УДК 519.6

О ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ ОДНОЙ ОБОБЩЕННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА С ВЫРОЖДЕНИЕМ

И. В. Колос[1], **М. В. Колос**[2]

Получены априорные неравенства с негативной нормой для дифференциальных уравнений гиперболического типа с вырождением в случае, когда правая часть принадлежит пространству обобщенных функций. Доказаны существование и единственность обобщенного решения задач и сходимость приближенного метода решения. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 04–01–00026).

Пусть в евклидовом пространстве E_n задана замкнутая ограниченная область P с границей $\partial P = \Gamma$, в каждой точке которой существует единственная нормаль $\overline{n}_0$; $C^l(P)$ — множество l раз дифференцируемых в классическом смысле функций $u(x)$ на P; $C_0^l(P)$ — множество функций $u(x) \in C^l(P)$, для которых выполняется условие

$$u(x)\big|_{x\in\Gamma} = 0. \tag{1}$$

Введем обозначения: $L_2(P)$ — гильбертово пространство интегрируемых с квадратом функций в смысле Лебега на P; $(.,.)_{0P}$, $\|\,.\,\|_{0P}$ — скалярное произведение и норма в $L_2(P)$; $W_2^1(P)$ — позитивное соболевское пространство; $(u,v)_{1P} = \int\limits_P \Big(\sum\limits_{i=1}^n \dfrac{\partial u}{\partial x_i}\,\dfrac{\partial v}{\partial x_i} + u(x)v(x)\Big)dP$ — скалярное произведение в пространстве $W_2^1(P)$; $\|\,u\,\|_{1P} = \sqrt{(u,u)_{1P}}$ — норма в $W_2^1(P)$.

Справедливо неравенство $\|\,u\,\|_{0P} \leqslant k\|\,u\,\|_{1P}$ $\forall u \in W_2^1(P)$, $k = \text{const} > 0$.

Пусть $[0,t]$ — некоторый отрезок и переменная $\tau \in [0,t]$. Определим область $Q = P \times [0,t]$ с границей $\partial Q = S$; $L_2(Q)$ — пространство функций $u(\tau,x)$ на Q, отображающих сегмент $[0,t]$ в пространство E_n и таких, что $\int\limits_0^t \|\,u(\tau)\,\|_{0P}^2\,d\tau = \|\,u\,\|_{0Q}^2 < \infty$, $\|\,.\,\|_{0Q}$ — норма в $L_2(Q)$.

Рассмотрим на пространстве $L_2(Q)$ дифференциальный оператор $\mathcal{L}_1 u \equiv \dfrac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + \mathcal{B}u$, $u \in D(\mathcal{L}_1)$, где оператор $\mathcal{B}u \equiv -k(\tau)\sum\limits_{i,j=1}^n \dfrac{\partial}{\partial x_i}\Big(a_{ij}(x)\,\dfrac{\partial u(\tau,x)}{\partial x_j}\Big) + a_0(x)u(\tau,x)$; функция $k(\tau) \in C^1[0,t]$, $k(0) = 0$, $k(\tau) > 0$ при $\tau > 0$ и $\dfrac{d\,k(\tau)}{d\tau} > 0$ $\forall \tau \in [0,t]$; $a_{ij}(x) = a_{ji}(x) \in C^1(P)$, $i,j = 1,\dots,n$, $a_0(x) \in C(P)$, $C(P)$ — пространство непрерывных функций на множестве P, $a_0(x) \geqslant c_0 > 0$ $\forall x \in P$. Предполагаем, что справедливо также неравенство $\sum\limits_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqslant \lambda \sum\limits_{i=1}^n \xi_i^2$, где λ — положительная константа, ξ_i — произвольные вещественные числа $(i = 1,\dots,n)$; $D(\mathcal{L}_1)$ — множество функций $u(\tau,x)$, заданных в области Q и дважды непрерывно дифференцируемых по $\tau \in [0,t]$ и по переменной $x \in P$, а также удовлетворяющих условиям

$$u(\tau,x)\big|_{\tau=0} = 0, \quad \frac{\partial u(\tau,x)}{\partial \tau}\bigg|_{\tau=0} = 0, \quad u(\tau,x)\big|_{x\in\Gamma} = 0. \tag{2}$$

Оператор $\mathcal{B}$ для каждого фиксированного $\tau \in [0,t]$ имеет плотную в $L_2(P)$ область определения и является симметрическим и положительно определенным, т.е. справедливы соотношения

$$(\mathcal{B}u,v)_{0P} = (u,\mathcal{B}v)_{0P}, \quad (\mathcal{B}u,u)_{0P} \geqslant c\,\|\,u\,\|_{0P}^2, \quad c = \text{const} > 0.$$

[1] Университет Российской академии образования, ул. Б. Полянка, 58, 109180, Москва; e-mail: rektorat@urao.edu

[2] Научно-исследовательский вычислительный центр, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, 119992, Москва; e-mail: arush@srcc.msu.su

Введем обозначения: $W^1_{20}(Q)$ — пополнение множества $D(\mathcal{L}_1)$ по норме

$$\| u \|_{10Q} = \left(\int\limits_Q \left[\left(\frac{\partial u}{\partial \tau} \right)^2 + u\mathcal{B}u \right] dQ \right)^{1/2}, \tag{3}$$

