p$ ) описывают границы раздела однородных слоев  $G_i = (z_{i-1}, z_i)$ , причем характерные толщины слоев намного превышают длину волны излучения.

Введем в рассмотрение множество  $G_0 = \bigcup_{i=1}^p G_i$ , представляющее собой разбиение многослойной системы  $G = (z_0, z_p)$ , ( $\bar{G} = \bar{G}_0$ ), в которой изучается процесс распространения излучения.

В качестве математической модели рассматриваемого нами процесса выберем стационарное моноэнергетическое уравнение переноса, которое при отсутствии внутренних источников излучения имеет вид [4, 10, 22]

$$\nu f'_z(z, \nu) + \mu(z)f(z, \nu) = \mu_s(z) \int_{-1}^1 g(\nu, \nu')f(z, \nu') d\nu', \quad (z, \nu) \in G \times (-1, 1). \quad (1)$$

Здесь  $f(z, \nu)$  — плотность потока излучения в точке  $z \in (z_0, z_p)$  в направлении, составляющем с положительным направлением оси  $z$  угол, косинус которого равен  $\nu \in [-1, 1]$  (далее величину  $\nu$  будем называть направлением распространения);  $\mu(z)$  — коэффициент полного взаимодействия;  $\mu_s(z)$  — коэффициент рассеяния;  $g(\nu, \nu')$  — фазовая функция рассеяния, характеризующая вероятность того, что фотон, летящий в направлении  $\nu'$ , сменит его на направление  $\nu$ .

Рассмотрим множества  $\Gamma_{\text{int}} = \bigcup_{i=1}^{p-1} \{z_i \times \{[-1, 0) \cup (0, 1]\}\}$ ,  $\Gamma_{\text{ext}}^{\pm} = \left\{ \{z_0 \times [\mp 1, 0)\} \cup \{z_p \times (\pm 1, 0]\} \right\}$ ,  $\Gamma^{\pm} = \Gamma_{\text{int}} \cup \Gamma_{\text{ext}}^{\pm}$ ,  $\Gamma = \Gamma^+ \cup \Gamma^-$ . На границах раздела слоев  $G_i$  поставим следующие условия сопряжения:

$$f|_{\Gamma^-}(z, \nu) = (\widehat{B}f|_{\Gamma^+})(z, \nu) + h(z, \nu), \quad (z, \nu) \in \Gamma^-, \quad (2)$$

где  $f|_{\Gamma^{\pm}}(z, \nu) = \begin{cases} f(z \pm 0, \nu), & \nu < 0, \\ f(z \mp 0, \nu), & \nu > 0, \end{cases}$   $f(z \pm 0, \nu) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0, \varepsilon > 0} f(z \pm \varepsilon, \nu)$ ,  $\widehat{B}$  — оператор сопряжения, моделирующий преломление и отражение потока излучения при переходе через границу. Функция  $h$  интерпретируется как плотность поверхностных источников излучения.

Будем считать, что на внешней границе области эффектами преломления и отражения можно пренебречь, так что  $(\widehat{B}f|_{\Gamma^+})(z, \nu) = 0$  при  $(z, \nu) \in \Gamma_{\text{ext}}^-$ . В результате на внешней границе области условия (2) примут вид  $f|_{\Gamma^-}(z, \nu) = h(z, \nu)$ ,  $(z, \nu) \in \Gamma_{\text{ext}}^-$ . Таким образом, можно считать, что внешняя граница области является фиктивной границей раздела сред, служащей только для задания плотности потока входящего излучения. Следует отметить, что данное ограничение достаточно физично и отражает тот факт, что на практике источники излучения располагаются не на самой границе облучаемого тела, а на

некотором расстоянии от него, так что между телом и источниками излучения остается прослойка из воздуха, которую логично рассматривать как еще одну компоненту среды.

Будем считать, что каждый из слоев  $G_i$  характеризуется своим коэффициентом преломления  $n_i$ ,  $i = 1, \dots, p$ , и пусть световой поток отражается и преломляется по законам Френеля. В этом случае оператор  $\widehat{B}$  будет иметь вид [4, 18]

$$(\widehat{B}f|_{\Gamma^+})(z_i, \nu) = R(z_i, \nu)f|_{\Gamma^+}(z_i, \nu_R) + T(z_i, \nu)f|_{\Gamma^+}(z_i, \nu_T), \quad i = 1, \dots, p-1, \quad (3)$$

$$(\widehat{B}f|_{\Gamma^+})(z_i, \nu) = 0, \quad i = 0, \quad i = p. \quad (4)$$

Здесь  $\nu_R = -\nu$ ,  $\nu_T = \nu_T(z_i, \nu) = \psi_i(\nu)$  ( $i = 1, \dots, p-1$ ) — направления распространения излучения, падающего на поверхность  $z = z_i$ , и в результате зеркального отражения и преломления по закону Снеллиуса [8] изменившие его на  $\nu$ . Направление  $\nu$  можно выразить также через  $\nu_T$ :  $\nu(\nu_T) = \psi_i^{-1}(\nu_T) = -\psi_i(-\nu_T)$ .

Коэффициенты  $R$  и  $T$  определяются следующими формулами:

$$R(z_i, \nu) = \frac{1}{2}(R_{\parallel}^2 + R_{\perp}^2), \quad T(z_i, \nu) = \frac{1}{2}(T_{\parallel}^2 + T_{\perp}^2) \frac{\widetilde{n}_i(\nu)\nu}{\psi_i(\nu)}, \quad (5)$$

где

$$R_{\parallel}(z_i, \nu) = \frac{\widetilde{n}_i(\nu)\psi_i(\nu) - \nu}{\widetilde{n}_i(\nu)\psi_i(\nu) + \nu}, \quad R_{\perp}(z_i, \nu) = \frac{\psi_i(\nu)\widetilde{n}_i(\nu)\nu}{\psi_i(\nu) + \widetilde{n}_i(\nu)\nu}, \quad (6)$$

$$T_{\parallel}(z_i, \nu) = \frac{2\psi_i(\nu)}{\widetilde{n}_i(\nu)\psi_i(\nu) + \nu}, \quad T_{\perp}(z_i, \nu) = \frac{2\psi_i(\nu)}{\psi_i(\nu) + \widetilde{n}_i(\nu)\nu}. \quad (7)$$

Здесь

$$\widetilde{n}_i(\nu) = \begin{cases} n_i/n_{i+1}, & 0 < \nu \leq 1; \\ n_{i+1}/n_i, & -1 \leq \nu < 0; \end{cases} \quad \psi_i(\nu) = \begin{cases} \text{sign}(\nu)\sqrt{1 - \widetilde{n}_i^2(\nu)(1 - \nu^2)}, & 1 - \widetilde{n}_i^2(\nu)(1 - \nu^2) \geq 0; \\ 0, & 1 - \widetilde{n}_i^2(\nu)(1 - \nu^2) < 0. \end{cases}$$

**Замечание 1.** Из определения коэффициентов  $R$  и  $T$  вытекает, что при всех значениях  $\nu$ , таких, что  $1 - \widetilde{n}_i^2(\nu)(1 - \nu^2) \leq 0$ , выполняются равенства  $T(z_i, \nu) = 0$ ,  $R(z_i, \nu) = 1$ . В оптике этот случай называется полным внутренним отражением [8].

Рассмотрим следующую задачу.

