

УДК 519.63

О РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ СТОКСА С ПАРАМЕТРОМ С ПОМОЩЬЮ ИТЕРИРОВАНИЯ КРАЕВЫХ УСЛОВИЙ

А. В. Каргин¹

В работе предложен и обоснован на дифференциальном уровне итерационный метод решения задачи Стокса с параметром в прямоугольной области со скоростью сходимости, не зависящей от отношения сторон и параметра. Для тестовой задачи о каверне приведены результаты расчетов численной реализации алгоритма.

Введение. Рассмотрим в области прямоугольной формы $\Omega = \left\{ -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, -\frac{d\pi}{2} < y < \frac{d\pi}{2} \right\}$ краевую задачу Стокса с параметром $\alpha \geq 0$:

$$\begin{aligned} -\Delta \mathbf{v} + \alpha \mathbf{v} + \text{grad } q &= \mathbf{f} & \text{в } \Omega, \\ \text{div } \mathbf{v} &= 0 & \text{в } \Omega, \\ \mathbf{v} &= \mathbf{0} & \text{на } \partial\Omega. \end{aligned} \quad (1)$$

Введем обозначения пространств $P = \left\{ q \mid q \in L_2(\Omega), \int_{\Omega} q \, d\Omega = 0 \right\}$, $\mathbf{U} = (W_2^1(\Omega))^2$. Из результатов [1] следует, что обобщенное решение $\mathbf{v} \in \mathbf{U}$, $q \in P$ задачи (1) существует и единственно, если $\mathbf{f} \in (W^{-1/2}(\Omega))^2$.

Несмотря на простоту рассматриваемой области, сингулярно возмущенная параметром α задача (1) играет важную роль в исследованиях движения вязкой несжимаемой жидкости. Кроме того, такая постановка является распространенной моделью для разработки, обоснования и сравнения приближенных методов. В задаче присутствуют два внешних параметра: $d > 0$, характеризующий отношение сторон (вытянутость области) и $\alpha \geq 0$, возникающий при численном решении нестационарных уравнений Стокса. При этом значение параметра α равно $(\tau\nu)^{-1}$, где τ — шаг дискретизации по времени, ν — константа. Известно [2], что с ростом параметра d (или обратной величины $1/d$) происходит резкое замедление традиционно используемых методов сопряженных градиентов типа Узавы (см. [3, 4] и цитированную там литературу), что связано с квадратичным ростом спектрального числа обусловленности дополнения Шура. При больших α сходимость стандартных итерационных методов также замедляется [5]. В этом случае число обусловленности дополнения Шура растет как $O(\alpha)$ при $\alpha \rightarrow \infty$. Это означает, что для эффективного решения исходной задачи (1) требуется построение алгоритмов, равномерно сходящихся по параметрам d и α .

До настоящего времени были известны два метода, равномерно сходящиеся по d . Первый метод предложен в [6], его равномерная сходимость по d основана на специальной конструкции предобусловливателя для дополнения Шура. Вторым методом основан на расщеплении граничных условий и использовании оператора Лапласа–Бельтрами [7, 8]. Отметим, что формальное обоснование сходимости было получено только для первого метода.

С другой стороны, известны три метода решения указанной задачи, обладающие равномерной сходимостью по параметру α : метод фиктивных областей [9], алгоритм с блочным предобусловливанием дополнения Шура [10, 11] и уже упомянутый выше метод расщепления граничных условий [7, 8]. Для численного решения также применяется многосеточный метод, однако равномерность его сходимости по α на сегодняшний день не доказана.

В данной работе на дифференциальном уровне предложен и обоснован новый алгоритм, обладающий равномерной сходимостью относительно внешних параметров. Случай $\alpha = 0$ в данной работе не рассматривается, поскольку используемые в выкладках выражения существенно отличаются от случая обобщенной задачи $\alpha > 0$. В методе используются аналитические (в виде рядов) решения уравнений

¹ Московский Государственный Университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, Воробьевы горы, 119992, Москва; e-mail: a_kargin@mail.ru

Стокса с некоторыми модельными краевыми условиями. Это приводит к возмущению исходных краевых условий, однако с помощью специального выбора последовательности вспомогательных задач можно достаточно быстро подавить влияние этих возмущений. Таким образом, рассматриваемый алгоритм фактически заключается в итерировании (подавлении возмущений) краевых условий для вектора скорости.

Работа организована следующим образом. Сначала исходная задача преобразуется к удобному виду и вводятся необходимые обозначения. Далее формулируются вспомогательные задачи, для решений которых выписаны выражения интегралов Дирихле. Затем обсуждается построение и обоснование итерационного метода и, наконец, приводятся результаты численной реализации предложенного подхода на примере традиционной задачи о каверне.

1. Преобразование исходной задачи. Рассмотрим наряду с (1) задачу Стокса с так называемыми “периодически продолжаемыми” граничными условиями:

$$\begin{aligned} -\Delta \bar{v} + \alpha \bar{v} + \text{grad } \bar{q} &= \mathbf{f} & \text{в } \Omega, \\ \text{div } \bar{v} &= 0 & \text{в } \Omega, \\ \bar{v} \cdot n = 0, \quad \frac{\partial(\bar{v} \cdot \tau)}{\partial n} &= 0 & \text{на } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь n и τ — нормальный и касательный векторы к границе $\partial\Omega$. Задача (2) имеет единственное решение $\bar{v} \in U_p, \bar{q} \in P$, которое может быть представлено в виде рядов Фурье [5, 12]. Выше было использовано обозначение $U_p = \{u \mid u \in (W_2^1(\Omega))^2, u \cdot n = 0 \text{ на } \partial\Omega\}$. Решение задачи (2) часто используется для преобразования неоднородной задачи (1) с нулевыми граничными условиями в “обобщенную” задачу о каверне — однородную задачу Стокса с заданной касательной составляющей скорости вдоль границы:

$$\begin{aligned} -\Delta \mathbf{w} + \alpha \mathbf{w} + \text{grad } r &= \mathbf{0} & \text{в } \Omega, \\ \text{div } \mathbf{w} &= 0 & \text{в } \Omega, \\ \mathbf{w} \cdot n = 0, \quad \mathbf{w} \cdot \tau &= \mathbf{b} & \text{на } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь $\mathbf{w} = \bar{v} - v, r = \bar{q} - q$, а граничная функция $\mathbf{b} \in (W_2^{1/2}(\partial\Omega))^2$ является следом на $\partial\Omega$ соленоидальной в Ω функции \bar{v} .