$\| \cdot \|_{10Q}$, $(.,.)_{10Q}$ — норма и скалярное произведение в позитивном пространстве $W^1_{20}(Q)$; $W^{-1}_{20}(Q)$ — негативное пространство, полученное пополнением $L_2(Q)$ по норме

$$\| v \|_{-10Q} = \sup_u \left[\frac{|(u,v)_{0Q}|}{\| u \|_{10Q}},\ v \in L_2(Q),\ u \in W^1_{20}(Q),\ \| u \|_{10Q} \neq 0 \right].$$

Обозначим через $D(\mathcal{L}^*_1)$ множество функций $u(\tau,x)$, имеющих хотя бы две производных в классическом смысле по τ, а по x функции $u(\tau,x) \in D(\mathcal{B})$ и удовлетворяют условиям

$$u(\tau,x)\big|_{\tau=t} = 0, \quad \left.\frac{\partial u(\tau,x)}{\partial \tau}\right|_{\tau=t} = 0, u(\tau,x)\big|_{x\in\Gamma} = 0. \tag{4}$$

Пусть $W^1_{2t}(Q)$ — пополнение множества $D(\mathcal{L}^*_1)$ по норме (3). Через $W^{-1}_{2t}(Q)$ обозначим негативное пространство, построенное по $W^1_{2t}(Q)$ и $L_2(Q)$; $\mathcal{L}^*_1$ — сопряженный оператор к $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}^*_1 u \equiv \dfrac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + \mathcal{B}u$, $u \in D(\mathcal{L}^*_1)$.

Расширим операторы $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}^*_1$ на пространства $W^1_{20}(Q)$ и $W^1_{2t}(Q)$ соответственно. Расширенные операторы будем обозначать $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}^*$.

Введем на $W^1_{20}(Q)$ оператор

$$\mathcal{J}u \equiv \int\limits_t^\tau b^{-1}(s)u(s,x)\,ds = v(\tau,x), \tag{5}$$

где функцию $b(\tau)$ выберем так, чтобы скалярное произведение $(\mathcal{L}u, \mathcal{J}u)_{0Q}$ было положительно определено, т.е. $(\mathcal{L}u, \mathcal{J}u)_{0Q} \geqslant c\,\|u\|^2_{10Q}$, $c = \mathrm{const} > 0$. Отметим, что

$$v(t,x) = 0, \quad \frac{\partial v(\tau,x)}{\partial \tau} = b^{-1}(\tau)u(\tau,x), \quad u(\tau,x) = b(\tau)\,\frac{\partial v(\tau,x)}{\partial \tau}. \tag{6}$$

Рассмотрим скалярное произведение $(\mathcal{L}u, \mathcal{J}u)_{0Q}$. Справедливо соотношение

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}u, \mathcal{J}u)_{0Q} = (\mathcal{L}u, v)_{0Q} &= \int\limits_Q \frac{\partial^2 u(\tau,x)}{\partial \tau^2}\, v(\tau,x)\,dQ + \int\limits_Q \mathcal{B}u(\tau,x)v(\tau,x)\,dQ = \\ &= \int\limits_Q \frac{\partial^2 u(\tau,x)}{\partial \tau^2}\, v(\tau,x)\,dQ + \int\limits_Q u(\tau,x)\mathcal{B}v(\tau,x)\,dQ. \end{aligned} \tag{7}$$

Последнее равенство справедливо благодаря симметричности оператора $\mathcal{B}$.

Преобразуем первое слагаемое в правой части (7). Через $\overline{n}$ обозначим нормаль к поверхности S. Перебросим операцию дифференцирования на функцию $v(\tau,x)$; применяя формулу Грина и используя граничные условия, находим

$$(\mathcal{L}u, \mathcal{J}u)_{0Q} = (\mathcal{L}u, v)_{0Q} = \int\limits_Q u(\tau,x)\,\frac{\partial^2 v(\tau,x)}{\partial \tau^2}\,dQ - \int\limits_P u(t,x)\left.\frac{\partial v(\tau,x)}{\partial \tau}\right|_{\tau=t} dP + \int\limits_Q u(\tau,x)\mathcal{B}v(\tau,x)\,dQ. \tag{8}$$

В первое слагаемое в (8) подставим вместо $u(\tau,x)$ его выражение $u(\tau,x) = \dfrac{\partial v(\tau,x)}{\partial \tau}$ и, используя интегрирование по частям и формулу Грина, получим

$$\begin{aligned} 2\int\limits_Q b(\tau)\,\frac{\partial v(\tau,x)}{\partial \tau}\,\frac{\partial^2 v(\tau,x)}{\partial \tau^2}\,dQ = \int\limits_P b(t)\left[\left.\frac{\partial v(\tau,x)}{\partial \tau}\right|_{\tau=t}\right]^2 dP - \int\limits_P b(0)\left[\left.\frac{\partial v(\tau,x)}{\partial \tau}\right|_{\tau=0}\right]^2 dP - \\ - \int\limits_Q \frac{db(\tau)}{d\tau}\left[\frac{\partial v(\tau,x)}{\partial \tau}\right]^2 dQ. \end{aligned} \tag{9}$$