**Задача 1.** Задачу определения функции  $f(z, \nu)$  из уравнения (1) и граничных соотношений (2) при известных  $\mu, \mu_s, J, h, n_i$  будем называть прямой задачей.

Пусть  $\mu, \mu_s \in C_b(G_0)$ ,  $J \in C_b(G_0 \times [-1, 1] \setminus \{0\})$ ,  $g \in C_b(G_0 \times [-1, 1] \setminus \{0\} \times [-1, 1] \setminus \{0\})$ , где  $C_b(X)$  — пространство ограниченных и непрерывных функций на некотором открытом множестве  $X$  с нормой  $\|\phi\| = \sup_{x \in X} |\phi(x)|$ . Предполагается, что  $\mu(z)$  удовлетворяет неравенству:  $0 < \underline{\mu} \leq \mu(z) \leq \bar{\mu}$ ,  $\underline{\mu}, \bar{\mu} = \text{const}$ , а

функция  $g(\nu, \nu')$  удовлетворяет условию нормировки  $\int_{-1}^1 g(\nu, \nu') d\nu' = 1$  для всех  $\nu \in [-1, 1] \setminus \{0\}$ .

**Определение 1.** Будем говорить, что функция  $f$  лежит в классе  $D$ , если она обладает следующими свойствами:

1)  $f(z, \nu)$  — абсолютно непрерывна по  $z \in (z_i, z_{i+1}]$  при всех  $\nu > 0$  и абсолютно непрерывна по  $z \in [z_i, z_{i+1})$  при всех  $\nu < 0$ ,  $i = \overline{0, p-1}$ ;

2)  $(lf)(z, \nu) = \nu f'_z(z, \nu) + \mu(z)f(z, \nu) \in C_b(X_0)$ ;

3)  $f|_{\Gamma^-}(z, \nu) \in C_b(\Gamma^-)$ .

Рассмотрим величину  $\bar{\lambda} = \left\| \frac{\mu_s(z)}{\mu(z)} \right\|_{C_b(G_0)}$ . Далее будем полагать, что  $\bar{\lambda} < 1$ . Из последнего нера-

венства следует, что найдется такая функция  $\tilde{\mu}(z) < \mu(z)$ ,  $\tilde{\mu} \geq \text{const} > 0$ , что  $\lambda_1 = \left\| \frac{\tilde{\mu}(z)}{\mu(z)} \right\|_{C_b(G_0)} < 1$ ,

$\lambda_2 = \left\| \frac{\mu_s(z)}{\tilde{\mu}(z)} \right\|_{C_b(G_0)} < 1$ . В качестве функции  $\tilde{\mu}$  можно взять, например,  $\tilde{\mu}(z) = (\mu(z) + \mu_s(z))/2$ .

В [4] показано, что линейное пространство  $D$  с нормой  $\|f\|_D$  будет банаховым:

$$\|f\|_D = \max \left\{ \|f|_{\Gamma^-}\|_{C_b(\Gamma^-)}, \left\| \frac{lf}{\bar{\mu}} \right\|_{C_b(G_0 \times [-1, 1] \setminus \{0\})} \right\}.$$

**Определение 2.** Функцию  $f \in D$  назовем решением задачи (1), (2), если:

- 1) при всех  $(z, \nu) \in (G_0 \times [-1, 1] \setminus \{0\})$  она удовлетворяет уравнению (1);
- 2) выполняются условия сопряжения (2) на множестве  $\Gamma^-$ .

Разрешимость задачи 1 устанавливается следующим утверждением [4].

**Теорема 1.** Пусть оператор сопряжения определяется соотношениями (3)–(7) и выполняется условие  $\bar{\lambda} < 1$ . Тогда существует единственное решение задачи (1), (2), которое может быть найдено

в виде ряда Неймана  $f(z, \nu) = \sum_{k=0}^{\infty} (\hat{T}^k f_0)(z, \nu)$ , где

$$f_0(z, \nu) = h(\xi, \nu) \exp \left\{ -\frac{1}{\nu} \int_{\xi}^z \mu(t) dt \right\}, \quad \xi = \xi(z, \nu) = \begin{cases} z_i, & (z, \nu) \in (z_{i-1}, z_i] \times [-1, 0), \\ z_{i-1}, & (z, \nu) \in [z_{i-1}, z_i) \times (0, 1] \end{cases}$$

и оператор  $\hat{T}: D \rightarrow D$  действует по следующему правилу:

$$\begin{aligned} (\hat{T}f)(z, \nu) &= (\hat{B}f|_{\Gamma^+})(\xi, \nu) \exp \left\{ -\frac{1}{\nu} \int_{\xi}^z \mu(t) dt \right\} + \\ &+ \frac{1}{\nu} \int_{\xi}^z \exp \left\{ -\frac{1}{\nu} \int_{z'}^z \mu(t) dt \right\} \mu_s(z') \int_{-1}^1 g(\nu, \nu') f(z', \nu') d\nu' dz'. \end{aligned} \quad (8)$$

**3. Метод Монте-Карло решения прямой задачи.** Чаще всего для решения задач теории переноса излучения применяется метод Монте-Карло. Попытка решения задач такого типа, как правило, приводит к необходимости вычисления интегралов большой кратности. В этом случае метод Монте-Карло является чуть ли не единственным методом, позволяющим найти решение с приемлемой точностью. Это связано с тем, что скорость его сходимости не зависит от кратности вычисляемых интегралов, а зависит лишь от количества испытаний и дисперсии распределения случайных величин. Идея метода основана на представлении переноса излучения в среде в виде случайного процесса — движения через среду фотонов, моделирования взаимодействия излучения со средой и вычисления математического ожидания искомых величин.

Обычно в теории переноса излучения различают два подхода к использованию метода Монте-Карло: первый из них заключается в моделировании физических процессов распространения излучения в среде и накоплении некоторой статистической информации об искомых величинах без привлечения математического аппарата теории переноса. Второй подход заключается в формальном математическом решении уравнения переноса излучения, при котором решение представляется в виде ряда Неймана; далее этот ряд суммируется при помощи метода Монте-Карло. Здесь мы будем придерживаться второго подхода. Следует также отметить, что при решении уравнения переноса вторым методом задача метода Монте-Карло фактически сводится к вычислению кратных интегралов. Теория методов Монте-Карло в этом направлении достаточно хорошо разработана, и имеются хорошо известные теоремы сходимости метода [11, 15]. При этом исчезают трудности, связанные с обоснованием несмещенности построенных оценок искомых величин, которые, как правило, возникают при решении задачи с помощью первого подхода, и, что самое главное, адекватность полученных результатов реальному физическому процессу целиком определяется математической моделью, основанной на уравнении переноса [5, 21, 22].

