УДК 517.958

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ЛОКАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕНИЯ

Н. Л. Гольдман

Изучается класс обратных задач, связанных с нахождением неизвестной правой части в квазилинейном параболическом уравнении общего вида по дополнительной информации, заданной в фиксированной внутренней точке области. Исследована проблема единственности решения в пространствах Гельдера, рассмотрены вопросы построения устойчивых приближенных решений этого класса некорректных задач.

Введение. Данная работа продолжает исследование обратных задач для квазилинейных параболических уравнений общего вида с неизвестной правой частью [1–4]. Теория таких задач, называемых иногда задачами об источнике для параболических уравнений, еще недостаточно развита, особенно в квазилинейном случае. Их изучение вызвано также и практическим интересом, который представляют обратные задачи об источнике в самых разных приложениях. В частности, рассматриваемый ниже класс обратных задач возникает при моделировании и управлении нелинейными процессами диффузии и фильтрации в пористой среде, в которых требуется найти распределение по времени мощности источников на основе информации о соответствующих измерениях во внутренней точке области.

Основное внимание в данной работе уделено вопросам постановок обратных задач с локальным условием переопределения и единственности их решения в классах Гельдера. Исследование проблемы единственности основано на изучении свойств обобщенных решений соответствующих сопряженных задач для линейных параболических уравнений, правая часть которых содержит δ-функцию. При доказательстве отсутствия ортогонального дополнения к множеству следов обобщенных решений они рассматриваются как пределы классических решений уравнений со сглаженной правой частью. Предлагаемый в работе подход позволяет получить достаточные условия единственности решения обратных задач с локальным условием переопределения, которые расширяют класс обратных задач, обладающих свойством единственности (ср., например, с [5]). В работе рассмотрен также вопрос устойчивости приближенного решения в пространствах Гельдера для этого класса некорректных задач на основе регуляризирующего метода квазирешений.

1. Постановка обратной задачи с граничными условиями первого рода. Пусть квазилинейная краевая задача с заданной правой частью уравнения (т.е. в прямой постановке) состоит в определении функции $u(x,t)$ в области $\overline{Q}=\{0\leqslant x\leqslant l, 0\leqslant t\leqslant T\}$ из условий

$$c(x,t,u)u_t - Lu = p_0(x,t)f(t) + p_1(x,t), \quad (x,t)\in Q, \tag{1}$$

$$u|_{x=0} = v_0(t), \quad u|_{x=l} = v_1(t), \quad 0 < t \leqslant T, \tag{2}$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad 0\leqslant x\leqslant l, \tag{3}$$

где $Lu \equiv (a(x,t,u)u_x)_x - b(x,t,u)u_x - d(x,t,u)$ — равномерно эллиптический оператор, $a\geqslant a_{\min}>0$, b, $c\geqslant c_{\min}>0$, d, f, p_i, v_i $(i=0,1)$, φ — известные функции своих аргументов, $a_{\min}$, $c_{\min}=\mathrm{const}>0$.

Если функция $f(t)$ в правой части уравнения (1) неизвестна, но во внутренней точке $x=l_0$, $0<l_0<l$, задана дополнительная информация о решении прямой задачи (1)–(3):

$$u|_{x=l_0} = g(t), \quad 0\leqslant t\leqslant T, \tag{4}$$

где $g(t)$ — известная при $0\leqslant t\leqslant T$ функция, то возникает так называемая *обратная задача с локальным условием переопределения*: найти функции $u(x,t)$ в области $\overline{Q}$ и $f(t)$ при $0\leqslant t\leqslant T$, удовлетворяющие

[1] Научно-исследовательский вычислительный центр, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, 119992, Москва; e-mail: arush@srcc.msu.su

условиям (1) – (3) и (4), в которых входные данные $a > 0$, b, $c > 0$, d, p_i, v_i $(i = 0, 1)$, φ и g предполагаются заданными.

Сформулируем требования к входным данным обратной задачи (1) – (4), используя стандартные обозначения классов функций из [6].

1. При $(x,t) \in \overline{Q}$, $|u| < \infty$, функции a, a_x, a_u, b, c, d равномерно ограничены, $a \geqslant a_{\min} > 0$, $c \geqslant c_{\min} > 0$.