Выполняя аналогичные преобразования в третьем слагаемом в правой части (8) и учитывая условия (6), находим, что

$$2\int\limits_Q u(\tau,x)\mathcal{B}v(\tau,x)\,dQ = -\int\limits_P b(0)a_0(x)v(0,x)v(0,x)\,dP - \int\limits_Q \frac{db(\tau)}{d\tau}\,v(\tau,x)\mathcal{B}v(\tau,x)\,dQ + \\ + \int\limits_Q b(\tau)\,\frac{\partial k(\tau)}{\partial\tau}\,\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\Big[a_{ij}(x)\,\frac{\partial v(\tau,x)}{\partial x_j}\Big]v(\tau,x)\,dQ. \tag{10}$$

Подставим выражения (9) и (10) в (8). Получим

$$(\mathcal{L}u,\mathcal{J}u)_{0Q} = (\mathcal{L}u,v)_{0Q} = -\frac{1}{2}\int\limits_P b(t)\Big[\frac{\partial v(\tau,x)}{\partial\tau}\Big|_{\tau=t}\Big]^2 dP - \frac{1}{2}\int\limits_P b(0)\Big[\frac{\partial v(\tau,x)}{\partial\tau}\Big|_{\tau=0}\Big]^2 dP - \\ - \frac{1}{2}\int\limits_P b(0)a_0(x)v^2(0,x)\,dP - \frac{1}{2}\int\limits_Q \frac{db(\tau)}{d\tau}\Big[\frac{\partial v(\tau,x)}{\partial\tau}\Big]^2 dQ - \\ - \frac{1}{2}\int\limits_Q \frac{db(\tau)}{d\tau}\,v(\tau,x)\mathcal{B}v(\tau,x)\,dQ + \frac{1}{2}\int\limits_Q b(\tau)\,\frac{\partial k(\tau)}{\partial\tau}\,\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\Big[a_{ij}(x)\,\frac{\partial v(\tau,x)}{\partial x_j}\Big]v(\tau,x)\,dQ.$$

Выберем функцию $b(\tau) = -2(t+\tau)$. Тогда $b(0) = -2t$, $b(t) = -4t$, $\dfrac{db(\tau)}{d\tau} = -2$, $b^{-1}(\tau) = -\dfrac{1}{2(t+\tau)}$ и

$$(\mathcal{L}u,\mathcal{J}u)_{0Q} = (\mathcal{L}u,v)_{0Q} = 2t\int\limits_P \Big[\frac{\partial v(\tau,x)}{\partial\tau}\Big|_{\tau=t}\Big]^2 dP + t\int\limits_P \Big[\frac{\partial v(\tau,x)}{\partial\tau}\Big|_{\tau=0}\Big]^2 dP + \\ + 2t\int\limits_P b(0)a_0(x)v^2(0,x)\,dP + \int\limits_Q \Big[\frac{\partial v(\tau,x)}{\partial\tau}\Big]^2 dQ + \\ + \int\limits_Q v(\tau,x)\mathcal{B}v(\tau,x)\,dQ - \int\limits_Q (t+\tau)\,\frac{\partial k(\tau)}{\partial\tau}\,\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\Big[a_{ij}(x)\,\frac{\partial v(\tau,x)}{\partial x_j}\Big]v(\tau,x)\,dQ.$$

Учитывая, что

$$t>0,\quad \frac{dk(\tau)}{d\tau}>0,\quad \int\limits_P b(0)a_0(x)v^2(0,x)\,dP \geqslant 0,\quad v(\tau,x)\big|_{x\in\Gamma}=0,$$

$$\int\limits_P \Big[\frac{\partial v(\tau,x)}{\partial\tau}\Big|_{\tau=t}\Big]^2 dP \geqslant 0,\quad \int\limits_P \Big[\frac{\partial v(\tau,x)}{\partial\tau}\Big|_{\tau=0}\Big]^2 dP = 0 \ \Big(\text{так как } \frac{\partial v(\tau,x)}{\partial\tau} = -\frac{1}{2(t+\tau)}\,u(\tau,x),\ \text{ а } u(0,x)=0\Big),$$

$$-\int\limits_Q (t+\tau)\,\frac{\partial k(\tau)}{\partial\tau}\,\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\Big[a_{ij}(x)\,\frac{\partial v(\tau,x)}{\partial x_j}\Big]v(\tau,x)\,dQ = \int\limits_Q (t+\tau)\,\frac{\partial k(\tau)}{\partial\tau}\,\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial v(\tau,x)}{\partial x_i}\,a_{ij}(x)\,\frac{\partial v(\tau,x)}{\partial x_j}\,dQ \geqslant 0,$$

получим $(\mathcal{L}u,\mathcal{J}u)_{0Q} = (\mathcal{L}u,v)_{0Q} \geqslant \displaystyle\int\limits_Q \Big[\frac{\partial v(\tau,x)}{\partial\tau}\Big]^2 dQ + \int\limits_Q v(\tau,x)\mathcal{B}v(\tau,x)\,dQ \geqslant c\|\,v\,\|^2_{1tQ} = c\|\,\mathcal{J}u\,\|^2_{1tQ}$, т.е.

$$(\mathcal{L}u,\mathcal{J}u)_{0Q} \geqslant c\,\|\,\mathcal{J}u\,\|^2_{1tQ}. \tag{11}$$

По определению негативной нормы из (11), имеем $\|\,\mathcal{L}u\,\|_{-1tQ} = \sup\limits_{\mathcal{J}u\neq 0}\dfrac{\big|(\mathcal{L}u,\mathcal{J}u)_{0Q}\big|}{\|\,\mathcal{J}u\,\|_{1tQ}} \geqslant c\,\|\,\mathcal{J}u\,\|_{1tQ}$.