Перейдем к описанию метода Монте-Карло для решения задачи (1), (2). Будем считать, что коэффициенты рассеяния и ослабления постоянны внутри областей  $G_i$ , т.е. имеет место представление  $\mu(r) = \sum_{i=1}^p \chi_i(r) \mu_i$ ,  $\mu_s(r) = \sum_{i=1}^p \chi_i(r) \mu_{si}$ . Здесь  $\chi_i(r)$  — характеристические функции областей  $G_i$ ;  $\mu_i$ ,  $\mu_{si}$  — постоянные скалярные величины; пусть  $\lambda_i = \mu_{si}/\mu_i < 1$  для всех  $i = 1, \dots, p$ . Будем считать, что оператор сопряжения  $\hat{B}$  определяется выражениями (3)–(7). Очевидно, что при сделанных нами

предположениях выполняются условия теоремы 1 и решение прямой задачи существует, единственно и представимо в виде ряда Неймана

$$f(z, \nu) = \sum_{n=0}^{\infty} (\widehat{T}^n f_0)(z, \nu). \tag{9}$$

Поскольку  $(\widehat{T}^n f_0) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , мы можем ограничиться суммой  $N$  первых членов ряда (9):  $f_N(z, \nu) = \sum_{n=0}^N (\widehat{T}^n f_0)(z, \nu)$ . Перепишем эту сумму в виде следующих рекуррентных соотношений:

$$f_n(z, \nu) = \widehat{T} f_{n-1}(z, \nu) + f_0(z, \nu), \quad n = 1, \dots, N. \tag{10}$$

Таким образом, если найти приближенную формулу для вычисления  $\widehat{T}f$ , то можно на основе соотношения (10) найти приближенное решение задачи (1), (2). Рассмотрим структуру оператора  $\widehat{T}$ . Выражение  $\widehat{T}f$  состоит из двух слагаемых, первое из которых отвечает за вклад в общую плотность потока излучения эффектов преломления и отражения. Это слагаемое может быть вычислено точно (за исключением ошибок округления). Второе слагаемое в  $\widehat{T}f$  соответствует вкладу рассеянных частиц. Рассмотрим это слагаемое более подробно. Пусть  $z \in G_i$ , тогда  $\mu(z) = \mu_i$  и  $\mu_s(z) = \mu_{si}$ ; учитывая изложенные выше предположения, путем несложных преобразований интегральное слагаемое в правой части (8) можно переписать в виде

$$I(z, \nu) = \frac{\lambda_i}{\nu} \left( 1 - \exp \left\{ -\frac{\mu_i}{\nu} (z - \xi) \right\} \right) \int_{\xi}^z \int_{-1}^1 \frac{\mu_i \exp \{ -\mu_i (z' - z) / \nu \}}{1 - \exp \{ -\mu_i (z - \xi) / \nu \}} g(\nu, \nu') f(z', \nu') d\nu' dz'.$$

Интеграл в этом выражении можно рассматривать как математическое ожидание функции  $f$  от случайных величин  $z'$  и  $\nu'$ , распределенных с плотностями  $\frac{\mu_i e^{-\mu_i(z-z')/\nu}}{\nu(1 - e^{-\mu_i(z-\xi)/\nu})}$  и  $g(\nu, \nu')$  соответственно. Для вычисления этого интеграла используем метод Монте-Карло [11, 15]. Пусть  $M$  — число испытаний; тогда, следуя общей схеме метода Монте-Карло, значение  $I(z, \nu)$  оцениваем величиной

$$I_M(z, \nu) = \frac{\lambda_i}{M} \left( 1 - \exp \left\{ -\frac{\mu_i}{\nu} (z - \xi) \right\} \right) \sum_{k=1}^M f(z'_k, \nu_k),$$

где  $\nu_k$  — независимая реализация случайной величины, распределенной с плотностью  $g(\nu, \nu')$ , а  $z'_k$  распределены с плотностью  $\frac{\mu_i \exp \{ -\mu_i (z' - \xi) / \nu \}}{1 - \exp \{ -\mu_i (z - \xi) / \nu \}}$ .

Таким образом, согласно (10), значение функции  $f_n$  в точке  $(z, \nu)$  оценивается величиной

$$f_{nM}(z, \nu) = (\widehat{B} f_{n-1, M} |_{\Gamma^+})(\xi, \nu) \exp \left\{ -\frac{\mu_i}{\nu} (z - \xi) \right\} + \frac{\lambda_i}{M} \left( 1 - \exp \left\{ -\frac{\mu_i}{\nu} (z - \xi) \right\} \right) \sum_{k=1}^M f_{n-1, M}(z'_k, \nu_k) + f_0(z, \nu), \tag{11}$$

$n = 1, \dots, N$ ,  $f_{0M}(z, \nu) = f_0(z, \nu)$ . Программная реализация рекуррентных соотношений (11) несложно реализуется с помощью рекурсивных процедур, поэтому этот вопрос здесь подробно не обсуждается.

Рассмотрим теперь случай, когда коэффициенты  $\mu$ ,  $\mu_s$  не постоянны внутри областей  $G_i$ . Тогда решение прямой задачи осложняется тем, что нельзя найти явную формулу для выражения плотности вероятности, с которой разыгрываются величины  $z'_k$ . Фактически это приводит к необходимости определять величины  $z'_k$  как решения уравнения вида

$$\frac{1}{\nu} \int_{\xi}^{z'} \frac{\exp \{ -\tau(z, z') / \nu \} \mu(z')}{1 - \exp \{ -\tau(z, \xi) / \nu \}} dt' = \alpha, \quad z' \leq z, \tag{12}$$

где  $\tau(z, z') = \int_{z'}^z \mu(t) dt$  и  $\alpha$  — независимая реализация случайной величины, равномерно распределенной на интервале  $(0, 1)$ .

Решение уравнения (12) на каждом шаге является трудоемким процессом и существенно увеличивает время расчетов. Выходом из этой ситуации может быть использование некоторой модификации предложенного выше метода, называемой методом максимального сечения [15]. Идея метода излагается ниже. В силу ограниченности коэффициента  $\mu$  найдутся такие константы  $\bar{\mu}_i$ , что  $\mu(z) \leq \bar{\mu}_i$  при  $z \in G_i$ ,  $i = 1, \dots, p$ . Построим функцию  $\bar{\mu}(z) = \sum_{i=1}^p \chi_i(z) \bar{\mu}_i$ . Здесь  $\chi_i(z)$  — характеристические функции областей  $G_i$ , а  $\bar{\mu}_i$  — указанные выше постоянные скалярные величины.

Прибавим к левой и правой частям уравнения (1) величину  $\bar{\mu}(z)f(z, \nu)$  и перепишем его в виде

$$\nu f'_z(z, \nu) + \bar{\mu}(z)f(z, \nu) = \mu_s(z) \int_{\Omega} g(\nu, \nu') f(z, \nu') d\nu' + (\bar{\mu}(z) - \mu(z)) f(z, \nu). \quad (13)$$

Уравнению (13) соответствует следующий оператор  $\hat{T}$ :

$$\begin{aligned} (\hat{T}f)(z, \nu) = & (\hat{B}f|_{\Gamma+})(\xi, \nu) \exp \left\{ -\frac{1}{\nu} \int_{\xi}^z \bar{\mu}(t') dt' \right\} + \\ & + \frac{1}{\nu} \int_{\xi}^z \exp \left\{ -\frac{1}{\nu} \int_{z'}^z \bar{\mu}(t') dt' \right\} \left\{ (\bar{\mu}(z') - \mu(z')) f(z', \nu) + \mu_s(z') \int_{-1}^1 g(\nu, \nu') f(z', \nu') d\nu' \right\} dz'. \end{aligned} \quad (14)$$

В итоге мы пришли к оператору  $\hat{T}$ , где под экспонентой вместо функции  $\mu(z)$  используется кусочно-постоянная функция  $\bar{\mu}$ . Для приближенного вычисления значений выражения (14) применима вышеописанная схема с тем лишь отличием, что значение функции  $f_n$  в точке  $(z, \nu) \in G_i$  будет оцениваться величиной

$$\begin{aligned} f_{nM}(z, \nu) = & (\hat{B}f_{n-1,M}|_{\Gamma+})(\xi, \nu) \exp \left\{ -\frac{\mu_i}{\nu} (z - \xi) \right\} + \\ & + \frac{\lambda_i}{M} \left( 1 - \exp \left\{ -\frac{\bar{\mu}_i}{\nu} (z - \xi) \right\} \right) \sum_{k=1}^M \frac{\bar{\mu}_i - \mu(z'_k) + \mu_s(z'_k)}{\bar{\mu}_i} f_{n-1,M}(z'_k, \nu_k) + f_0(z, \nu), \end{aligned}$$

$n = 1, \dots, N$ ,  $f_{0M}(z, \nu) = f_0(z, \nu)$ .