2. При $(x,t,u) \in \overline{D} = \overline{Q} \times [-M_0, M_0]$ $(M_0 \geqslant \max_{(x,t)\in\overline{Q}} |u|)$ функции a и c принадлежат $H^{1,\lambda/2,1}(\overline{D})$, функции b, d, a_x, a_u принадлежат $H^{\lambda,\lambda/2,1}(\overline{D})$, $0 < \lambda < 1$.

3. Функции $p_0(x,t)$ и $p_1(x,t)$ принадлежат $H^{\lambda,\lambda/2}(\overline{Q})$, $|p_0(x,t)| \geqslant p_0 > 0$ при $(x,t) \in \overline{Q}$, функции $\varphi(x)$ и $v_i(t)$ принадлежат, соответственно, $H^{2+\lambda}[0,l]$ и $H^{1+\lambda/2}[0,T]$, выполнены условия согласования при $t = 0$: $v_0|_{t=0} = \varphi|_{x=0}$, $v_1|_{t=0} = \varphi|_{x=l}$.

4. Функция $g(t)$ принадлежит $H^{1+\lambda/2}[0,T]$, $g|_{t=0} = \varphi|_{x=l_0}$.

5. Выполнены условия согласования входных данных:

$$\begin{aligned} c(x,0,\varphi)v_{0t} - L\varphi|_{x=0,t=0} &= p_0(x,0)g^* + p_1(x,0)|_{x=0}, \\ c(x,0,\varphi)v_{1t} - L\varphi|_{x=l,t=0} &= p_0(x,0)g^* + p_1(x,0)|_{x=l}, \end{aligned} \tag{5}$$

где

$$g^* = \{(c(x,0,\varphi)g_t - L\varphi)|_{x=l_0,t=0} - p_1(l_0,0)\}/p_0(l_0,0).$$

Требования 1 – 3 обеспечивают существование и единственность решения квазилинейной краевой задачи (1) – (3) в классе Гельдера $u(x,t) \in H^{2+\lambda,1+\lambda/2}(\overline{Q})$ при любой функции $f(t) \in H^{\lambda/2}[0,T]$ в правой части уравнения (1), удовлетворяющей условиям согласования при $t = 0$ (см. [6]):

$$c(x,0,\varphi)v_{0t} - L\varphi|_{x=0,t=0} = p_0(x,0)f|_{t=0} + p_1(x,0)|_{x=0},$$

$$c(x,0,\varphi)v_{1t} - L\varphi|_{x=l,t=0} = p_0(x,0)f|_{t=0} + p_1(x,0)|_{x=l}.$$

Требование 5 к входным данным является следствием этих условий и соответствующих условий согласования для функции $g(t)$:

$$c(x,0,\varphi)g_t - L\varphi|_{x=l_0,t=0} = p_0(l_0,0)f|_{t=0} + p_1(l_0,0).$$

На основании требований 1 – 5 дадим следующее

Определение 1. Решением обратной задачи (1) – (4) в классах Гельдера назовем пару функций $\{u^0(x,t), f^0(t)\}$:

$$u^0(x,t) \in H^{2+\lambda,1+\lambda/2}(\overline{Q}), \quad f^0(t) \in H^{\lambda/2}[0,T], \quad 0 < \lambda < 1,$$

удовлетворяющих соотношениям (1) – (4) в обычном смысле.

2. Единственность решения обратной задачи (1) – (4) в классах Гельдера. Рассматриваемая задача не может иметь двух различных решений в смысле определения 1.

2.1. Сформулируем соответствующую теорему.

Теорема 1. *Пусть выполнены требования* 1 – 5 *и, кроме того, производные* b_x *и* c_t *непрерывны при* $(x,t,u) \in \overline{D}$. *Тогда в случае существования решения* $\{u^0(x,t), f^0(t)\}$ *обратной задачи* (1) – (4) *в классах Гельдера* $H^{2+\lambda,1+\lambda/2}(\overline{Q}) \times H^{\lambda/2}[0,T]$ *это решение определяется однозначно.*

Доказательство. Допустим, что $\{u_1^0, f_1^0\}$ и $\{u_2^0, f_2^0\}$ — два решения обратной задачи (1) – (4). Функции u_1^0 и u_2^0 можно рассматривать как решения первой краевой задачи (1) – (3), соответствующие функциям f_1^0 и f_2^0 в правой части уравнения (1). Следовательно, для них справедливы оценки в классе Гельдера $H^{2+\lambda,1+\lambda/2}(\overline{Q})$ [6]:

$$|u_1^0, u_2^0|_Q^{2+\lambda,1+\lambda/2} \leqslant M, \quad M = \text{const} > 0. \tag{6}$$