Оценим норму $\|\,\mathcal{J}u\,\|_{1tQ}$. Так как $b(\tau) = -2(t+\tau)$, то, используя определение нормы в $W^1_{2t}(Q)$, неотрицательную определенность оператора $\mathcal{B}$ на Q и (5), приходим к неравенству

$$\|\,\mathcal{J}u\,\|^2_{1tQ} = \int\limits_Q \Bigg(\int\limits_t^\tau \frac{u(s,x)}{-2(t+s)}\,ds\;\mathcal{B}\Bigg[\int\limits_t^\tau \frac{u(s,x)}{-2(t+s)}\,ds\Bigg] + \Bigg[\frac{\partial}{\partial\tau}\int\limits_t^\tau \frac{u(s,x)}{-2(t+s)}\,ds\Bigg]^2\Bigg)dQ \geqslant$$
$$\geqslant \int\limits_Q \frac{1}{4(t+\tau)^2}\,u^2(\tau,x)\,dQ \geqslant c\,\|\,u\,\|^2_{0Q},$$

где c — некоторая положительная константа, независящая от u. Этим доказано неравенство

$$\|\,\mathcal{L}u\,\|_{-1tQ} \geqslant c\,\|\,u\,\|_{0Q}. \tag{12}$$

Покажем справедливость неравенства

$$\|\,\mathcal{L}u\,\|_{-1tQ} \leqslant c\,\|\,u\,\|_{10Q}. \tag{13}$$

Для этого рассмотрим скалярное произведение $(\mathcal{L}u,v)_{0Q}$ на элементах $u\in D(\mathcal{L})$ и $v\in W^1_{2t}(Q)$. Интегрируя по частям, находим

$$(\mathcal{L}u,v)_{0Q} = -\int\limits_Q \frac{\partial u(\tau,x)}{\partial\tau}\,\frac{\partial v(\tau,x)}{\partial\tau}\,dQ + \int\limits_Q k(\tau)\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\,\frac{\partial u(\tau,x)}{\partial x_j}\,\frac{\partial v(\tau,x)}{\partial x_i}\,dQ + \int\limits_Q a_0(x)u(x)v(x)\,dQ.$$

Далее используем определение негативной нормы:

$$\|\,\mathcal{L}u\,\|_{-1tQ} = \sup_{v\neq 0}\frac{\big|(\mathcal{L}u,v)_{0Q}\big|}{\|\,v\,\|_{1tQ}} =$$
$$= \sup_{v\neq 0}\frac{\left|-\int\limits_Q \frac{\partial u(\tau,x)}{\partial\tau}\,\frac{\partial v(\tau,x)}{\partial\tau}\,dQ + \int\limits_Q k(\tau)\sum\limits_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\,\frac{\partial u(\tau,x)}{\partial x_j}\,\frac{\partial v(\tau,x)}{\partial x_i}\,dQ + \int\limits_Q a_0(x)u(x)v(x)\,dQ\right|}{\|\,v\,\|_{1tQ}} \leqslant$$
$$\leqslant c\,\sup_{v\neq 0}\frac{\big|(u,v)_{1Q}\big|}{\|\,v\,\|_{1tQ}} \leqslant c\,\sup_{v\neq 0}\frac{\|\,u\,\|_{10Q}\|\,v\,\|_{1tQ}}{\|\,v\,\|_{1tQ}} \leqslant c\,\|u\|_{10Q}.$$

Неравенство (13) доказано.

Аналогично можно получить неравенства для сопряженного оператора $\mathcal{L}^*$:

$$\|\,\mathcal{L}^*v\,\|_{-10Q} \geqslant \|\,v\,\|_{0Q}, \tag{14}$$

$$\|\,\mathcal{L}^*v\,\|_{-10Q} \leqslant \|\,v\,\|_{1tQ}. \tag{15}$$

Теперь рассмотрим вопрос о разрешимости пары задач

$$\mathcal{L}u = f, \tag{16}$$

$$\mathcal{L}^*v = g, \tag{17}$$

где u, v — искомые, а f, g — заданные элементы пространств $L_2(Q)$ или пространств W^{-1}_{2t} и W^{-1}_{20} соответственно. В этих случаях следует определить, как понимать решение задач (16) и (17).

Определение 1. *Обобщенным решением из $W^1_{20}(Q)$ задачи (16) называется функция $u\in W^1_{20}(Q)$, такая, что интегральное тождество*

$$\int\limits_Q \Bigg[-\frac{\partial v}{\partial\tau}\,\frac{\partial u}{\partial\tau} + k(\tau)\sum_{i,j=1}^n \Big(\frac{\partial v}{\partial x_i}\,a_{ij}(x)\,\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big) + va_0u\Bigg]dQ = \int\limits_Q vf\,dQ$$

выполняется для любой гладкой функции $v\in W^1_{2t}(Q)$.