Представим границу области Ω в виде объединения непересекающихся частей — вертикальной и горизонтальной:

$$\partial\Omega = \partial\Omega_{\text{ver}} \cup \partial\Omega_{\text{hor}}, \quad \text{где } \partial\Omega_{\text{ver}} = \left\{ x = \pm \frac{\pi}{2}, -\frac{d\pi}{2} < y < \frac{d\pi}{2} \right\}, \quad \partial\Omega_{\text{hor}} = \left\{ y = \pm \frac{d\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \right\}.$$

Затем воспользуемся линейностью задачи (3): $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \tilde{\mathbf{u}}, r = p + \tilde{p}, \mathbf{b} = \mathbf{a} + \tilde{\mathbf{a}}$, где

$$\mathbf{a} = \begin{cases} a(x) & \text{при } y = -\frac{d\pi}{2}, \\ b(x) & \text{при } y = \frac{d\pi}{2}, \end{cases} \quad \tilde{\mathbf{a}} = \begin{cases} \tilde{a}(y) & \text{при } x = -\frac{\pi}{2}, \\ \tilde{b}(y) & \text{при } x = \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

и, определив компоненты новых вектор-функций как $\mathbf{u} = (u, v), \tilde{\mathbf{u}} = (\tilde{u}, \tilde{v})$, получим две задачи: с заданной касательной на горизонтальной границе —

$$\begin{aligned} -\Delta \mathbf{u} + \alpha \mathbf{u} + \text{grad } p &= \mathbf{0} & \text{в } \Omega, \\ \text{div } \mathbf{u} &= 0 & \text{в } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega_{\text{ver}}} = 0, \quad v|_{\partial\Omega} = 0, \quad u|_{\partial\Omega_{\text{hor}}} &= \mathbf{a} \end{aligned} \tag{4}$$

и с заданной касательной на вертикальной границе —

$$\begin{aligned} -\Delta \tilde{\mathbf{u}} + \alpha \tilde{\mathbf{u}} + \text{grad } \tilde{p} &= \mathbf{0} & \text{в } \Omega, \\ \text{div } \tilde{\mathbf{u}} &= 0 & \text{в } \Omega, \\ \tilde{v}|_{\partial\Omega_{\text{hor}}} = 0, \quad \tilde{u}|_{\partial\Omega} = 0, \quad \tilde{v}|_{\partial\Omega_{\text{ver}}} &= \tilde{\mathbf{a}}. \end{aligned} \tag{5}$$

Легко заметить, что обе задачи (4) и (5) относятся к одному типу: одна получается из другой поворотом на угол $\pi/2$. Поэтому для решения исходной задачи (1) достаточно уметь решать неоднородную задачу

с модельными краевыми условиями (2) и задачу вида (4). Явные формулы для решения задачи (2) можно найти, например, в [13], поэтому главным объектом исследований в настоящей работе будет задача (4). Сначала нам потребуются решения некоторых вспомогательных задач.

2. Вспомогательные задачи и их решения. В данном разделе рассматриваются решения однородных задач Стокса и гармонические функции, удовлетворяющие специально сконструированным краевым условиям.

2.1. Первая вспомогательная задача. Рассмотрим задачу, отличающуюся от (4) тем, что вместо краевого условия $v|_{\partial\Omega_{ver}} = 0$ первого рода на вторую компоненту вектор-функции \mathbf{u} на вертикальной составляющей границы задано условие второго рода $\frac{\partial v}{\partial x}|_{\partial\Omega_{ver}} = 0$:

$$\begin{aligned} -\Delta \mathbf{u} + \alpha \mathbf{u} + \text{grad } p &= \mathbf{0} & \text{в } \Omega, \\ \text{div } \mathbf{u} &= 0 & \text{в } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega_{ver}} &= 0, \quad u|_{\partial\Omega_{hor}} = \mathbf{a}, \quad \frac{\partial v}{\partial x}|_{\partial\Omega_{ver}} = 0, \quad v|_{\partial\Omega_{hor}} = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Специально подобранные граничные условия позволяют искать ее решение в виде однократных рядов:

$$u = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{m=1}^{\infty} u_m(y) \sin m\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \quad v = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{m=1}^{\infty} v_m(y) \cos m\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \quad p = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{m=1}^{\infty} p_m(y) \cos m\left(x + \frac{\pi}{2}\right). \quad (7)$$

После разложения заданных на границе функций $a(x)$, $b(x)$ в ряды Фурье

$$a(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{m=1}^{\infty} a_m \sin m\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \quad b(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin m\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \quad (8)$$

где $a_m = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} a(x) \sin m\left(x + \frac{\pi}{2}\right) dx$, $b_m = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} b(x) \sin m\left(x + \frac{\pi}{2}\right) dx$, подставим выражения (7)

и (8) в уравнения (6). Отсюда получим для каждого целочисленного значения параметра $m \geq 1$ систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно неизвестных функций $u_m(y)$, $v_m(y)$, $p_m(y)$ и соответствующие граничные условия первого рода:

$$\begin{aligned} (m^2 + \alpha)u_m - u_m'' - mp_m &= 0, \\ (m^2 + \alpha)v_m - v_m'' + p_m' &= 0, \\ mu_m + v_m' &= 0, \\ u_m\left(\frac{d\pi}{2}\right) &= b_m, \quad u_m\left(-\frac{d\pi}{2}\right) = a_m, \quad v_m\left(\frac{d\pi}{2}\right) = 0, \quad v_m\left(-\frac{d\pi}{2}\right) = 0. \end{aligned}$$

Каждая такая система имеет единственное решение, которое удобно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} u_m(y) &= K_1 [-C_4 k \cosh(ky) + C_2 m \cosh(my)] + K_2 [C_3 k \sinh(ky) - C_1 m \sinh(my)], \\ v_m(y) &= -K_2 [C_3 m \cosh(ky) - C_1 m \cosh(my)] - K_1 [-C_4 m \sinh(ky) + C_2 m \sinh(my)], \\ p_m(y) &= \alpha [-K_2 C_1 \sinh(my) + K_1 C_2 \cosh(my)], \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} K_1 &= \frac{b_m + a_m}{2m \cosh\left(\frac{md\pi}{2}\right) \sinh\left(\frac{kd\pi}{2}\right) - 2k \cosh\left(\frac{kd\pi}{2}\right) \sinh\left(\frac{md\pi}{2}\right)}, \\ K_2 &= \frac{b_m - a_m}{2k \cosh\left(\frac{md\pi}{2}\right) \sinh\left(\frac{kd\pi}{2}\right) - 2m \cosh\left(\frac{kd\pi}{2}\right) \sinh\left(\frac{md\pi}{2}\right)}, \\ C_1 &= \cosh\left(\frac{kd\pi}{2}\right), \quad C_2 = \sinh\left(\frac{kd\pi}{2}\right), \quad C_3 = \cosh\left(\frac{md\pi}{2}\right), \quad C_4 = \sinh\left(\frac{md\pi}{2}\right), \quad k = \sqrt{m^2 + \alpha}. \end{aligned}$$

Теперь формулы (7) дают нам решение первой вспомогательной задачи.