Для разностей $\Delta u = u_2^0 - u_1^0$ и $\Delta f = f_2^0 - f_1^0$ в силу (1) – (4) имеют место соотношения

$$c(x,t,u_1^0)\Delta u_t - \mathcal{L}\Delta u = p_0(x,t)\Delta f(x), \quad (x,t) \in Q, \tag{7}$$

$$\Delta u|_{x=0} = 0, \quad \Delta u|_{x=l} = 0, \quad \Delta u|_{x=l_0} = 0, \quad 0 < t \leqslant T, \tag{8}$$

$$\Delta u|_{t=0} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{9}$$

в которых

$$\mathcal{L}\Delta u \equiv (a(x,t,u_1^0)\Delta u_x)_x - \mathcal{A}_1\Delta u_x - \mathcal{A}_2\Delta u, \quad \mathcal{A}_1 = b(x,t,u_1^0) - a_u(x,t,u_1^0)u_{2x}^0.$$

Вид коэффициента $\mathcal{A}_2$, зависящего соответствующим образом от производных u^0_{2x}, u^0_{2xx}, u^0_{2t} и от значений функций a_u, a_{xu}, a_{uu}, b_u, c_u, d_u, см. в [1]. Требования гладкости к входным данным и оценки (6) для $u^0_1(x,t)$ и $u^0_2(x,t)$ позволяют заключить, что все коэффициенты линейного параболического уравнения (7) непрерывны как функции (x,t).

2.1.1. Из (5) следует, что $\Delta f|_{t=0} = 0$. Для доказательства утверждения, что $\Delta u = 0$ в $\overline{Q}$, $\Delta f = 0$ при $0 \leqslant t \leqslant T$, требуется изучить свойства краевой задачи, сопряженной с задачей (7) – (9). Она имеет следующий вид.

$$(c(x,t,u^0_1)\psi)_t + \mathcal{L}^*\psi = \eta(t)\delta_{l_0}(x), \quad 0 < x < l, \quad 0 \leqslant t < T, \tag{10}$$

$$\psi|_{x=0} = 0, \quad \psi|_{x=l} = 0, \quad 0 \leqslant t < T, \tag{11}$$

$$\psi|_{t=T} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{12}$$

где $\mathcal{L}^*\psi \equiv (a(x,t,u^0_1)\psi_x)_x + (\mathcal{A}_1\psi)_x - \mathcal{A}_2\psi$, $\eta(t)$ — произвольная функция из $C[0,T]$ и где $\delta_{l_0}(x)$ — δ-функция точки $x = l_0$:

$$\delta_{l_0}(x) = 0 \text{ при } x \neq l_0, \quad \delta_{l_0}(x) = \infty \text{ при } x = l_0, \quad \int\limits_0^l \delta_{l_0}(x)\,dx = 1.$$

Заметим, что $\delta_{l_0}(x)$ — суммируемая в смысле Лебега функция, т.е. $\delta_{l_0}(x) \in L_1[0,l]$.

Следуя [6], назовем обобщенным решением задачи (10) – (12) в классе $\overset{0}{V}{}_2^{1,0}(Q)$ $(\overset{0}{V}{}_2^{1,1/2}(Q))$ функцию $\psi(x,t)$ из $\overset{0}{V}{}_2^{1,0}(Q)$ $(\overset{0}{V}{}_2^{1,1/2}(Q))$, удовлетворяющую тождеству

$$I(\psi,\zeta) \equiv -\int\limits_0^T\int\limits_0^l c\psi\zeta_t\,dx\,dt + \int\limits_0^T\int\limits_0^l \{(\mathcal{A}_1\psi)_x - \mathcal{A}_2\psi\}\zeta\,dx\,dt - \int\limits_0^T\int\limits_0^l a\psi_x\zeta_x\,dx\,dt - \int\limits_0^T \eta(t)\zeta(l_0,t)\,dt = 0 \tag{13}$$

при любой гладкой функции $\zeta(x,t)$, равной 0 при $x = 0$, $x = l$, $t = 0$.