Очевидно, что если обобщенное решение из $W^1_{20}(Q)$ имеет обобщенные производные до второго порядка включительно, то оно является решением уравнения (16) почти всюду в Q.

Определение 2. *Обобщенным решением задачи* (16) *называется функция* $u \in W^1_{20}(Q)$, *такая, что существует последовательность гладких функций* $\{u_i\}$, $i \to \infty$, *удовлетворяющих граничным условиям* (2), *и имеют место соотношения* $\| \mathcal{L} u_i - f\|_{-1tQ} \to 0$, $\| u_i - u\|_{10Q} \to 0$, $i \to \infty$.

Для систем вида (16), (17) определения 1 и 2 эквивалентны [6]. Из неравенств (12)–(15) следует обобщенная разрешимость пары задач (16), (17), т.е. справедлива

Теорема 1. *Для любых функций* $f \in L_2(Q)$ *и* $g \in L_2(Q)$ *существуют единственные обобщенные решения задач* (16) *и* (17) *соответственно в пространствах* $W^1_{20}(Q)$ *и* $W^1_{2t}(Q)$.

Доказательство. Рассмотрим функционал $l_f(v) = (v, f)_{0Q}$. Используя неравенство (14), находим, что $\big|l_f(v)\big| = \big|(v, f)_{0Q}\big| \leqslant \| v \|_{0Q} \|f\|_{0Q} \leqslant c \, \| \mathcal{L}^* v\|_{-10Q}$, т.е. $l_f(v)$ — непрерывный линейный функционал от $\mathcal{L}^* v$, $v \in D(\mathcal{L}^*_1)$.

Расширим по теореме Хана–Банаха этот функционал на все пространство $W^{-1}_{20}(Q)$. По обобщенной теореме Рисса [6, 8] для линейного непрерывного функционала, определенного на пространстве $W^{-1}_{20}(Q)$, существует функция $u \in W^1_{20}(Q)$, такая, что $l(\rho) = \langle u, \rho\rangle_{0Q}$ $\forall \rho \in W^{-1}_{20}(Q)$, где $\langle u, \rho\rangle_{0Q}$ — билинейная форма в пространствах $W^1_{20}(Q)$ и $W^{-1}_{20}(Q)$. Пусть $\rho = \mathcal{L}^* v$, где v и u — гладкие функции, удовлетворяющие условиям (4) и (2) соответственно. Тогда $l(\rho) \equiv \langle u, \rho\rangle_{0Q} = \langle u, \mathcal{L}^* v\rangle = (u, \mathcal{L}^* v)_{0Q} = (\mathcal{L} u, v)_{0Q} = (f, v)_{0Q}$. Функции $u(\tau, x)$, удовлетворяющие условиям (2), плотны в $W^1_{20}(Q)$. Таким образом, существует последовательность $\big\{u_i(\tau, x)\big\}_{i=1}^{\infty}$ гладких функций, удовлетворяющих (5), такая, что $\|u_i - u\|_{10Q} \to 0$, $i \to \infty$. Далее, используя неравенство (15), находим, что $\|\mathcal{L} u_i - f\|_{-1tQ} \to 0$, $i \to \infty$. Существование решения доказано. Единственность следует из неравенства (13).

Для задачи (17) существование и единственность решения доказываются аналогично.

Если $f(\tau, x) \in W^{-1}_{2t}(Q)$, а $g(\tau, x) \in W^{-1}_{20}(Q)$, то под обобщенным решением задач (16), (17) будем понимать следующее.

Определение 3. *Обобщенным решением задачи* (16) *с правой частью* $f(\tau, x) \in W^{-1}_{2t}(Q)$ *называют функцию* $u(\tau, x) \in L_2(Q)$, *такую, что для нее существует последовательность гладких функций* $\big\{u_i(\tau, x)\big\}_{i=1}^{\infty}$, $u_i \in W^1_{20}(Q)$, *удовлетворяющих соотношениям* $\|\mathcal{L} u_i - f\|_{-1tQ} \to 0$, $\|u_i - u\|_{0Q} \to 0$, $i \to \infty$.

Определение 4. *Обобщенным решением задачи* (17) *с правой частью* $g(\tau, x) \in W^{-1}_{20}(Q)$ *называют функцию* $v(\tau, x) \in L_2(Q)$, *такую, что для нее существует последовательность функций* $\big\{v_i(\tau, x)\big\}_{i=1}^{\infty}$, $v_i \in W^1_{2t}(Q)$, *удовлетворяющих соотношениям* $\|\mathcal{L}^* v - g\|_{-10Q} \to 0$, $\|v_i - v\|_{0Q} \to 0$, $i \to \infty$.

Теорема 2. *Для любых функций* $f \in W^{-1}_{2t}(Q)$ *существует единственное обобщенное решение в смысле определения* 3 *задачи* (16); *для любых* $g \in W^{-1}_{20}(Q)$ *существует единственное обобщенное решение в смысле определения* 4 *задачи* (17).