Кроме того, для обоснования сходимости алгоритма нам потребуется явный вид решения следующей задачи:

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= 0 \quad \text{в } \Omega, \\ \varphi|_{\partial\Omega_{ver}} &= 0, \quad \varphi|_{\partial\Omega_{hor}} = \mathbf{a}, \end{aligned} \tag{10}$$

т.е. потребуется ряд Фурье для гармонической в Ω функции φ с такими же краевыми условиями, как для функции u в задаче (6). Решение этой задачи также несложно найти методом разделения переменных:

$$\varphi = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{a_m + b_m}{2 \cosh\left(\frac{m\pi d}{2}\right)} \cosh(my) + \frac{b_m - a_m}{2 \sinh\left(\frac{m\pi d}{2}\right)} \sinh(my) \right) \sin m\left(x + \frac{\pi}{2}\right). \tag{11}$$

2.2. Вторая вспомогательная задача. В процессе итерирования краевых условий потребуется также задача, отличающаяся от первой вспомогательной поворотом на угол $\pi/2$: в ней краевые условия второго рода наложены на первую компоненту скорости \tilde{U} и заданы на горизонтальной составляющей границы:

$$\begin{aligned} -\Delta\tilde{u} + \alpha\tilde{u} + \text{grad } \tilde{p} &= \mathbf{0} \quad \text{в } \Omega, \\ \text{div } \tilde{\mathbf{u}} &= 0 \quad \text{в } \Omega, \\ \frac{\partial\tilde{u}}{\partial y}\Big|_{\partial\Omega_{hor}} &= 0, \quad \tilde{u}|_{\partial\Omega_{ver}} = 0, \quad \tilde{v}|_{\partial\Omega_{hor}} = 0, \quad \tilde{v}|_{\partial\Omega_{ver}} = \tilde{\mathbf{a}}. \end{aligned} \tag{12}$$

Ее решение находится, как и в предыдущем пункте, методом разделения переменных. Чтобы не загромождать изложение, приведем окончательные формулы:

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= \sqrt{\frac{2}{d\pi}} \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{u}_m(x) \cos m\left(\frac{y}{d} + \frac{\pi}{2}\right), \quad \tilde{v} = \sqrt{\frac{2}{d\pi}} \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{v}_m(x) \sin m\left(\frac{y}{d} + \frac{\pi}{2}\right), \\ \tilde{p} &= \sqrt{\frac{2}{d\pi}} \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{p}_m(x) \cos m\left(\frac{y}{d} + \frac{\pi}{2}\right), \end{aligned} \tag{13}$$

где зависящие от x множители определены как

$$\begin{aligned} \tilde{u}_m(x) &= -\tilde{K}_2 \left[\tilde{C}_3 m \cosh(\tilde{k}x) - \tilde{C}_1 m \cosh\left(\frac{mx}{d}\right) \right] - \tilde{K}_1 \left[-\tilde{C}_4 m \sinh(\tilde{k}x) + \tilde{C}_2 m \sinh\left(\frac{mx}{d}\right) \right], \\ \tilde{v}_m(x) &= \tilde{K}_1 \left[-\tilde{C}_4 \tilde{k} \cosh(\tilde{k}x) + \tilde{C}_2 m \cosh\left(\frac{mx}{d}\right) \right] + \tilde{K}_2 \left[\tilde{C}_3 \tilde{k} \sinh(\tilde{k}x) - \tilde{C}_1 m \sinh\left(\frac{mx}{d}\right) \right], \\ \tilde{p}_m(x) &= \alpha d \left[-\tilde{K}_2 \tilde{C}_1 \sinh\left(\frac{mx}{d}\right) + \tilde{K}_1 \tilde{C}_2 \cosh\left(\frac{mx}{d}\right) \right] \end{aligned} \tag{14}$$

с коэффициентами

$$\begin{aligned} \tilde{K}_1 &= \frac{\tilde{b}_m + \tilde{a}_m}{2m \cosh\left(\frac{m\pi}{2d}\right) \sinh\left(\frac{\tilde{k}\pi}{2}\right) - 2d\tilde{k} \cosh\left(\frac{\tilde{k}\pi}{2}\right) \sinh\left(\frac{m\pi}{2d}\right)}, \\ \tilde{K}_2 &= \frac{\tilde{b}_m - \tilde{a}_m}{2d\tilde{k} \cosh\left(\frac{m\pi}{2d}\right) \sinh\left(\frac{\tilde{k}\pi}{2}\right) - 2m \cosh\left(\frac{\tilde{k}\pi}{2}\right) \sinh\left(\frac{m\pi}{2d}\right)}, \\ \tilde{C}_1 &= \cosh\left(\frac{\tilde{k}\pi}{2}\right), \quad \tilde{C}_2 = \sinh\left(\frac{\tilde{k}\pi}{2}\right), \quad \tilde{C}_3 = \cosh\left(\frac{m\pi}{2d}\right), \quad \tilde{C}_4 = \sinh\left(\frac{m\pi}{2d}\right), \quad \tilde{k} = \sqrt{\left(\frac{m}{d}\right)^2 + \alpha}. \end{aligned}$$

Величины \tilde{a}_m, \tilde{b}_m берутся из соответствующих разложений в ряды Фурье:

$$\tilde{a}(y) = \sqrt{\frac{2}{d\pi}} \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{a}_m \sin m\left(\frac{y}{d} + \frac{\pi}{2}\right), \quad \tilde{b}(y) = \sqrt{\frac{2}{d\pi}} \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{b}_m \sin m\left(\frac{y}{d} + \frac{\pi}{2}\right), \tag{15}$$

$$\text{т.е. } \tilde{a}_m = \sqrt{\frac{2}{d\pi}} \int_{-d\pi/2}^{d\pi/2} \tilde{a}(y) \sin m\left(\frac{y}{d} + \frac{\pi}{2}\right) dy, \quad \tilde{b}_m = \sqrt{\frac{2}{d\pi}} \int_{-d\pi/2}^{d\pi/2} \tilde{b}(y) \sin m\left(\frac{y}{d} + \frac{\pi}{2}\right) dy.$$

Для полноты изложения приведем ряд Фурье для гармонической в Ω функции $\tilde{\varphi}$ с такими же краевыми условиями, как для функции \tilde{u} в задаче (12):

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{\varphi} &= 0 & \text{в } \Omega, \\ \tilde{\varphi}|_{\partial\Omega_{hor}} &= 0, \quad \tilde{\varphi}|_{\partial\Omega_{ver}} = \tilde{\mathbf{a}}. \end{aligned} \quad (16)$$