Правая часть $F(x,t) = \eta(t)\delta_{l_0}(x)$ уравнения (10) принадлежит пространству $L_{1,\infty}(Q)$, так как $\eta(t) \in C[0,T]$, $\delta_{l_0}(x) \in L_1[0,l]$:

$$\|F\|_{L_{1,\infty}(Q)} = \max_{0\leqslant t\leqslant T}|\eta(t)|\|\delta_{l_0}(x)\|_{L_1[0,l]} = \max_{0\leqslant t\leqslant T}|\eta(t)|\int\limits_0^l|\delta_{l_0}(x)|\,dx = \max_{0\leqslant t\leqslant T}|\eta(t)| < \infty.$$

В силу достаточной гладкости коэффициентов уравнения (10) и принадлежности $F(x,t)$ пространству $L_{1,\infty}(Q)$ выполнены условия однозначной разрешимости задачи (10) – (12) в $\overset{0}{V}{}_2^{1,0}(Q)$ $(\overset{0}{V}{}_2^{1,1/2}(Q))$ и для ее обобщенного решения в смысле определения (13) справедлива оценка [6]

$$\|\psi\|_{\overset{0}{V}{}_2^{1,0}(Q)} \leqslant K_1\|F\|_{L_{1,\infty}(Q)}, \quad K_1 = \text{const} > 0.$$

Известно также [6], что дифференциальные свойства обобщенных решений улучшаются по мере увеличения гладкости коэффициентов и правой части уравнения. Причем, как и для классических решений, это улучшение носит локальный характер, т.е. гладкость решения в некоторой подобласти $Q^* \subset Q$ определяется гладкостью входных данных лишь в некоторой окрестности подобласти Q^*. Применительно к задаче (10) – (12) это означает, что $\psi(x,t) \in C^{2,1}$ в любых областях $Q' \subset Q$, $Q'' \subset Q$ вида

$$Q' = \{0 \leqslant x \leqslant l_0 - \varepsilon, 0 \leqslant t \leqslant T\} \subset Q, \quad Q'' = \{l_0 + \varepsilon \leqslant x \leqslant l, 0 \leqslant t \leqslant T\} \subset Q, \quad \varepsilon > 0,$$

учитывая требования 1 – 5 к входным данным и свойство правой части $F(x,t)$ в силу определения δ-функции: $F(x,t) \equiv 0$ в Q' и Q''. Соответственно, производная $\psi_x(x,t)$ принадлежит классу $H^{1,1/2}$ в областях Q' и Q''.

Более того, как установлено в [6] для n-мерного случая, если коэффициенты и правая часть линейного параболического уравнения принадлежат $L_{q,r}(Q)$ с условием $r/2 + n/(2q) < 1$, то любое обобщенное решение из $V_2^{1,1/2}(Q)$ принадлежит классу Гельдера $H^{\alpha,\alpha/2}(Q)$ с показателем $\alpha = 1 - \{r/2 + n/(2q)\}$. Применительно к задаче (10) – (12) это означает, что ее обобщенное решение непрерывно в смысле Гельдера во всей области $\overline{Q}$: $\psi(x,t) \in H^{1/2,1/4}$ (в нашем случае $n = 1$, $q = 1$, $r = \infty$).

2.1.2. Рассмотрим последовательность краевых задач со сглаженной правой частью:

$$(c(x,t,u_1^0)\psi)_t + \mathcal{L}^*\psi = \eta(t)\delta_{l_0,n}(x), \quad 0 < x < l, \quad 0 \leqslant t < T, \tag{14}$$

$$\psi|_{x=0} = 0, \quad \psi|_{x=l} = 0, \quad 0 \leqslant t < T, \tag{15}$$

$$\psi|_{t=T} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{16}$$

где $\delta_{l_0,n}(x)$ — соболевское усредняющее ядро, т.е. функция вида

$$\delta_{l_0,n}(x) = \frac{1}{\varepsilon_n}\omega\left(\frac{|x-l_0|}{\varepsilon_n}\right), \quad \varepsilon_n \to 0 \ \text{ при } \ n \to \infty,$$

$\omega(|y|)$ — бесконечно дифференцируемая неотрицательная функция, равная 0 при $|y| \geqslant 1$ и такая, что $\int\limits_{|y|\leqslant 1} \omega(y)\,dy = 1$.