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 3 в [6].

Обратимся теперь к приближенному решению краевой задачи. Рассмотрим вначале задачу (16), когда правая часть $f \in L_2(Q)$. Ее приближенное решение будем искать в виде

$$u_k(\tau, x) = \sum_{i=1}^{k} y_i(\tau) \rho_i(x), \quad k = 1, 2, \dots, \tag{18}$$

где $\rho_i(x)$ — полная ортонормированная система гладких функций в $L_2(Q)$, удовлетворяющая условию (2), а выражение для $y_i(\tau)$ находится из соотношений

$$\begin{gathered}\Big(\frac{\partial^2 u_k}{\partial \tau^2}, \rho_j\Big)_{0P} + (\mathcal{B} u, \rho_j)_{0P} = (f, \rho_j)_{0P}, \quad (u_k(0, x), \rho_j)_{0P} = y_j(0), \quad j = 1, \dots, k, \\ \Big(\frac{\partial u_k(\tau, x)}{\partial \tau}\Big|_{\tau=0}, \rho_j\Big)_{0P} = \frac{d y_j(\tau)}{d\tau}\Big|_{\tau=0}, \quad j = 1, \dots, k.\end{gathered} \tag{19}$$

Используя (18), получаем

$$\begin{gathered}\frac{d^2 y_i(\tau)}{d\tau^2} + \sum_{s=1}^{k} y_s(\tau) (\mathcal{B} \rho_s, \rho_j)_{0P} = (f, \rho_j)_{0P}, \\ y_i(0) = 0, \quad i, j = 1, \dots, k, \quad \frac{d y_i(\tau)}{d\tau}\Big|_{\tau=0} = 0, \quad i, j = 1, \dots, k.\end{gathered} \tag{20}$$

Это уравнение можно записать в матричной форме:

$$\frac{d^2 y(\tau)}{d\tau^2} = F_k y(\tau) + G_k(\tau), \quad y(0) = 0, \quad \frac{d y(\tau)}{d\tau}\Big|_{\tau=0} = 0, \tag{21}$$

где $y(\tau)$, $G_k(\tau)$ — векторы-столбцы, $y(\tau)=\{y_1(\tau),\dots,y_k(\tau)\}$, $G_k(\tau)=\{(f,\rho_1)_{0P},(f,\rho_2)_{0P},\dots,(f,\rho_k)_{0P}\}$, $F_k=\begin{bmatrix}(\mathcal{B}\rho_1,\rho_1)_{0P} & \dots & (\mathcal{B}\rho_1,\rho_k)_{0P}\\ \dots & \dots & \dots\\ (\mathcal{B}\rho_k,\rho_1)_{0P} & \dots & (\mathcal{B}\rho_k,\rho_k)_{0P}\end{bmatrix}$. Отметим, что решение (20) понимается в смысле определения 3.

Можно показать (см. в [6]), что справедлива следующая

Лемма. *Для любой функции $f\in L_2(Q)$ справедливо неравенство $\|f\|_{0Q}\geqslant c\,\|u_k\|_{10Q}$.*

Теорема 3. *Пусть $\{\rho_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ — полная ортонормированная система гладких функций в $L_2(P)$, такая, что $\rho_i(x)\big|_{x\in\partial P}=0$, а $y_i(\tau)$ — решение задачи (20). Тогда $u_k(\tau,x)=\sum\limits_{i=1}^{k}y_i(\tau)\rho_i(x)$, $k=1,2,\dots$, задает в смысле определения 3 решение задачи (16), т.е. выполняются соотношения*

$$\|u_k-u\|_{10Q}\to 0,\quad \|\mathcal{L}u_k-f\|_{-1tQ}\to 0,\quad k\to\infty.$$

Доказательство. Согласно лемме множество функций $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ ограничено в $W_{20}^1(Q)$ и, значит, слабо компактно в $W_{20}^1(Q)$; следовательно, можно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность $\{u_{k_n}\}_{k_n=1}^{\infty}$ в $W_{20}^1(Q)$. Тогда в силу полноты $W_{20}^1(Q)$ подпоследовательность $\{u_{k_n}\}_{k_n=1}^{\infty}$ слабо сходится к некоторому пределу $\overline{u}\in W_{20}^1(Q)$. Покажем, что $\overline{u}$ — решение задачи (16). Умножим (19) на функцию $\varphi(\tau)\in W_{20}^1(Q)$ и после интегрирования от 0 до t получим

$$\big(\mathcal{L}u_{k_n},\varphi(\tau)\rho_j(x)\big)_{0Q}=\big(f,\varphi(\tau)\rho_j(x)\big)_{0Q},\quad j=1,\dots,k. \tag{22}$$