Эта формула отличается от (11) заменой x на y , использованием знака \sim в числовых коэффициентах и естественным изменением местоположения параметра d :

$$\tilde{\varphi} = \sqrt{\frac{2}{d\pi}} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{\tilde{a}_m + \tilde{b}_m}{2 \cosh\left(\frac{m\pi}{2d}\right)} \cosh\left(\frac{mx}{d}\right) + \frac{\tilde{b}_m - \tilde{a}_m}{2 \sinh\left(\frac{m\pi}{2d}\right)} \sinh\left(\frac{mx}{d}\right) \right) \sin m\left(\frac{y}{d} + \frac{\pi}{2}\right). \quad (17)$$

3. Интегралы Дирихле для решений вспомогательных задач. Интеграл Дирихле для функции $f \in W_2^1(\Omega)$ имеет вид

$$D(f) \equiv |f|_{W_2^1(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \right] dx dy.$$

По определению он совпадает с квадратом полунормы функции f в пространстве $W_2^1(\Omega)$. Его привлечение здесь связано со следующим обстоятельством. Напомним определение нормы в пространстве $W_2^{1/2}(\partial\Omega)$. Пусть Ω — ограниченная область в R^2 с липшицевой границей $\partial\Omega$. Для функций φ , определенных на $\partial\Omega$, введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_{L_2(\partial\Omega)}^2 &= \int_{\partial\Omega} \varphi^2(x) dx, \quad x \in \partial\Omega, & |\varphi|_{W_2^{1/2}(\partial\Omega)}^2 &= \int_{\partial\Omega} \int_{\partial\Omega} \frac{(\varphi(x) - \varphi(y))^2}{|x - y|^2} dx dy, \quad x, y \in \partial\Omega, \\ \|\varphi\|_{W_2^{1/2}(\partial\Omega)}^2 &= \|\varphi\|_{L_2(\partial\Omega)}^2 + |\varphi|_{W_2^{1/2}(\partial\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Легко видеть, что главную трудность при вычислении норм граничных функций представляет собой неаддитивный по составляющим границу частям сингулярный интеграл — полунорма в пространстве $W_2^{1/2}(\partial\Omega)$. Однако справедливо [14, 15] следующее полезное

Утверждение 1. *Существует положительная константа c_1 , такая, что $|\varphi|_{W_2^{1/2}(\partial\Omega)} \leq c_1 |u|_{W_2^1(\Omega)}$ для любой функции $u \in W_2^1(\Omega)$, где $\varphi \in W_2^{1/2}(\partial\Omega)$ — след функции u на $\partial\Omega$. И наоборот, существует положительная константа c_2 , такая, что для любой $\varphi \in W_2^{1/2}(\partial\Omega)$ существует $u \in W_2^1(\Omega)$:*

$$u(x) = \varphi(x), \quad x \in \partial\Omega, \quad |u|_{W_2^1(\Omega)} \leq c_2 |\varphi|_{W_2^{1/2}(\partial\Omega)}.$$

Этот факт позволяет заменить трудновычисляемую норму в пространстве следов на более простое выражение — интеграл Дирихле, что особенно ценно, когда целевая функция представима в виде ряда по ортогональному базису типа косинусов или синусов. Пусть $f(x, y)$ имеет вид

$$f = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{m=1}^{\infty} f_m(y) g\left(m\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right), \quad \text{или} \quad f = \sqrt{\frac{2}{d\pi}} \sum_{m=1}^{\infty} f_m(x) g\left(m\left(\frac{y}{d} + \frac{\pi}{2}\right)\right), \quad (18)$$

где g есть \sin либо \cos ; тогда $D(f)$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} D(f) &= \sum_{m=1}^{\infty} D_m(f), \quad \text{где} \quad D_m(f) = m^2 \int_{-d\pi/2}^{d\pi/2} f_m^2(y) dy + \int_{-d\pi/2}^{d\pi/2} (f'_m(y))^2 dy, \quad \text{или} \\ D_m(f) &= \left(\frac{m}{d}\right)^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f_m^2(x) dx + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (f'_m(x))^2 dx. \end{aligned} \quad (19)$$

Так как решения вспомогательных задач были получены в удобной форме (18), то подставляя (9), (11), (14), (17) в (19), получим следующий результат.

Лемма 1. *Слагаемые интеграла Дирихле от решений задач (6), (10), (12) и (16) с параметром α в области прямоугольной формы с параметром d имеют вид*

$$\begin{aligned} D_m(u) &= (b_m - a_m)^2 P(m, d, \alpha) + (b_m + a_m)^2 Q(m, d, \alpha), \\ D_m(v) &= (b_m - a_m)^2 T(m, d, \alpha) + (b_m + a_m)^2 U(m, d, \alpha), \\ D_m(\varphi) &= (b_m - a_m)^2 W(m, d) + (b_m + a_m)^2 S(m, d), \\ D_m(\tilde{u}) &= (\tilde{b}_m - \tilde{a}_m)^2 \tilde{T}(m, d, \alpha) + (\tilde{b}_m + \tilde{a}_m)^2 \tilde{U}(m, d, \alpha), \\ D_m(\tilde{v}) &= (\tilde{b}_m - \tilde{a}_m)^2 \tilde{P}(m, d, \alpha) + (\tilde{b}_m + \tilde{a}_m)^2 \tilde{Q}(m, d, \alpha), \\ D_m(\tilde{\varphi}) &= (\tilde{b}_m - \tilde{a}_m)^2 \tilde{W}(m, d) + (\tilde{b}_m + \tilde{a}_m)^2 \tilde{S}(m, d), \end{aligned}$$

где $P, Q, T, U, \tilde{P}, \tilde{Q}, \tilde{T}, \tilde{U}$ — функции, зависящие от трех переменных m, d, α , а $W, S, \tilde{W}, \tilde{S}$ — от двух переменных m, d .

Заметим, что для функций из леммы 1 найдены точные аналитические выражения, вывод которых осуществлялся с помощью системы символьных вычислений Mathematica 4 и контролировался непосредственными подстановками.

Нам потребуется также

Лемма 2. *Для функций $T, W, U, S, \tilde{T}, \tilde{W}, \tilde{U}, \tilde{S}$ из леммы 1 при любых положительных m, d, α выполнены следующие неравенства:*

$$\frac{T(m, d, \alpha)}{W(m, d)} \leq \chi, \quad \frac{U(m, d, \alpha)}{S(m, d)} \leq \frac{1}{2} < \chi, \quad \frac{\tilde{T}(m, d, \alpha)}{\tilde{W}(m, d)} \leq \chi, \quad \frac{\tilde{U}(m, d, \alpha)}{\tilde{S}(m, d)} \leq \frac{1}{2} < \chi.$$

Константа χ может быть найдена с любой наперед заданной точностью; ее значение лежит в интервале $0.555 < \chi < 0.556$.