Следует помнить, что при разыгрывании нового направления рассеяния  $\nu_{k+1}$  необходимо учитывать добавку  $(\bar{\mu}(z) - \mu(z))f(z, \nu)$ , трактуя ее как некоторое фиктивное рассеяние без изменения направления распространения фотона. В этом случае с вероятностью  $\frac{\bar{\mu}_i - \mu(z'_k) + \mu_s(z'_k)}{\bar{\mu}_i}$  либо разыгрывается новое направление с плотностью вероятности  $g(\nu, \nu')$ , что соответствует рассеянию частицы, либо направление остается без изменения, что соответствует добавке  $(\bar{\mu}(z) - \mu(z))f(z, \nu)$ . Из всего сказанного нетрудно заметить, что предложенный метод решения прямой задачи с переменными коэффициентами будет давать неплохие результаты в случае, когда изменение коэффициента  $\mu(z)$  внутри областей  $G_i$  не велико.

Относительно сходимости рассматриваемых методов следует отметить, что в (10) приближенно считается только интегральное слагаемое, поскольку член, отвечающий за отражение и преломление на границах раздела сред при использовании рекурсии, вычисляется точно (за исключением ошибок округления). Необходимо также обратить внимание на то, что при вычислении интегрального слагаемого используется не  $M$  траекторий, как может показаться на

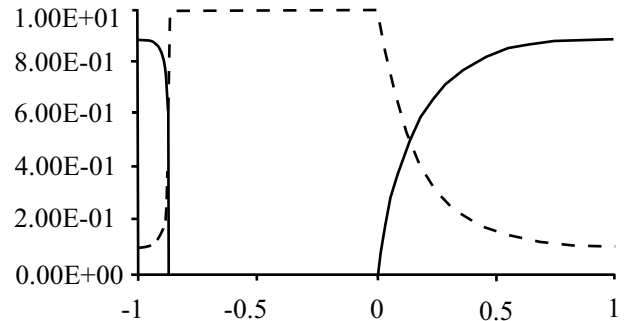


Рис. 1. Поведение коэффициентов  $R, T$  в зависимости от величины  $\nu$

первый взгляд, а  $M$  деревьев, что соответствует порядка  $(M + 2)^N$  линейных (физических) траекторий. Это связано с тем, что на каждом новом уровне вложенности рекурсии моделируемая частица “делится” на  $M + 2$  за счет эффектов отражения, преломления и рассеяния. Если при построении дерева встречается полное внутреннее отражение или же в среде отсутствует рассеяние, то число физических траекторий несколько уменьшается. Применение такого ветвящегося процесса увеличивает время расчета и не меняет порядок сходимости приближенного решения  $f_{NM}$  к точному  $f_N$  (порядок равен  $O(M^{-1/2})$ ), но приводит к значительному уменьшению дисперсии оценки по сравнению с аналогичными задачами, решаемыми с помощью методов Монте-Карло [13, 14]. Описанный здесь способ вычисления решения прямой задачи можно отнести к одной из модификаций метода Монте-Карло, называемой методом сопряженных блужданий [15] с использованием ветвления траекторий. В работах по моделированию распространения видимого света его также называют методом обратной трассировки лучей [1, 19].

**4. Некоторые свойства решения уравнения переноса.** Ниже мы рассмотрим некоторые качественные свойства поведения производной решения уравнения переноса по угловой переменной в случае, когда оператор сопряжения определяется соотношениями (3) – (7). Будем считать, что выполняются ограничения теоремы 1, так что решение задачи (1), (2) существует и единственно. Будем также предполагать, что фазовая функция рассеяния  $g(\nu, \nu')$  непрерывно дифференцируема по совокупности при  $(\nu, \nu') \in [-1, 1] \times [-1, 1]$ , а функция  $h$  непрерывно дифференцируема на  $\Gamma^-$ . Для начала выясним поведение коэффициентов отражения и прохождения при изменении направления  $\nu$ . На рис. 1 приведены типичные графики коэффициентов  $R$  (пунктирная кривая) и  $T$  (непрерывная кривая) в зависимости от величины  $\nu \in (-1, 1)$ . Как видно из графиков, при приближении угловой переменной  $\nu$  к косинусу угла полного внутреннего отражения  $\nu_0$  функции  $R, T$  меняются очень быстро, но, тем не менее, остаются непрерывными. Выясним вопрос о поведении их производных. Для начала заметим, что полное внутреннее отражение возникает только в случае, когда  $\tilde{n}_i > 1$ , поэтому в приводимых ниже рассуждениях будем считать, что это условие выполняется. Для определенности предположим, что полное внутреннее отражение происходит при  $\nu < 0$ . Найдем производную функции  $\psi_i$ :

$$\psi_i'(\nu) = \begin{cases} \frac{\tilde{n}_i^2 \nu}{\psi_i(\nu)}, & \nu < \nu_0(\tilde{n}_i) = \sqrt{1 - 1/\tilde{n}_i^2}, \\ 0, & \nu > \nu_0(\tilde{n}_i). \end{cases}$$

Поскольку  $\psi_i(\nu) \rightarrow 0$  при  $\nu \rightarrow \nu_0(\tilde{n}_i) - 0$ , отсюда следует неограниченность производной функции  $\psi_i$  при приближении  $\nu$  слева к косинусу угла полного внутреннего отражения. Выясним теперь, как ведут себя производные коэффициентов  $R$  и  $T$ . Дифференцируя функцию  $R$  при  $\nu < \nu_0(\tilde{n}_i)$ , имеем

$$\begin{aligned} R'(z_i, \nu) &= R'_{\parallel}(z_i, \nu)R_{\parallel}(z_i, \nu) + R'_{\perp}(z_i, \nu)R_{\perp}(z_i, \nu) = 2 \frac{\tilde{n}_i^3 \nu^2 - \tilde{n}_i \psi_i^2(\nu)}{\psi_i(\nu)(\tilde{n}_i \psi_i(\nu) + \nu)^2} R_{\parallel}(z_i, \nu) + \\ &+ 2 \frac{\tilde{n}_i^3 \nu^2 - \tilde{n}_i \psi_i^2(\nu)}{\psi_i(\nu)(\psi_i(\nu) + \tilde{n}_i \nu)^2} R_{\perp}(z_i, \nu) = 2 \frac{\tilde{n}_i^3 - \tilde{n}_i}{\psi_i(\nu)} \left( \frac{R_{\parallel}(z_i, \nu)}{(\tilde{n}_i \psi_i(\nu) + \nu)^2} + \frac{R_{\perp}(z_i, \nu)}{(\psi_i(\nu) + \tilde{n}_i \nu)^2} \right). \end{aligned}$$