Так как $\|u_{k_n}-\overline{u}\|_{10Q}\to 0$, $k\to\infty$, то в силу неравенства (12) имеем $\|\mathcal{L}u_{k_n}-\mathcal{L}u_{k_m}\|_{-1tQ}\leqslant\|u_{k_n}-\overline{u}\,\|_{10Q}\to 0$, $n\to m$. Последовательность $\{\mathcal{L}u_{k_n}\}_{k_n=1}^{\infty}$ фундаментальна в $W_{2t}^{-1}(Q)$ и имеет предел в $W_{2t}^{-1}(Q)$. Обозначим этот предел $\mathcal{L}\,\overline{u}$. Функция $\varphi(\tau)\rho_j(x)$ принадлежит $W_{2t}^{-1}(Q)$ и (22) можно понимать в смысле билинейной формы, т.е. (22) справедливо, если $\mathcal{L}u_{k_n}\in W_{2t}^{-1}(Q)$. Перейдем к пределу по $k\to\infty$ в (22) и с учетом непрерывности скалярного произведения в L_2 получим $\big\langle\mathcal{L}\,\overline{u},\varphi(\tau)\rho_j(x)\big\rangle_{tQ}=\big\langle f,\varphi(\tau)\rho_j(x)\big\rangle_{0Q}$, $j=1,\dots,k$. Это выражение можно записать в виде

$$\big\langle\mathcal{L}\,\overline{u}-f,\varphi(\tau)\rho_j(x)\big\rangle_{tQ}=0. \tag{23}$$

В силу произвольности $\varphi(\tau)\rho_j(x)$ находим $\mathcal{L}\overline{u}-f=0$, т.е. $\overline{u}$ — решение уравнения (16), что и требовалось доказать. Следует отметить, что (23) справедливо и в случае, если $f\in W_{2t}^{-1}(Q)$.

Теорема 4. *Пусть $\{\rho_i\}_{i=1}^{\infty}$ — полная ортонормированная система гладких функций в $L_2(P)$, причем $\rho_i(x)\in W_2^1(P)$ и $\rho_(x)\big|_{x\in\partial P}=0$, функция $f(\tau,x)\in W_{2t}^{-1}(Q)$, $\{f_\varepsilon(\tau,x)\}_{\varepsilon>0}$ — последовательность осреднений функции $f(\tau,x)$, а функция $y_{i\varepsilon}(\tau)$ — решение задачи*

$$\frac{d^2y_{i\varepsilon}(\tau)}{d\tau^2}+\sum_{j=1}^{k}y_{j\varepsilon}(\tau)(\mathcal{B}\rho_j,\rho_i)_{0P}=(f_\varepsilon,\rho_i)_{0P},\quad y_{i\varepsilon}(0)=0,\quad \frac{dy_{i\varepsilon}}{d\tau}\bigg|_{\tau=0}=0,\quad i=1,2,\dots,k.$$

Тогда при $u_{k\varepsilon}(\tau,x)=\sum\limits_{i=1}^{k}y_{i\varepsilon}(\tau)\rho_i(x)$, $\|f_\varepsilon-f\|_{-1tQ}\to 0$, $\varepsilon\to 0$, справедливы соотношения

$$\|u_{k\varepsilon}-u\|_{0Q}\to 0,\quad \|\mathcal{L}u_{k\varepsilon}-f\|_{-1tQ}\to 0,\quad k\to\infty,\quad \varepsilon\to 0.$$

Доказательство. Запишем соотношение (22) для функций f и f_ε:

$$\Big(\frac{\partial^2u_{k\varepsilon}}{\partial\tau^2},\rho_j\Big)_{0P}+(\mathcal{B}u_{k\varepsilon},\rho_j)_{0P}=(f_\varepsilon,\rho_j)_{0P};\quad \Big(\frac{\partial^2u_k}{\partial\tau^2},\rho_j\Big)_{0P}+(\mathcal{B}u_k,\rho_j)_{0P}=(f,\rho_j)_{0P}.$$

После вычитания первого из второго получим

$$\Big(\frac{\partial^2(u_k-u_{k\varepsilon})}{\partial\tau^2},\rho_j\Big)_{0P}+\big(\mathcal{B}(u_k-u_{k\varepsilon}),\rho_j\big)_{0P}=(f-f_\varepsilon,\rho_j)_{0P}. \tag{24}$$

Умножая (24) на оператор $\mathcal{J}_t(y_{j\varepsilon}-y_j)=\int\limits_t^\tau\big[-2(t+s)^{-1}\big]\big[y_{j\varepsilon}(s)-y_j(s)\big]\,ds$, суммируя по j ($j=1,\dots,k$), учитывая то, что оператор $\mathcal{J}_t$ переводит элемент из $L_2(Q)$ в пространство $W_{2t}^1(Q)$, согласно (11) находим

$\big\langle \mathcal{L}(u_k - u_{k\varepsilon}), \mathcal{J}_t(u_k - u_{k\varepsilon})\big\rangle_{tQ} = \big\langle f - f_\varepsilon, \mathcal{J}_t(u_k - u_{k\varepsilon})\big\rangle_{tQ} \geqslant c\,\big\|\mathcal{J}_t(u_k - u_{k\varepsilon})\big\|^2_{1tQ}$. Отсюда, применяя обобщенное неравенство Коши–Буняковского, имеем

$$\|f - f_\varepsilon\|_{-1tQ} \geqslant c\,\big\|\mathcal{J}_t(u_k - u_{k\varepsilon})\big\|_{1tQ} \geqslant c\,\|u_k - u_{k\varepsilon}\|_{0Q} \tag{25}$$

и, по теореме 3, $\|u_{k\varepsilon} - u_\varepsilon\|_{10Q} \to 0$, $\|\mathcal{L}u_{k\varepsilon} - f_\varepsilon\|_{-1tQ} \to 0$, $k \to \infty$.