Неравенства из этой леммы играют важную роль при доказательстве равномерной сходимости относительно параметров d и α , однако они весьма громоздки и получаются однотипным образом. Поэтому далее предлагается только схема рассуждений, снабженная необходимыми иллюстрациями.

Рассмотрим аналитические выражения для функций T и W :

$$\begin{aligned} T(m, d, \alpha) &= \left[m^2 \cosh\left(\frac{dm\pi}{2}\right) \left(-2dk(k^2 - m^2)\pi \cosh\left(\frac{dm\pi}{2}\right) - 4km \sinh\left(\frac{dm\pi}{2}\right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (k - m)^2 \sinh\left(\frac{1}{2}d(2k + m)\pi\right) + (k + m)^2 \sinh\left(d\left(k\pi - \frac{m\pi}{2}\right)\right) \right] / [kR_1], \\ W(m, d) &= \left[m \cosh\left(\frac{dm\pi}{2}\right) \right] / \left[2 \sinh\left(\frac{dm\pi}{2}\right) \right], \quad \text{где } k = \sqrt{m^2 + \alpha}, \\ R_1 &= 16 \left[k \cosh\left(\frac{md\pi}{2}\right) \sinh\left(\frac{kd\pi}{2}\right) - m \cosh\left(\frac{kd\pi}{2}\right) \sinh\left(\frac{md\pi}{2}\right) \right]^2. \end{aligned}$$

Сделав замену переменных $y = dk - z, z = dm$, получим выражение для отношения T/W с двумя независимыми переменными y, z вместо трех:

$$\begin{aligned} \frac{T}{W} &= \left[z(4z(y + z) - (y + 2z)^2) \cosh[\pi y] - 4z(y + z) \cosh + 4z(y + z) \cosh(\pi(y + z)) + \right. \\ &\quad \left. + y^2 \cosh(\pi(y + 2z)) - 2\pi y(y + z)(y + 2z) \sinh(\pi z) \right] / [R_2], \end{aligned} \tag{20}$$

где $R_2 = 4(y + z)[(y + 2z) \sinh(\pi y/2) + y \sinh(\pi y/2 + \pi z)]^2$. В области $\{y > 0, z > 0\}$, что соответствует $\{m > 0, d > 0, \alpha > 0\}$, анализируемое отношение принимает положительные значения и имеет единственный максимум $\chi < 0.556$ при $y \rightarrow 0, z \approx 1.5$, что дает нам оценку $\frac{T(m, d, \alpha)}{W(m, d)} \leq \chi$.

Полезной иллюстрацией являются рис. 1–4. На рис. 1 изображена поверхность, задаваемая отношением (20). Для наглядности взята область $\{-1 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 4\}$, где ось ОУ расположена слева

направо, OZ — перпендикулярно ей. Рис. 2 — это линии уровня (со значениями $0.1, 0.2, \dots, 1$) полученной поверхности в той же области. Пунктиром обозначена линия $y = 0$, т.е. интересующая нас область положительных аргументов расположена справа от нее. Рис. 3, 4 — это сечения рассматриваемой поверхности при $y = 0$ и при $z = 1.5$ соответственно. Горизонтальные линии отмечают уровни 0.556 и 0.5 . Учитывая гладкость функции T/W , приведенных выше аргументов в пользу справедливости первого неравенства в лемме 2 вполне достаточно.

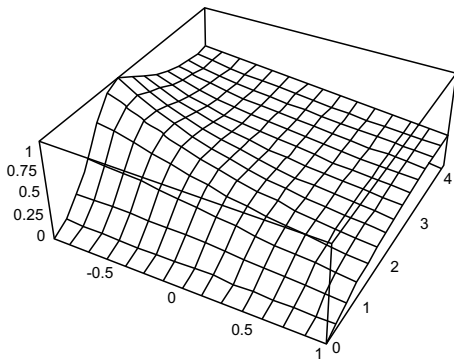


Рис. 1

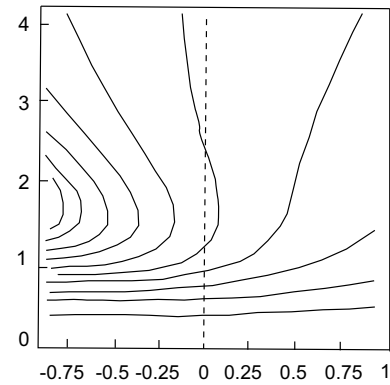


Рис. 2

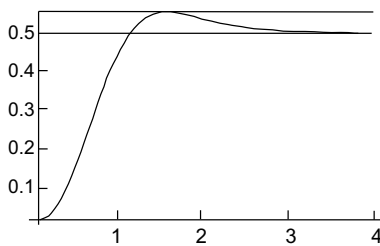


Рис. 3

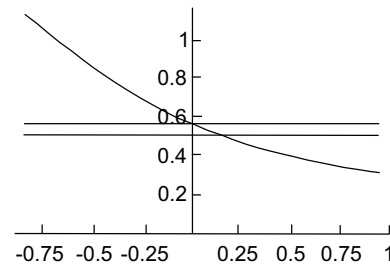


Рис. 4

4. Итерационный метод решения. Сформулируем теперь алгоритм нахождения решения исходной задачи (4). Одна итерация алгоритма состоит из двух шагов. На первом шаге решается первая вспомогательная задача, след ее решения порождает краевые условия для второго шага. На втором шаге решается вторая вспомогательная задача с определенными на первом шаге краевыми условиями, ее решение приводит к краевым условиям для первого шага следующей итерации. На первой итерации краевые условия для первого шага следуют из постановки исходной задачи. Приближение к решению исходной задачи определяется как сумма решений вспомогательных задач всех проделанных итераций.

Опишем этот процесс в используемых обозначениях.

1) Решаем первую вспомогательную задачу вида (6) с краевыми условиями

$$u|_{\partial\Omega_{\text{ver}}} = 0, \quad u|_{\partial\Omega_{\text{hor}}} = \mathbf{a}, \quad \frac{\partial v}{\partial x}|_{\partial\Omega_{\text{ver}}} = 0, \quad v|_{\partial\Omega_{\text{hor}}} = 0;$$

граничное условие \mathbf{a} взято из исходной задачи (4).

Пусть решение $\{\mathbf{u}_1 = (u_1, v_1), p_1\}$ этой вспомогательной задачи получено; определим след v_1 на вертикальной части границы: $v_1|_{\partial\Omega_{\text{ver}}} = \tilde{\mathbf{a}}_1$.