Усредняющее ядро $\delta_{l_0,n}(x)$ — бесконечно дифференцируемая неотрицательная функция, имеющая носитель на интервале $(l_0-\varepsilon_n, l_0+\varepsilon_n)$ (который принадлежит отрезку $[0,l]$ при $\varepsilon_n \leqslant \min(l_0, l-l_0)$) и удовлетворяющая условию (см., например, [6, 7]):

$$\int\limits_{l_0-\varepsilon_n}^{l_0+\varepsilon_n} \delta_{l_0,n}(x)\,dx = 1, \quad \int\limits_0^l \delta_{l_0,n}(x)\,dx = 1.$$

Последовательность $\delta_{l_0,n}(x)$ сходится слабо в $L_1[0,l]$ к δ-функции точки $x = l_0$:

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^l \delta_{l_0,n}(x)\,dx = \int\limits_0^l \delta_{l_0}(x)\,dx = 1; \tag{17}$$

при этом для любой непрерывной функции $w(x)$ имеем

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{l_0-\varepsilon_n}^{l_0+\varepsilon_n} \delta_{l_0,n}(x) w(x)\,dx = w(l_0). \tag{18}$$

Все коэффициенты в уравнении (14), рассматриваемые как функции (x,t), непрерывны в $\overline{Q}$ в силу предположений теоремы 1 относительно функций a, b, c, d и в силу оценок (6) для $u_1^0(x,t)$ и $u_2^0(x,t)$. Следовательно, при любом фиксированном n задача (14)–(16), являясь линейной краевой задачей относительно функции $\psi(x,t)$, имеет единственное решение $\psi_n(x,t)$ в $C^{2,1}(\overline{Q})$ [6]. Принадлежность $\psi_n(x,t)$ классу $C^{2,1}$ во всей замкнутой области $\overline{Q}$ имеет место в силу того, что при условии $\varepsilon_n \leqslant \min(l_0, l-l_0)$ функция $\delta_{l_0,n}(x)$ равна 0 при $x = 0$, $x = l$ и тем самым выполнены условия согласования первого порядка при $x = 0$, $x = l$ и $t = T$. Кроме того, очевидно, что производная $\psi_{nx}(x,t)$ принадлежит классу Гельдера $H^{1,1/2}(\overline{Q})$.

Как всякое классическое решение функция $\psi_n(x,t)$ является также и обобщенным решением первой краевой задачи (14)–(16) в $\overset{0}{V}{}_2^{1,0}(Q)$ $(\overset{0}{V}{}_2^{1,1/2}(Q))$, так как очевидно, что $\psi_n(x,t)$ принадлежит этим пространствам и для нее справедливо интегральное тождество вида (13). Покажем, что при $n \to \infty$ функции $\psi_n(x,t)$ как обобщенные решения из $V_2^{1,0}(Q)$ последовательности краевых задач (14)–(16) с правой частью $F_n(x,t) = \eta(t)\delta_{l_0,n}(x)$ сходятся сильно в $V_2^{1,0}(Q)$ к обобщенному решению $\psi(x,t)$ предельной задачи (10)–(12) с правой частью $F(x,t) = \eta(t)\delta_{l_0}(x)$.

Действительно, в нашем случае имеет место оценка [6]

$$\|\psi_n - \psi\|_{V_2^{1,0}(Q)} \leqslant K_2 \|F_n - F\|_{L_{1,\infty}(Q)}, \quad K_2 = \text{const} > 0.$$

Но при $n \to \infty$

$$\|F_n - F\|_{L_{1,\infty}(Q)} = \text{vraimax}_{0\leqslant t\leqslant T}\|F_n - F\|_{L_1[0,l]} = \max_{0\leqslant t\leqslant T}|\eta(t)| \int\limits_0^l |\delta_{l_0,n}(x) - \delta_{l_0}(x)|\,dx \to 0$$

в силу слабой сходимости $\delta_{l_0,n}(x)$ в $L_1[0,l]$ к δ (см. (17)).

Из определения нормы в $V_2^{1,0}(Q)$ сходимость $\psi_n(x,t)$ к $\psi(x,t)$ означает, что при $n\to\infty$

$$\|\psi_n-\psi\|_{V_2^{1,0}(Q)}=\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|\psi_n-\psi\|_{L_2[0,l]}+\|\psi_{nx}-\psi_x\|_{L_2(Q)}\to 0. \tag{19}$$

Но в силу оценки (см. [6])

$$\|\psi_n-\psi\|_{L_2(Q)}\leqslant K_3\|\psi_n-\psi\|_{V_2^{1,0}(Q)},\quad K_3=\mathrm{const}>0,$$

отсюда следует, что при $n\to\infty$ $\psi_n(x,t)$ сходятся к $\psi(x,t)$ сильно и в $L_2(Q)$. Из (19) также вытекает, что производные $\psi_{nx}(x,t)$ сходятся сильно в $L_2(Q)$ к $\psi_x(x,t)$.