Так как выполняется условие  $\nu < \nu_0(\tilde{n}_i)$  и знаки величин  $\nu$  и  $\psi_i(\nu)$  совпадают, то выражения  $(\tilde{n}_i \psi_i(\nu) + \nu)^2$  и  $(\psi_i(\nu) + \tilde{n}_i \nu)^2$  не обращаются в ноль. Отсюда, учитывая ограниченность величин  $R_{\parallel}$  и  $R_{\perp}$ , получаем, что  $R'(z_i, \nu) \rightarrow -\infty$  при  $\nu \rightarrow \nu_0(\tilde{n}_i) - 0$ . Далее, учитывая равенство  $R' + T' = 0$ , приходим к выводу, что  $T'(z_i, \nu) \rightarrow +\infty$  при  $\nu \rightarrow \nu_0(\tilde{n}_i) - 0$ . Таким образом, производные коэффициентов отражения и прохождения не ограничены при приближении угловой переменной слева к косинусу угла полного внутреннего отражения и имеют место соотношения

$$R'(z_i, \nu) = \begin{cases} 2 \frac{\tilde{n}_i^3 - \tilde{n}_i}{\psi_i(\nu)} \left( \frac{R_{\parallel}(z_i, \nu)}{(\tilde{n}_i \psi_i(\nu) + \nu)^2} + \frac{R_{\perp}(z_i, \nu)}{(\psi_i(\nu) + \tilde{n}_i \nu)^2} \right), & \nu < \nu_0(\tilde{n}_i); \\ 0, & \nu > \nu_0(\tilde{n}_i); \end{cases} \quad T'(z_i, \nu) = -R'(z_i, \nu).$$

Остановимся теперь на влиянии неограниченности производных коэффициентов прохождения и отражения на производную решения уравнения переноса. Пусть процесс переноса излучения изучается в некоторой многослойной системе, определяемой набором слоев  $G_i = (z_{i-1}, z_i)$ ,  $i = 1, \dots, p$ . Рассмотрим произвольную компоненту этой системы  $G_k = (z_k, z_{k+1})$ ,  $1 \leq k < p$  и величины  $f|_{\Gamma^+}(z_k, \nu)$  при  $\nu < 0$  и  $f|_{\Gamma^+}(z_{k+1}, \nu)$  при  $\nu > 0$ . Они представляют собой плотность потока излучения, выходящего из слоя  $G_k$

на нижней и верхней границах соответственно. Для решения уравнения переноса справедливо следующее представление [4, 18]:

$$f(z, \nu) = (\widehat{B}f|_{\Gamma^+} + h)(\xi, \nu) \exp\left\{-\frac{1}{\nu} \tau(z, \xi)\right\} + \frac{1}{\nu} \int_{\xi}^z \exp\left\{-\frac{1}{\nu} \tau(z, z')\right\} \mu_s(z') \int_{-1}^1 g(\nu, \nu') f(z', \nu') d\nu' dz'. \quad (15)$$

Рассматривая (15) в точках  $(z_{k+1}, \nu)$  при  $\nu > 0$  и  $(z_k, \nu)$  при  $\nu < 0$ , продифференцируем полученные выражения по переменной  $\nu$ . Учитывая непрерывную дифференцируемость функции  $g$  и условия  $\mu(z) \geq \underline{\mu} > 0$ ,  $|z_{k+1} - z_k| > 0$ , а также условие нормировки на функцию  $g$ , несложно получить следующие выражения для производных рассматриваемых величин:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f|_{\Gamma^+}(z_{k+1}, \nu)}{\partial \nu} &= \frac{1}{1 - R(z_k, \nu)R(z_{k+1}, -\nu) \exp\left\{-\frac{2}{|\nu|} \tau(z_{k+1}, z_k)\right\}} \left( R'(z_k, \nu)M_k(\nu) - R(z_k, \nu) \times \right. \\ &\times \left[ R'(z_{k+1}, -\nu)M_{k+1}(-\nu) + S_{k+1}(-\nu) \frac{\partial f|_{\Gamma^+}(z_{k+1}, \psi_{k+1}(-\nu))}{\partial \nu} \right] \exp\left\{-\frac{1}{|\nu|} \tau(z_{k+1}, z_k)\right\} + \\ &\left. + S_k(\nu) \frac{\partial f|_{\Gamma^+}(z_k, \psi_k(\nu))}{\partial \nu} \right) \exp\left\{-\frac{1}{|\nu|} \tau(z_{k+1}, z_k)\right\} + O(1), \quad \nu > 0. \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f|_{\Gamma^+}(z_k, \nu)}{\partial \nu} &= \frac{1}{1 - R(z_k, -\nu)R(z_{k+1}, \nu) \exp\left\{-\frac{2}{|\nu|} \tau(z_{k+1}, z_k)\right\}} \left( R'(z_{k+1}, \nu)M_{k+1}(\nu) - R(z_{k+1}, \nu) \times \right. \\ &\times \left[ R'(z_k, -\nu)M_k(-\nu) + S_k(-\nu) \frac{\partial f|_{\Gamma^+}(z_k, \psi_k(-\nu))}{\partial \nu} \right] \exp\left\{-\frac{1}{|\nu|} \tau(z_{k+1}, z_k)\right\} + \\ &\left. + S_{k+1}(\nu) \frac{\partial f|_{\Gamma^+}(z_{k+1}, \psi_{k+1}(\nu))}{\partial \nu} \right) \exp\left\{-\frac{1}{|\nu|} \tau(z_{k+1}, z_k)\right\} + O(1), \quad \nu < 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь  $O(1)$  обозначает ограниченную величину;  $M_k(\nu) = f|_{\Gamma^+}(z_{k+1}, -\nu) - f|_{\Gamma^+}(z_{k+1}, \psi_{k+1}(\nu))$ , а величины  $S_k(\nu)$  определяются соотношениями

$$\begin{aligned} S_k(\nu) &= T(z_k, \nu) \frac{\partial \psi_k(\nu)}{\partial \nu} = \frac{1}{2} \left( \frac{4\psi_k^2}{(\tilde{n}_k \psi_k + \nu)^2} + \frac{4\psi_k^2}{(\psi_k + \nu \tilde{n}_k)^2} \right) \frac{\tilde{n}_k \nu}{\psi_k} \frac{\tilde{n}_k^2 \nu}{\psi_k} = \\ &= 2 \left( \frac{1}{(\tilde{n}_k \psi_k + \nu)^2} + \frac{1}{(\psi_k + \nu \tilde{n}_k)^2} \right) \tilde{n}_k^3 \nu^2 \leq \text{const}. \end{aligned}$$

Из формул (16), (17) видно, что внутри слоя  $G_k$  у производной решения могут возникать особенности за счет производных коэффициентов  $R(z_k, \nu)$  и  $R(z_{k+1}, \nu)$ . В слой  $G_k$  могут также приходить “преломившиеся” особенности из слоев  $G_{k-1}$ ,  $G_{k+1}$  за счет выражений  $\frac{\partial f|_{\Gamma^+}(z_{k+1}, \psi_{k+1}(\nu))}{\partial \nu}$  и  $\frac{\partial f|_{\Gamma^+}(z_k, \psi_k(\nu))}{\partial \nu}$ , поскольку для этих величин справедливы представления, аналогичные (16), (17) и записанные, соответственно, для слоев  $G_{k+1}$  и  $G_{k-1}$ . Отметим, что в случае, когда одна из границ слоя  $G_k$  является внешней границей многослойной системы, следует учитывать, что на внешней границе коэффициенты  $R$  и  $T$  равны нулю, так как данная граница, по предположению, является фиктивной. Кроме того, из фиктивности такой границы вытекает, что  $\tilde{n} = 1$  и  $\psi(\nu) = \nu$ , в результате чего для таких слоев соотношения (16) и (17) несколько упростятся.