2) Решаем вторую вспомогательную задачу вида (12) с краевыми условиями

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y}|_{\partial\Omega_{\text{hor}}} = 0, \quad \tilde{u}|_{\partial\Omega_{\text{ver}}} = 0, \quad \tilde{v}|_{\partial\Omega_{\text{hor}}} = 0, \quad \tilde{v}|_{\partial\Omega_{\text{ver}}} = -\tilde{\mathbf{a}}_1;$$

здесь граничное условие $\tilde{\mathbf{a}}_1$ взято из шага 1.

Пусть решение $\{\tilde{\mathbf{u}}_1 = (\tilde{u}_1, \tilde{v}_1), \tilde{p}_1\}$ этой вспомогательной задачи получено; определим след функции \tilde{u}_1 на горизонтальной части границы: $\tilde{u}_1|_{\partial\Omega_{\text{hor}}} = \mathbf{a}_1$.

В качестве приближения $\{\mathbf{u}_{(1)}, p_{(1)}\}$ к решению $\{\mathbf{u}, p\}$ задачи (4) берется сумма $\mathbf{u}_{(1)} = \mathbf{u}_1 + \tilde{\mathbf{u}}_1$, $p_{(1)} = p_1 + \tilde{p}_1$. Для следующей итерации ненулевое краевое условие на ее первом шаге полагается равным $u|_{\partial\Omega_{\text{hor}}} = -\mathbf{a}_1$, и процедура циклически повторяется.

После n итераций алгоритм порождает приближение $\{\mathbf{u}_{(n)}, p_{(n)}\}$ к решению $\{\mathbf{u}, p\}$ задачи (4). Представим его в виде $\mathbf{u}_{(n)} = \sum_{k=1}^n \mathbf{u}_k + \tilde{\mathbf{u}}_n$, $p_{(n)} = \sum_{k=1}^n p_k + \tilde{p}_n$, где пары $\{\mathbf{u}_k, p_k\}$ и $\{\tilde{\mathbf{u}}_k, \tilde{p}_k\}$ есть решения соответствующих вспомогательных задач на итерации с номером k . Оно является точным решением задачи

$$\begin{aligned} -\Delta \mathbf{u}_{(n)} + \alpha \mathbf{u}_{(n)} + \text{grad } p_{(n)} &= \mathbf{0} & \text{в } \Omega, \\ \text{div } \mathbf{u}_{(n)} &= 0 & \text{в } \Omega, \\ u_{(n)}|_{\partial\Omega_{\text{ver}}} &= 0, \quad v_{(n)}|_{\partial\Omega} = 0, \quad u_{(n)}|_{\partial\Omega_{\text{hor}}} = \mathbf{a} + \mathbf{a}_n, \end{aligned} \tag{21}$$

где \mathbf{a}_n — след решения $\tilde{\mathbf{u}}_n$ второй вспомогательной задачи на итерации с номером n .

Таким образом, алгоритм состоит в построении и решении последовательности вспомогательных задач, где решение каждой следующей порождается следом решения предыдущей. Сумма решений этих вспомогательных задач есть приближение к решению исходной задачи (4).

5. Обоснование сходимости метода. Пусть $\mathbf{e}^{(n)} \equiv (e_1^{(n)}, e_2^{(n)}) = (u_{(n)} - u, v_{(n)} - v)$. Обозначим погрешность на n -ой итерации через $\{\mathbf{e}^{(n)}, e_p^{(n)}\} = \{\mathbf{u}_{(n)} - \mathbf{u}, p_{(n)} - p\}$.

Сравнивая (4) и (21), получаем, что погрешность $\{\mathbf{e}^{(n)}, e_p^{(n)}\}$ является решением задачи

$$\begin{aligned} -\Delta \mathbf{e}^{(n)} + \alpha \mathbf{e}^{(n)} + \text{grad } e_p^{(n)} &= \mathbf{0} & \text{в } \Omega, \\ \text{div } \mathbf{e}^{(n)} &= 0 & \text{в } \Omega, \\ e_1^{(n)}|_{\partial\Omega_{\text{ver}}} &= 0, \quad e_2^{(n)}|_{\partial\Omega} = 0, \quad e_1^{(n)}|_{\partial\Omega_{\text{hor}}} = \mathbf{a}_n. \end{aligned} \tag{22}$$

Поэтому для установления сходимости предлагаемого алгоритма при $n \rightarrow \infty$ достаточно оценить величины $\|\mathbf{a}_n\|_{W_2^{1/2}(\partial\Omega)}$. Заметим, что измеряемые краевые условия имеют ярко выраженную специфику: они отличны от нуля только на части границы и только для одной компоненты скорости. Кроме того, конструкция вспомогательных задач, а именно, значения параметра суммирования $m \geq 1$, гарантирует, что порождаемые граничные значения не могут содержать константы, отличные от нуля. Поэтому для измерения \mathbf{a}_n вместо нормы достаточно использовать полунорму $|\mathbf{a}_n|_{W_2^{1/2}(\partial\Omega)}$, которую в силу утверждения 1 можно заменить более удобной для вычисления величиной интеграла Дирихле от функции $\tilde{\mathbf{u}}_n$, являющейся решением второй вспомогательной задачи.

При проведении оценок нам потребуется еще одно известное [16]

Утверждение 2 (принцип Дирихле). В ограниченной области Ω с липшицевой границей $\partial\Omega$ среди всех функций $f \in W_2^1(\Omega)$, принимающих на границе заданное значение $f|_{\partial\Omega} = g \in W_2^{1/2}(\partial\Omega)$, минимум интеграла Дирихле достигается на гармонической функции, т.е. на решении задачи $\Delta f = 0$ в Ω , $f|_{\partial\Omega} = g$.

Теперь основной результат о сходимости рассматриваемого метода дает

Теорема. Независимо от величины параметра α и параметра вытянутости области d приближения итерационного метода удовлетворяют неравенству

$$D(\tilde{\mathbf{u}}_n) \leq \chi^{2n} D(\tilde{\mathbf{u}}_0), \quad 0.555 < \chi < 0.556.$$

Доказательство. Рассмотрим итерацию с номером n . Обозначим ненулевую граничную функцию для первой вспомогательной задачи через \mathbf{a} . Без ограничения общности можно считать, что \mathbf{a} является следом решения $\tilde{\mathbf{u}}_{n-1}$ из второй вспомогательной задачи с предыдущей итерации. Если же $n = 1$, то \mathbf{a} берется из начальной постановки задачи (4). В любом случае считаем, что определена величина $D(\tilde{\mathbf{u}}_{n-1})$, эквивалентная полунорме граничной функции \mathbf{a} .