Имеет место соотношение (см. (12))

$$c_0\,\|u_{k\varepsilon} - u_\varepsilon\|_{0Q} \leqslant \big\|\mathcal{L}(u_{k\varepsilon} - u_\varepsilon)\big\|_{-1tQ}. \tag{26}$$

Так как $\|f - f_\varepsilon\|_{-1tQ} \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, то последовательность $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ фундаментальна. Действительно, $\|f_{\varepsilon_1} - f_\varepsilon\|_{-1tQ} \to 0$ при $\varepsilon_1, \varepsilon \to 0$ и из (26) вытекает, что $\|u_\varepsilon - u_{\varepsilon_1}\|_{0Q} \to 0$, $\varepsilon_1, \varepsilon \to 0$. Обозначим $\overline{u} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} u_\varepsilon$. Покажем, что $\overline{u} = u$. Неравенство (12) справедливо для всех $u \in L_2(Q)$, т.е. $\|\mathcal{L}u_\varepsilon\|_{-1tQ} \geqslant c\,\|u_\varepsilon\|_{0Q}$; следовательно,

$$\big\|\mathcal{L}(u_{k\varepsilon} - u)\big\|_{-1tQ} = \|f_\varepsilon - f\|_{-1tQ} \geqslant c\,\|u_\varepsilon - u\|_{0Q}. \tag{27}$$

Переходя к пределу по $\varepsilon \to 0$, находим $0 \geqslant c\|\,\overline{u} - u\|_{0Q}$, но $c > 0$ и поэтому $\overline{u} = u$.

Оценим норму $\|u_k - u\|_{0Q}$. Применяя неравенство треугольника, находим

$$\|u_k - u\|_{0Q} \leqslant \|u - u_\varepsilon\|_{0Q} + \|u_\varepsilon - u_{k\varepsilon}\|_{0Q} + \|u_{k\varepsilon} - u_k\|_{0Q}.$$

Выбирая ε и k так, чтобы $\|u - u_\varepsilon\|_{0Q} \leqslant \dfrac{\delta}{3}$, $\|u_\varepsilon - u_{k\varepsilon}\|_{0Q} \leqslant \dfrac{\delta}{3}$, $\|u_{k\varepsilon} - u_k\|_{0Q} \leqslant \dfrac{\delta}{3}$ ($\delta > 0$, δ — фиксированное произвольное число) и используя (26) и теорему 3, получим $\|u_k - u\|_{0Q} < \delta \to 0$, $k \to \infty$, где $u_k(t,x) = \sum\limits_{i=1}^{k} y_i(\tau)\rho_i(x)$, $k = 1, 2, \ldots$. Введем обозначения

$$\mathcal{S}y_i \equiv \frac{d^2 y_i(\tau)}{d\tau^2} - F_k y_i(\tau) = G_k(\tau); \quad G_k(\tau) \in W_2^{-1}[0,t], \quad y_i(0) = 0, \quad \left.\frac{dy_i(\tau)}{d\tau}\right|_{\tau=0} = 0, \quad i = 1, \ldots, k.$$

Для функции $y_i(\tau) \in L_2[0,t]$ существует последовательность гладких функций $\big\{\xi_i(\tau)\big\}_{i=1}^{\infty}$, таких, что $\xi_i(0) = 0$, $\left.\dfrac{d\xi_i(\tau)}{d\tau}\right|_{\tau=0} = 0$, $i = 1, 2, \ldots$, и $\big\|y(\tau) - \xi_i(\tau)\big\|_0 \to 0$, $\big\|\mathcal{S}\xi_i(\tau) - G_k(\tau)\big\|_{-10} \to 0$, $i \to \infty$ [5, 8]. Теорема 4 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Березанский Ю.М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Киев: Наукова думка, 1965.
2. *Гординг Л.* Задача Коши для гиперболических уравнений. М.: ИЛ, 1961.
3. *Диденко В.П.* О краевых задачах для многомерных гиперболических уравнений с вырождением // ДАН СССР. 1972. **205**, № 4. 352–355.
4. *Диденко В.П.* О некоторых краевых задачах для многомерного уравнения смешанного типа // Дифференц. уравн. 1973. **9**, № 1. 43–51.
5. *Колос М.В., Колос И.В.* Методы оптимальной линейной фильтрации. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2001.
6. *Колос М.В., Колос И.В.* О разрешимости обобщенной задачи Дирихле для гиперболического уравнения // Вычислительные методы и программирование. 2002. **3**, № 2. 68–78.
7. *Колос М.В., Колос И.В.* О приближенном решении обобщенной смешанной краевой задачи для уравнений параболического и гиперболического типов // Вычислительные методы и программирование. 2004. **5**, № 2. 149–161.
8. *Ляшко И.И., Диденко В.П., Цитрицкий О.Е.* Фильтрация шумов. Киев: Наукова думка, 1979.
9. *Соболев С.Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988.

Поступила в редакцию
11.09.2005