Заметим далее, что из сильной сходимости $\psi_n(x,t)$ в $L_2(Q)$ следует, что при $n\to\infty$

$$\int_0^l J_n(x)\,dx\to 0,\ \text{где}\ J_n(x)=\int_0^T\{\psi_n(x,t)-\psi(x,t)\}^2\,dt,\quad J_n(x)\geqslant 0.$$

Это означает, что $J_n(x)\rightrightarrows 0$ при $n\to\infty$ по мере [8], т.е. на основании теоремы Рисса можно выделить подпоследовательность $J_{n_k}(x)$, которая сходится к 0 при $k\to\infty$ при почти всех $x\in[0,l]$. Без ограничения общности будем считать, что вся последовательность $J_n(x)\to 0$ при $n\to\infty$ при почти всех $x\in[0,l]$. Тогда из определения $J_n(x)$ следует, что при почти всех $\overline{x}\in[0,l]$ следы функций $\psi_n(x,t)|_{x=\overline{x}}$ сходятся сильно в $L_2[0,T]$ к следу функции $\psi(x,t)$ при $x=\overline{x}$. В силу непрерывности $\psi_n(x,t)$ и $\psi(x,t)$ заключаем, что такая сходимость имеет место при любом $\overline{x}\in[0,l]$.

Аналогичным образом, используя свойства производных $\psi_{nx}(x,t)$ и $\psi_x(x,t)$ ($\psi_{nx}\in H^{1,1/2}(\overline{Q})$, $\psi_x\in H^{1,1/2}$ в Q' и Q''), можно установить, что для их следов имеет место сильная сходимость в $L_2[0,T]$:

$$\int_0^T\{\psi_{nx}(x,t)|_{x=\overline{x}}-\psi_x(x,t)|_{x=\overline{x}}\}^2\,dt\to 0\quad\text{при } n\to\infty$$

при всех $\overline{x}$ из интервалов $[0,l_0-\varepsilon]$, $[l_0+\varepsilon,l]$ и при почти всех $\overline{x}\in(l_0-\varepsilon,l_0+\varepsilon)$. При этом мера множества E_n точек $\overline{x}\in(l_0-\varepsilon,l_0+\varepsilon)$, в которых

$$\int_0^T\{\psi_{nx}(x,t)|_{x=\overline{x}}-\psi_x(x,t)|_{x=\overline{x}}\}^2\,dt>\sigma,$$

при любом $\sigma>0$ удовлетворяет условию $\lim\operatorname{mes}E_n=0$ при $n\to\infty$ [8].

2.1.3. В дальнейшем для доказательства единственности решения исходной задачи (1)–(4) потребуются следующие свойства решений сопряженной задачи (10)–(12) и последовательности краевых задач (14)–(16).

Лемма 1. *Для любой функции $\eta(t)$ из $C[0,T]$ соответствующие решения $\psi(x,t)$ задачи (10)–(12) с правой частью $F(x,t)=\eta(t)\delta_{l_0}(x)$ и $\psi_n(x,t)$ задач (14)–(16) с правой частью $F_n(x,t)=\eta(t)\delta_{l_0,n}(x)$ удовлетворяют соотношениям*

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^T\int_0^l\psi_n(x,t)p_0(x,t)\Delta f(t)\,dx\,dt=0, \tag{20}$$

$$\int_0^T\int_0^l\psi(x,t)p_0(x,t)\Delta f(t)\,dx\,dt=0. \tag{21}$$

Доказательство леммы 1. Рассмотрим выражение

$$I_n=\int_0^T\int_0^l\psi_n\{c\Delta u_t-\mathcal{L}\Delta u\}\,dx\,dt+\int_0^T\int_0^l\Delta u\{(c\psi_n)_t+\mathcal{L}^*\psi_n\}\,dx\,dt. \tag{22}$$

С одной стороны, в силу (7) и (14) имеем

$$I_n = \int\limits_0^T \int\limits_0^l \psi_n(x,t) p_0(x,t) \Delta f(t)\, dx\, dt + \int\limits_0^T \int\limits_0^l \Delta u(x,t) \eta(t) \delta_{l_0,n}(x)\, dx\, dt. \tag{23}$$