Рассмотрим первый шаг итерации. Здесь нас будут интересовать интегралы Дирихле от решения первой вспомогательной задачи — функции v_n и некоторой гармонической функции φ_n , принимающей на $\partial\Omega$ граничное значение \mathbf{a} . Используя лемму 1, получаем явные выражения

$$\begin{aligned} D(v_n) &= \sum_{m=1}^{\infty} (b_m - a_m)^2 T(m, d, \alpha) + (b_m + a_m)^2 U(m, d, \alpha), \\ D(\varphi_n) &= \sum_{m=1}^{\infty} (b_m - a_m)^2 W(m, d) + (b_m + a_m)^2 S(m, d). \end{aligned}$$

На основании леммы 2 имеем искомые оценки для любых положительных m, d, α :

$$\frac{T(m, d, \alpha)}{W(m, d)} \leq \chi, \quad \frac{U(m, d, \alpha)}{S(m, d)} \leq \frac{1}{2} < \chi,$$

где χ может быть найдено с любой наперед заданной точностью и лежит в интервале $0.555 < \chi < 0.556$.

Из равномерности по параметру m приведенных отношений следует неравенство $D(v_n) \leq \chi D(\varphi_n)$, на основании утверждения 2 имеем $D(\varphi_n) \leq D(\tilde{u}_{n-1})$. Их последовательное применение дает оценку $D(v_n) \leq \chi D(\tilde{u}_{n-1})$.

Перейдем к анализу второго шага итерации. Используем здесь тот же прием при получении неравенств, связывающих интегралы Дирихле второй вспомогательной задачи и соответствующей гармонической функции. Обозначим след функции v_n через \tilde{a} , а через $\tilde{\varphi}_n$ — гармоническую функцию, принимающую на $\partial\Omega$ граничное значение \tilde{a} . Воспользуемся результатами леммы 1:

$$D(\tilde{u}_n) = \sum_{m=1}^{\infty} (\tilde{b}_m - \tilde{a}_m)^2 \tilde{T}(m, d, \alpha) + (\tilde{b}_m + \tilde{a}_m)^2 \tilde{U}(m, d, \alpha),$$

$$D(\tilde{\varphi}_n) = \sum_{m=1}^{\infty} (\tilde{b}_m - \tilde{a}_m)^2 \tilde{W}(m, d) + (\tilde{b}_m + \tilde{a}_m)^2 \tilde{S}(m, d).$$

Требуемые равномерные оценки отношений для любых положительных m, d, α

$$\frac{\tilde{T}(m, d, \alpha)}{\tilde{W}(m, d)} \leq \chi, \quad \frac{\tilde{U}(m, d, \alpha)}{\tilde{S}(m, d)} \leq \frac{1}{2} < \chi$$

снова дает лемма 2; здесь χ — константа из первого шага. Используя эти оценки и принцип Дирихле, как и выше, имеем неравенства $D(\tilde{u}_n) \leq \chi D(\tilde{\varphi}_n)$, $D(\tilde{\varphi}_n) \leq D(v_n)$.

Теперь имеются все необходимые оценки решений вспомогательных задач и гармонических функций. Окончательно для итерации с номером n из них следует цепочка неравенств

$$D(\tilde{u}_n) \leq \chi D(\tilde{\varphi}_n) \leq \chi D(v_n) \leq \chi^2 D(\varphi_n) \leq \chi^2 D(\tilde{u}_{n-1}),$$

из которой получим $D(\tilde{u}_n) \leq \chi^2 D(\tilde{u}_{n-1})$. Отсюда следует искомое утверждение. Теорема доказана.

Полученный результат означает убывание норм возмущений краевых условий со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем χ .

6. Результаты численных экспериментов. Для проведения численных экспериментов была взята традиционная задача о каверне. В области прямоугольной формы $\Omega = \{0 < x < L_x, 0 < y < L_y\}$ искалось решение уравнений Стокса, т.е. пара $\{\mathbf{u} = (u, v), p\}$:

$$\begin{aligned} -\Delta \mathbf{u} + \alpha \mathbf{u} + \text{grad } p &= \mathbf{0}, \\ \text{div } \mathbf{u} &= 0 \end{aligned} \tag{23}$$

с краевыми условиями следующего вида: $u = 0, v = 0$ при $x = 0, x = L_x, y = 0, u = 1, v = 0$ при $y = L_y$.

Дискретный аналог поставленной задачи был построен методом конечных разностей. Далее был применен дискретный аналог итерационного процесса, описанного выше.

В качестве иллюстрации применения предложенного алгоритма приведем результат расчета в области квадратной формы ($d = 1$) с параметром $\alpha = 10$ на сетке с шагами $h_x = h_y = 1/32$ после двух итераций.

На рис. 5 изображены линии уровня функции тока, на рис. 6 — давления, на рис. 7, 8 — горизонтальной u и вертикальной v компонент скорости соответственно. Отметим, что влияние неточно найденных граничных условий практически не сказывается на качестве рисунков уже после первых итераций.

Рис. 9, 10 демонстрируют применение алгоритма в прямоугольных областях с параметрами $d = 1/2$ и $d = 2$ соответственно, α полагалось равным 10. На них приведены линии уровня функции тока, рассчитанные при $h_x = h_y = 1/32$ после двух итераций метода.

Отметим, что качественная структура решения определяется уже на начальном этапе применения алгоритма, а затем происходит постепенное уточнение решения. Это свойство особенно ценно для быстрого получения общей картины течения жидкости.

Приведем также экспериментально посчитанные величины, характеризующие скорость сходимости, при различных значениях шагов сетки, параметра вытянутости области d и параметра α . Напомним, что