**5. Задача определения показателя преломления по данным оптических измерений.** Здесь мы рассмотрим метод, позволяющий с использованием эффекта полного внутреннего отражения определить неизвестный показатель преломления среды. Будем считать, что среда, в которой рассматривается процесс распространения излучения, состоит из трех слоев  $G_0 = (z_0, z_1) \cup (z_1, z_2) \cup (z_2, z_3)$ . Каждый из слоев характеризуется своими коэффициентами преломления  $n_i$ , ослабления  $\mu_i$  и рассеяния  $\mu_{si}$ , причем эти коэффициенты постоянны внутри каждого из слоев  $G_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Кроме того, будем предполагать, что плотность поверхностных источников излучения  $h$  отлична от нуля только на границе  $z = z_0$ , а сама функция  $h(z_0, \nu)$  — непрерывно дифференцируема при  $\nu \in [-1, 0]$ .



Рассмотрим следующую задачу.

**Задача 2.** Пусть выполняется условие  $n_1 > n_2 > n_3$ . Из уравнения (1) и граничных условий (2) требуется определить показатели преломления  $n_2$  и  $n_3$ , если известна плотность потока выходящего излучения  $H(\nu) = f|_{\Gamma^+}(z_0, \nu)$ ,  $\nu < 0$  и известен коэффициент  $n_1$ .

Заметим, что в рассматриваемой задаче известными считаются только показатель преломления  $n_1$  и плотность потока выходящего из среды излучения  $H(\nu)$ ,  $\nu < 0$ . Остальные параметры среды (коэффициенты рассеяния и полного взаимодействия, толщины слоев и т.д.) не предполагаются известными, но в то же время не подлежат определению.

Для решения поставленной задачи будем использовать особенности производной решения по угловой переменной, возникающие при приближении к углу полного внутреннего отражения. Из представлений (16), (17) с учетом, в силу условий  $n_1 > n_2 > n_3$ , наличия особенностей у величин  $R'(z_1, \nu)$  и  $R'(z_2, \nu)$  при  $\nu < 0$  нетрудно получить следующее представление для производной функции  $H(\nu)$ :

$$\frac{\partial H}{\partial \nu}(\nu) = \left[ \frac{\partial R}{\partial \nu}(z_1, \nu)M_1(\nu) + \frac{\partial R}{\partial \nu}(z_2, \psi_1)F(\nu) \right] \exp \left\{ -\frac{1}{|\nu|} \tau(z_1, z_0) \right\} + O(1), \quad \nu < 0, \quad (18)$$

где

$$F(\nu) = \frac{M_2(\psi_1)S_1(\nu) \exp \left\{ \frac{1}{|\psi_1|} \tau(z_2, z_1) \right\}}{1 - R(z_1, -\psi_1)R(z_2, \psi_1) \exp \left\{ \frac{2}{|\psi_1|} \tau(z_2, z_1) \right\}}.$$

Введем в рассмотрение функцию

$$\text{Ind}(n) = \left| \int_{-1}^{\nu_0(n)} \frac{\partial H}{\partial \nu}(\nu) \alpha(n, \nu) d\nu \right|, \quad n > n_1, \quad (19)$$

где

$$\nu_0(n) = -\sqrt{1 - \left(\frac{n}{n_1}\right)^2}, \quad \alpha(n, \nu) = \begin{cases} \nu / \sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n}\right)^2 (1 - \nu^2)}, & \nu < \nu_0(n), \\ 0, & \nu \geq \nu_0(n). \end{cases}$$

Подставляя (18) в (19), нетрудно получить следующее представление для функции  $\text{Ind}(n)$ :

$$\text{Ind}(n) = \left| A_1(\nu_1^*) \frac{n_2 n}{4n_1^2} \ln \left| \frac{(n_2 - n)^2}{(n_2 + n)^2} \right| + A_2(\nu_2^*) \frac{n_3 n}{4n_1^2} \ln \left| \frac{(n_3 - n)^2}{(n_3 + n)^2} \right| \right| + O(1). \quad (20)$$

Здесь  $\nu_1^* \in (-1, \nu_0(n_2))$ ,  $\nu_2^* \in (-1, \nu_0(n_3))$  — некоторые точки, а выражения  $A_i(\nu)$  при  $i = 1$  и  $i = 2$  имеют следующий вид:

$$A_1(\nu) = 2M_1(\nu)(\tilde{n}_1^3 - \tilde{n}_1) \left( \frac{R_{\parallel}(z_1, \nu)}{(\tilde{n}_1 \psi_1(\nu) + \nu)^2} + \frac{R_{\perp}(z_1, \nu)}{(\psi_1(\nu) + \tilde{n}_1 \nu)^2} \right) \exp \left\{ -\frac{1}{|\nu|} \tau(z_1, z_0) \right\},$$

$$A_2(\nu) = 2F(\nu)(\tilde{n}_2^3 - \tilde{n}_2) \left( \frac{R_{\parallel}(z_2, \psi_1(\nu))}{(\tilde{n}_2 \psi_2(\psi_1(\nu)) + \psi_1(\nu))^2} + \frac{R_{\perp}(z_2, \psi_1(\nu))}{(\psi_2(\psi_1(\nu)) + \tilde{n}_2 \psi_1(\nu))^2} \right) \exp \left\{ -\frac{1}{|\nu|} \tau(z_1, z_0) \right\}.$$

Из представления (20) видно, что функция  $\text{Ind}(n)$  неограниченно возрастает с приближением аргумента  $n$  к коэффициентам  $n_2$  и  $n_3$  при выполнении условий  $A_1(\nu_1^*) \neq 0$  и  $A_2(\nu_2^*) \neq 0$  и конечна при всех других значениях  $n$ . Таким образом, функция  $\text{Ind}(n)$  может служить для определения неизвестного показателя преломления.

Необходимо отметить, что неизвестный показатель преломления можно находить без использования функции  $\text{Ind}(n)$  путем нахождения значений  $\nu^*$  переменной  $\nu$ , при которых производная функции  $H$  будет не ограничена (при численном исследовании — принимать аномально большие значения) с последующим решением уравнения  $\nu^* = \nu_0(n)$  относительно переменной  $n$ . Однако подход, основанный на вычислении функции  $\text{Ind}(n)$ , представляется более предпочтительным. Это связано с тем обстоятельством, что при таком подходе учитываются именно особенности, обусловленные эффектом полного внутреннего отражения, и не учитываются значения  $\nu$ , при которых производная функции  $H$  просто принимает большие

значения. Поясним этот момент на примере. Будем считать, что  $h(\nu) = 1$ ,  $\nu < 0$  и рассеяние в первом слое отсутствует; рассмотрим поведение функции  $H$  при  $\nu_0(n_2) < \nu < 0$ . В этом случае, учитывая представление (15), граничное условие и формулы (3)–(7), приходим к следующему виду функции  $H$ :  $H(\nu) = \exp\left\{-\frac{2}{|\nu|} \tau(z_1, z_0)\right\}$ ,  $\nu_0(n_2) < \nu < 0$ . Дифференцируя последнее выражение, имеем

$$\frac{\partial H}{\partial \nu}(\nu) = -\frac{2}{\nu^2} \tau(z_1, z_0) \exp\left\{-\frac{2}{|\nu|} \tau(z_1, z_0)\right\}, \quad \nu_0(n_2) < \nu < 0.$$

Из последнего выражения видно, что при достаточно малых, но отделенных от нуля значениях  $\nu$ , производная функции  $H$  хотя и будет ограничена, но может принимать достаточно большие значения, в особенности, если  $\mu_1$  мало. Такая ситуация при численном исследовании функции  $H'(\nu)$  может восприниматься как ее особенность и приводить к восстановлению ложных показателей преломления.