С другой стороны, проводя в (22) интегрирование по частям с учетом соотношений (7) – (9) и (14) – (16), получим

$$I_n = \int\limits_0^l [c\psi_n \Delta u]_{t=0}^{t=T}\ dx \mp \int\limits_0^T \int\limits_0^l \Delta u (c\psi_n)_t\, dx\, dt - \int\limits_0^T [\psi_n a \Delta u_x]_{x=0}^{x=l}\ dt +$$

$$+ \int\limits_0^T \int\limits_0^l a\psi_{nx} \Delta u_x\, dx\, dt + \int\limits_0^T [\psi_n \mathcal{A}_1 \Delta u]_{x=0}^{x=l}\ dt \mp \int\limits_0^T \int\limits_0^l \Delta u (\mathcal{A}_1 \psi_n)_x\, dx\, dt \mp$$

$$\mp \int\limits_0^T \int\limits_0^l \Delta u \mathcal{A}_2 \psi_n\, dx\, dt + \int\limits_0^T [\Delta u a \psi_{nx}]_{x=0}^{x=l}\ dt - \int\limits_0^T \int\limits_0^l a\psi_{nx} \Delta u_x\, dx\, dt = 0.$$

Отсюда и из (23) заключаем, что

$$\int\limits_0^T \int\limits_0^l \psi_n(x,t) p_0(x,t) \Delta f(t)\, dx\, dt + \int\limits_0^T \int\limits_0^l \Delta u(x,t) \eta(t) \delta_{l_0,n}(x)\, dx\, dt = 0. \tag{24}$$

Рассмотрим второй интеграл в (24), обозначив его I_{n2}. Так как функция $\delta_{l_0,n}(x)$ имеет носитель на интервале $(l_0 - \varepsilon, l_0 + \varepsilon)$, то

$$I_{n2} = \int\limits_0^T \int\limits_0^l \Delta u(x,t) \eta(t) \delta_{l_0,n}(x)\, dx\, dt = \int\limits_0^T \eta(t) \int\limits_{l_0-\varepsilon}^{l_0+\varepsilon} \Delta u(x,t) \delta_{l_0,n}(x)\, dx\, dt = \int\limits_0^T \eta(t) \Delta u_{\varepsilon_n}(l_0,t)\, dt,$$

где функция

$$\Delta u_{\varepsilon_n}(l_0,t) = \int\limits_{l_0-\varepsilon}^{l_0+\varepsilon} \Delta u(x,t) \delta_{l_0,n}(x)\, dx$$

является соболевским ε-усреднением (по переменной x) функции $\Delta u(x,t)$, определенным при $x = l_0$, $0 \leqslant t \leqslant T$ (см. [6, 7]).

Как уже отмечалось, $u_1^0(x,t)$ и $u_2^0(x,t)$ принадлежат $H^{2+\lambda,1+\lambda/2}(\overline{Q})$. Следовательно, $\Delta u(x,t)$ тоже принадлежит $H^{2+\lambda,1+\lambda/2}(\overline{Q})$, а ее след $\Delta u|_{x=l_0}$ является функцией из класса Гельдера $H^{1+\lambda/2}[0,T]$. Очевидно, что усреднение $\Delta u_{\varepsilon_n}(l_0,t)$ обладает той же гладкостью как функция t, что и $\Delta u|_{x=l_0}$. В силу свойств ε-усреднений по Соболеву [6, 7] следует, что если $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$, то

$$\lim_{n\to\infty} \Delta u_{\varepsilon_n}(l_0,t) = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{l_0-\varepsilon}^{l_0+\varepsilon} \Delta u(x,t) \delta_{l_0,n}(x)\, dx = \Delta u(l_0,t),$$

причем в силу принадлежности $\Delta u_{\varepsilon_n}(l_0,t)$ классу $H^{1+\lambda/2}[0,T]$ последовательность $\{\Delta u_{\varepsilon_n}(l_0,t)\}$ сходится к $\Delta u(l_0,t)$ равномерно на отрезке $[0,T]$. Это позволяет заключить, что

$$\lim_{n\to\infty} I_{n2} = \lim_{n\to\infty} \int\limits_0^T \eta(t) \Delta u_{\varepsilon_n}(l_0,t)\, dt = \int\limits_0^T \eta(t) \lim_{n\to\infty} \Delta u_{\varepsilon_n}(l_0,t)\, dt = \int\limits_0^T \eta(t) \Delta u(l_0,t)\, dt.$$