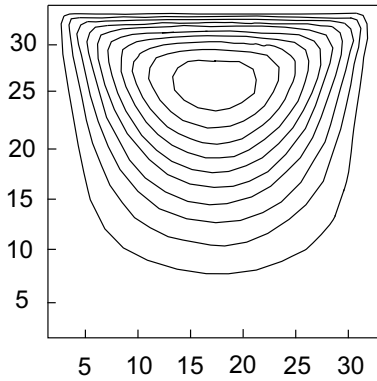


Рис. 5

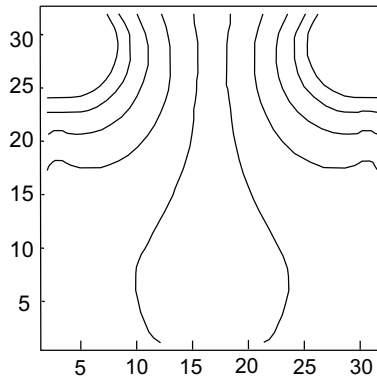


Рис. 6

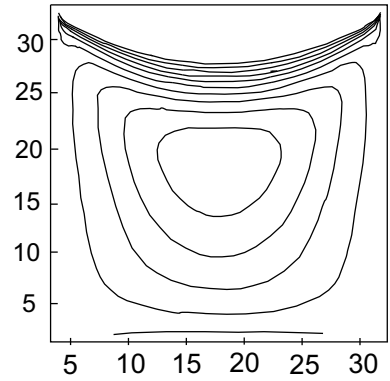


Рис. 7

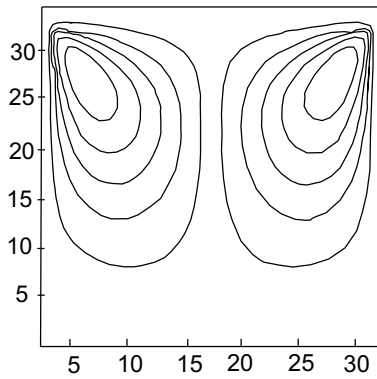


Рис. 8

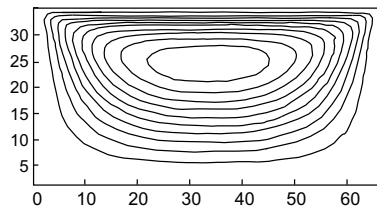


Рис. 9

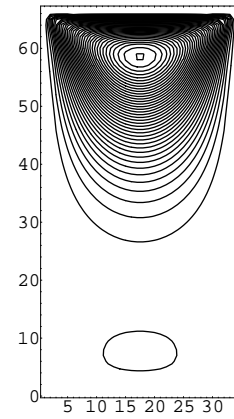


Рис. 10

теоретическое значение показателя сходимости, полученное при доказательстве на дифференциальном уровне, определено как $\chi^2 \approx 0.31$.

Для области квадратной формы ($d = 1$) при различных α и $h_x = h_y = h$ на задаче о каверне полученные значения представлены в табл. 1.

Таблица 1

$\alpha \setminus h$	1/16	1/32	1/64	1/128
1	0.038	0.066	0.092	0.11
10	0.020	0.039	0.058	0.07
100	0.0013	0.005	0.013	0.025

Приведенные характеристики означают, что реальная скорость сходимости намного выше, чем теоретическая, хотя при стремлении шагов сетки к нулю наблюдается ее естественное замедление. Заметим, что показатель χ_h^2 вычислялся для каждой итерации, а в таблицу помещены наихудшие из полученных при расчете значений.

Рассмотрим аналогичные величины для областей прямоугольной формы и различных шагов сеток: $h_y = h_x = 1/16$ (табл. 2), $h_y = h_x = 1/32$ (табл. 3). Проведенные вычисления иллюстрируют, что алгоритм сходится наиболее медленно в области квадратной формы при небольших α , т.е. равномерная по параметрам d и α сходимость действительно имеет место. Отметим, что изменение шага сетки влияет только на количественные показатели, но не меняет качественное поведение — монотонность относительно d и α .

Заключение. В работе построен итерационный метод для решения задачи Стокса с параметром в прямоугольной области со скоростью сходимости, не зависящей от параметра и от отношения сторон. Особый интерес может представлять методика оценки краевых условий, основанная на использовании интеграла Дирихле.

Таблица 2

$\alpha \setminus d$	2	4	8
1	0.026	0.025	0.019
10	0.013	0.012	0.008
100	0.001	0.0008	0.0002

Таблица 3

$\alpha \setminus d$	2	4	8
1	0.045	0.044	0.042
10	0.026	0.025	0.023
100	0.005	0.004	0.002

Приведены результаты численной реализации алгоритма на основе метода конечных разностей. Приведенные на схеме второго порядка аппроксимации расчеты полностью согласуются с теоретическими исследованиями и говорят о возможности практического применения данного метода.

Алгоритм допускает обобщение на уравнения более сложной структуры, например,

$$\begin{aligned} -\Delta \mathbf{u} + \alpha \mathbf{u} + \text{grad } p &= \mathbf{f}, \\ \text{div } \mathbf{u} + \varepsilon p &= 0, \\ \mathbf{u}|_{\partial\Omega} &= 0 \end{aligned}$$

с параметрами $\alpha, \varepsilon > 0$, где есть основания также ожидать равномерную сходимость относительно их значений.

Автор выражает искреннюю благодарность Е. В. Чижонкову за постановку задачи и полезные консультации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Girault V., Raviart P.A. Finite element methods for Navier–Stokes equations. Berlin: Springer, 1986.
2. Chizhonkov E.V., Olshanskii M.A. On the domain geometry dependence of the LBB condition // Mathematical Modelling and Numerical Analysis. 2000. **34**, N 5. 935–951.
3. Чижонков Е.В. Релаксационные методы решения седловых задач. М.: ИВМ РАН, 2002.
4. Benzi M., Golub G.H., Liesen J. Numerical solution of saddle point problems // Acta Numerica. 2005. **14**. 1–137.
5. Kobelkov G.M., Olshanskii M.A. Effective preconditioning of Uzawa type schemes for the generalized stokes problem // Numerische Mathematik. 2000. **86**. 443–470.
6. Ольшанский М.А. On numerical solution of nonstationary Stokes equations // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 1995. **10**, N 1. 81–92.
7. Пальцев Б.В. О быстроходящихся итерационных методах с неполным расщеплением граничных условий для многомерной сингулярно возмущенной системы типа Стокса // Матем. сб. 1994. **185**, № 4. 101–150.
8. Пальцев Б.В. О быстроходящихся итерационных методах с полным расщеплением граничных условий для многомерной сингулярно возмущенной системы типа Стокса // Матем. сб. 1994. **185**, № 9. 109–138.
9. Bakhvalov N.S. Solution of the Stokes nonstationary problem by the fictitious domain method // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 1995. **10**. 163–172.
10. Cahouet Ch.H., Chabard J.P. Some fast 3D finite element solvers for the generalized Stokes problem // Int. J. Numer. Methods Fluids. 1988. **8**. 869–895.
11. Ольшанский М.А. Об одной задаче типа Стокса с параметром // ЖВМ и МФ. 1996. **36**, № 2. 75–86.
12. Ольшанский М.А. О задаче Стокса с модельными краевыми условиями // Матем. сб. 1997. **188**, № 4. 127–144.
13. Каргин А.В. Численно-аналитический метод решения обобщенной задачи Стокса // Труды Матем. центра им. Н.И. Лобачевского. Т. 20. Численные методы решения линейных и нелинейных сеточных задач. Казань: Изд-во Казанского математического общества, 2003. 150–161.
14. Непомнящих С.В. Метод альтернирования Шварца для вырожденной задачи Неймана // Вычислительные алгоритмы в задачах математической физики. Новосибирск, 1985. 99–112.
15. Василевский Ю.В., Непомнящих С.В. Теоремы о продолжении сеточных функций: обзор некоторых результатов // Научный отчет ГНФ “Математика и технологии”. Москва, 1991.
16. Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Новосибирск: Наука, 1988.

Поступила в редакцию
05.10.2005