**6. Численные эксперименты по определению показателя преломления.** Рассмотрим ряд тестовых примеров по восстановлению неизвестного показателя преломления облучаемой среды. Все тестовые примеры решались в два этапа. На первом этапе по заданной структуре облучаемой среды методом Монте-Карло находилась функция  $H(\nu) = f(z_0 + 0, \nu)$  при  $\nu < 0$ . На втором этапе вычислялась функция  $\text{Ind}(n)$ . Алгоритм вычисления функции  $\text{Ind}(n)$  выглядел следующим образом.

1. Задавался некоторый интервал  $[\underline{n}, \bar{n}]$  изменения коэффициента  $n$  и выбирался шаг дискретизации  $\delta$  этого интервала.

2. В точках указанного интервала находились значения функции  $\text{Ind}(n)$ . При этом функция  $H(\nu)$  численно дифференцировалась, а интеграл аппроксимировался формулой прямоугольников [7].

3. Для представления результата область значений функции  $\text{Ind}(n)$  разбивалась на 256 равных диапазонов, каждому из которых присваивался один из 256 оттенков серого цвета так, чтобы большим значениям функции сопоставлялся более темный цвет. После этого значения функции отображались в виде цветовой диаграммы на цифровой шкале, соответствующей интервалу  $[\underline{n}, \bar{n}]$ . В результате значения искомых показателей преломления оказывались выделенными темным цветом.

В качестве облучаемого материала использовался поверхностный слой человеческой кожи толщиной 300 мкм (он включает в себя роговой слой кожи, эпидермис и верхний слой дермы [21]). Оптические характеристики моделируемой среды при длине волны  $\lambda = 337$  нм приведены в табл. 1. Входящее излучение равнялось единице на границе  $z = z_0$  при  $\nu < 0$ , нулю на всех остальных границах и моделировало изотропный источник излучения.

Таблица 1

Характеристики трехслойной среды для длины волны  $\lambda = 337$  нм

№	Вещество	Толщина (мкм)	Показатель преломления $n_i$	Коэффициент ослабления $\mu_i(\text{см}^{-1})$	Коэффициент рассеяния $\mu_{si}(\text{см}^{-1})$	Анизотропия рассеяния $\bar{g}$
1	Роговой слой	20	1.55	180	160	0.8
2	Эпидермис	80	1.5	197	165	0.72
3	Дерма	200	1.4	250	227	0.72

При моделировании рассеяния предполагалось, что фотоны рассеиваются симметрично относительно направления падающего на частицу среды фотона. В этом случае фазовая функция рассеяния  $g(\nu, \nu')$  зависит только от угла  $\theta$  между падающим и рассеянным фотоном  $\left(\cos \theta = \nu\nu' + \sqrt{(1-\nu^2)(1-\nu'^2)}\right)$ . Известно [12], что во многих практически важных случаях  $g$  хорошо аппроксимируется функцией Хенни-Гринштейна:  $g(\theta) = \frac{1-\bar{g}}{(1+\bar{g}^2-2\bar{g}\cos\theta)^{3/2}}$ , где  $\bar{g} \in [0, 1]$  — параметр, определяющий степень анизотропии рассеяния. При этом значение  $\bar{g} = 0$  соответствует изотропному рассеянию,  $\bar{g} = 1$  — полному рассеянию вперед.

При построении модельных данных измерений величины  $H(\nu)$  вычислялась максимальная относительная среднеквадратичная ошибка в процентах:  $\Delta(M) = \max_{\nu_i} \left\{ \frac{\sigma^2(M, \nu_i)}{\sqrt{M} f_{NM}(z_0, \nu)} \right\} 100\%$ ; здесь  $\sigma^2(M, \nu)$  — исправленная выборочная дисперсия для функции  $f_N$  в точке  $(z_0, \nu)$ :

$$\sigma^2(M, \nu) = \frac{1}{M-1} \left( \sum_{i=1}^M (f_{Ni}(z_0, \nu))^2 - \frac{1}{M} \left( \sum_{i=1}^M f_{Ni}(z_0, \nu) \right)^2 \right).$$

Таблица 2

Результаты численных экспериментов по восстановлению неизвестных показателей преломления

Тест №	Ошибка измерения $H(\nu)$ $\Delta$	Точное значение $n_2$	Восстановление $\bar{n}_2$	Ошибка $ n_2 - \bar{n}_2 $	Точное значение $n_3$	Восстановление $\bar{n}_3$	Ошибка $ n_3 - \bar{n}_3 $
1	0.04 %	1.5	1.506	0.006	1.4	1.398	0.002
2	12.7 %	1.5	1.523	0.023	1.4	—	—

Перейдем теперь к непосредственному рассмотрению тестовых примеров.

**Тест 1.** При построении тестового примера функция  $H$  вычислялась на сетке с шагом  $10^{-3}$ , при этом учитывались 10 членов ряда Неймана ( $N = 10$ ). Количество моделируемых траекторий составляло  $M = 10^5$ . Максимальная среднеквадратичная ошибка  $\Delta(10^5) = 0.04\%$ . Данный тест моделирует ситуацию, когда функция  $H(\nu)$  измерена с достаточно хорошей точностью. На рис. 2 а приведены результаты численного восстановления показателя преломления. Точные значения переменной  $n$ , при которых функция  $\text{Ind}(n)$  принимает аномально большие значения, указаны в табл. 2, из которой видно, что восстановление прошло с достаточно хорошей точностью.

**Тест 2.** Этот тестовый пример демонстрирует влияние точности измерения плотности потока выходящего из среды излучения  $H$  на качество определения показателя преломления.

Параметры теста аналогичны предыдущему, но на этапе вычисления функции  $H$  использовалось значительно меньшее количество траекторий, а именно  $M = 100$ . Максимальная среднеквадратичная ошибка  $\Delta(100)$  составляла 12.7%. На рис. 2 б приведены результаты численного восстановления показателя преломления. Как видно из рис. 2 б, показатель преломления  $n_3$  не восстановился. Характерной особенностью рассматриваемых тестов является высокая оптическая плотность и сильное рассеяние. При рассматриваемых параметрах среды плотность нерассеянного потока, прошедшего через всю среду, максимально ослабляется в  $\exp(6.936) \approx 1000$  раз. Сильное ослабление и практически стопроцентное рассеяние, как правило, делают почти невозможным применение различных методов оптической томографии. Это связано с тем, что уровень полезного сигнала становится сравним с шумом. Поэтому при уменьшении точности измерений величины  $H(\nu)$  логично ожидать ухудшения качества восстановления неизвестного показателя преломления (см. табл. 2).

Следует сказать несколько слов о вычислительных ресурсах, требующихся для решения рассмотренных задач. При решении обратной задачи вся вычислительная работа сводится к численному дифференцированию и интегрированию известных функций. Как следствие, основное значение здесь имеет лишь точность применяемой дискретизации. В частности, в рассматриваемых выше тестовых примерах время решения обратной задачи составляет считанные секунды. Иная ситуация имеет место при решении прямой задачи. В предложенном методе ее решения используется рекурсия, что налагает существенные требования к вычислительной системе, причем в основном на объем имеющейся в наличии оперативной памяти. Приведем время, которое потребовалось для решения прямой задачи: 10250 секунд (тест 1) и 3045 секунд (тест 2). Вычисления выполнялись на компьютере с процессором Pentium 4 с тактовой частотой 3200 МГц и оперативной памятью 1 Гб.

**7. Заключение.** Рассмотренная обратная задача заключается в определении неизвестного показателя преломления по данным о выходящем излучении. Достоинством предложенного метода вычисления коэффициентов преломления является то, что метод позволяет находить решение задачи с учетом только выходящего излучения без задания других характеристик среды. Еще одной отличительной особенностью данного способа является его применимость для диагностики мутных (сильно рассеивающих) сред без существенных ограничений на коллимацию внешнего источника излучения.

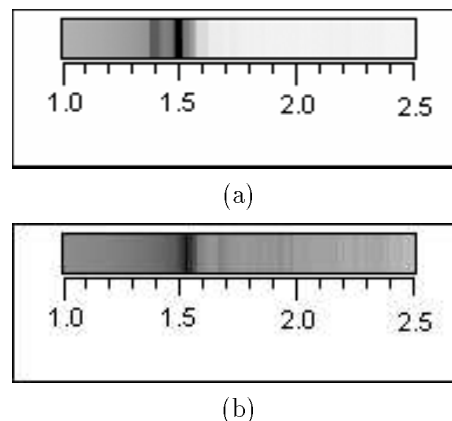


Рис. 2. Решение задачи определения показателя преломления: (а) — функция  $H(\nu)$  вычислена с хорошей точностью, в результате восстановление прошло успешно; (б) — функция  $H(\nu)$  вычислена с плохой точностью, при этом показатель преломления  $n_3$  восстановить не удалось

Следует подчеркнуть, что в данной работе автор ограничился рассмотрением только трехслойных систем исключительно в целях упрощения изложения материала. В рассматриваемой обратной задаче гораздо более важными являются ограничения на показатели преломления и на коэффициенты уравнения переноса и источник излучения, чем на количество слоев в среде. Так, например, при выполнении ограничений  $\mu_s/\mu < 1$  и  $n_i > n_{i+1}$  ( $i = 1, \dots, N - 1$ ) предлагаемый метод будет работать и в произвольной  $N$ -слойной системе ( $N > 3$ ). Это нетрудно показать, проделав выкладки, аналогичные приведенным в разделе 4. В то же время, при нарушении требуемых ограничений легко привести пример неединственности решения в трехслойной системе. Будем предполагать, что  $\mu = \mu_s$  (среда полностью рассеивающая) и  $h(\nu) = 1$  для  $\nu \in [-1, 1]$ ; в этом случае для произвольных фиксированных значений показателя преломления решением прямой задачи для уравнения переноса будет функция  $f(z, \nu) = 1$ . Очевидно, что в рассматриваемом случае вряд ли возможно определение параметров среды любым из методов, основанных на использовании данных о выходящем излучении.

Ограничения, предполагаемые в работе, по сути представляют собой требования на знание некоторой априорной информации об исследуемой среде. Конечно, подобные требования несколько снижают прикладную ценность нашего метода, однако существует достаточно много случаев, когда структура среды известна и требуется определить показатель преломления. Такая ситуация имеет, например, место при диагностике кожных покровов, когда строение кожи остается фиксированным и требуется определить показатель преломления, который может изменяться при введении пациенту лекарственных препаратов или при зарождении раковых процессов [2, 20, 21].

В дальнейшем предполагается рассмотреть более общую модель, учитывающую поляризационные эффекты и обобщить полученные результаты.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Arvo J.* Backward ray tracing // Proc. of ACM SIGGRAPH'86 Course Notes. New York: ACM Press, 1986. 259–263.
2. *Duck F.* A physical properties of tissue // A comprehensive reference book. New York: Academic Press, 1990. 167–223.
3. *Furman Sh., Tikhonravov A. V.* Basics of optics of multilayer systems. Gif-sur-Yvette: Edition Frontieres, 1992.
4. *Prokhorov I. V., Yarovenko I. P., Krasnikova T. V.* An extremum problem for the radiation transfer equation // J. of Inverse and Ill-Posed Problems. 2005. **13**, N 4. 365–382.
5. *Аниконов Д. С., Ковтанюк А. Е., Прохоров И. В.* Использование уравнения переноса в томографии. М.: Логос, 2000.
6. *Апресян Л. А., Кравцов Ю. А.* Фотометрия и когерентность: волновые аспекты теории переноса излучения // Успехи физич. наук. 1984. **142**, № 4. 689–711.
7. *Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М.* Численные методы. М.: Наука, 1987.
8. *Борн М., Вольф Э.* Основы оптики. М.: Наука, 1973.
9. *Владимиров В. С.* Математические задачи односкоростной теории переноса частиц // Тр. МИАН СССР. 1961. **61**. 3–158.
10. *Гермогенова Т. А.* Локальные свойства решений уравнения переноса. М.: Наука, 1986.
11. *Ермаков С. М., Михайлов Г. А.* Статистическое моделирование. М.: Наука, 1982.
12. *Исмару А.* Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах. М.: Мир, 1981.
13. *Марчук Г. И., Михайлов Г. А., Назарлиев М. А. и др.* Метод Монте-Карло в атмосферной оптике. Новосибирск: Наука, 1976.
14. *Марчук Г. И., Лебедев В. И.* Численные методы по теории переноса нейтронов. М.: Атомиздат, 1981.
15. *Михайлов Г. А.* Весовые методы Монте-Карло. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000.
16. *Прохоров И. В.* Краевая задача переноса излучения в неоднородной среде с условиями отражения на границе // Дифф. уравнения. 2000. **36**, № 6. 848–851.
17. *Прохоров И. В.* О разрешимости краевой задачи теории переноса излучения с обобщенными условиями сопряжения на границе раздела сред // Известия РАН. Серия матем. 2003. **67**, № 6. 169–192.
18. *Прохоров И. В., Яровенко И. П.* Краевая задача теории переноса в многослойной среде с обобщенными условиями сопряжения // Сибирский журнал индустриальной математики. 2003. **6**, № 1. 93–107.
19. *Прохоров И. В., Яровенко И. П.* Численное решение дифракционных задач для уравнения переноса излучения // Сибирские электронные математические известия. 2005. **2**. 88–101.
20. *Сетейкин А. Ю.* Анализ по методу Монте-Карло процессов распространения лазерного излучения в многослойных биоматериалах // Оптика и спектроскопия. 2005. **99**, № 4. 685–688.
21. *Тучин В. В.* Исследование биотканей методами светорассеяния // Успехи физич. наук. 1997. **167**, № 5. 517–539.
22. *Чандрасекар С.* Перенос лучистой энергии. М.: Изд-во иностр. лит., 1953.

Поступила в редакцию  
28.12.2005