Но по условию $\Delta u(l_0,t) = 0$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} I_{n2} = 0$. Отсюда и из (24) вытекает, что

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^T \int\limits_0^l \psi_n(x,t) p_0(x,t) \Delta f(t)\, dx\, dt = 0,$$

т.е. соотношение (20) доказано. Соотношение (21) является следствием (20) и сильной сходимости в $L_2(Q)$ при $n \to \infty$ функций $\psi_n(x,t)$ к обобщенному решению $\psi(x,t)$ сопряженной задачи (10) – (12). Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Предположим, что при любой функции* $\eta(t) \in C^1[0,T]$ *соответствующие решения* $\psi_n(x,t)$ *последовательности задач* (14) – (16) *удовлетворяют соотношениям*

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^T \psi_n(x,t)|_{x=\overline{x}}\, w(t)\, dt = 0, \quad 0 < \overline{x} < l, \tag{25}$$

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^T \psi_{nx}(x,t)|_{x=\overline{x}}\, \theta(t)\, dt = 0, \quad 0 \leqslant \overline{x} \leqslant l, \tag{26}$$

для некоторых непрерывных функций $w(t)$ *и* $\theta(t)$. *Тогда при любом* $\overline{x}$ $w(t) = 0$, $\theta(t) = 0$ *при* $0 \leqslant t \leqslant T$.

Доказательство леммы 2. Покажем справедливость этих утверждений для внутренних точек $\overline{x}$, $0 < \overline{x} < l$.

Допустим сначала, что $0 < \overline{x} < l_0$. Рассмотрим краевую задачу, сопряженную с (14) – (16) в области $\overline{Q}_{\overline{x}} = \{\overline{x} \leqslant x \leqslant l, 0 \leqslant t \leqslant T\}$:

$$c(x,t,u_1^0)z_t - \mathcal{L}z = 0, \quad (x,t) \in Q_{\overline{x}}, \tag{27}$$

$$a(x,t,u_1^0)z_x - \mathcal{A}_1 z|_{x=\overline{x}} = w(t), \quad 0 < t \leqslant T, \tag{28}$$

$$z|_{x=l} = 0, \quad 0 < t \leqslant T, \tag{29}$$

$$z|_{t=0} = 0, \quad \overline{x} \leqslant x \leqslant l, \tag{30}$$

где $\mathcal{L}z \equiv (a(x,t,u_1^0)z_x)_x - \mathcal{A}_1 z_x - \mathcal{A}_2 z$, коэффициенты $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ имеют тот же вид, что и в задаче (7) – (9).

Рассматривая коэффициенты уравнения (27) как функции переменных (x,t), нетрудно установить их непрерывность в $\overline{Q}_{\overline{x}}$ как следствие гладкости входных данных и оценок (6) для $u_1^0(x,t)$ и $u_2^0(x,t)$. Это позволяет заключить, что краевая задача (27) – (30), являясь линейной относительно $z(x,t)$, имеет решение $z(x,t) \in C(\overline{Q}_{\overline{x}}) \cap C^{2,1}(Q_{\overline{x}})$.

Возьмем в качестве функции $\theta(t)$ функцию $\theta(t;w) = a(x,t,u_1^0)|_{x=\overline{x}}\, z(x,t)|_{x=\overline{x}}$. Ее непрерывность очевидным образом следует из свойств коэффициента a и принадлежности $z(x,t) \in C(\overline{Q}_{\overline{x}})$.

Покажем, что при $x = l_0$ решение краевой задачи (27) – (30) удовлетворяет дополнительному условию $z|_{x=l_0} = 0$. Для этого рассмотрим выражение

$$II_n = \int\limits_0^T \int\limits_{\overline{x}}^l z\{(c\psi_n)_t + \mathcal{L}^*\psi_n\}\, dx\, dt + \int\limits_0^T \int\limits_{\overline{x}}^l \psi_n\{cz_t - \mathcal{L}z\}\, dx\, dt. \tag{31}$$

С одной стороны, из уравнений (14) и (27) следует, что

$$II_n = \int\limits_0^T \int\limits_{\overline{x}}^l z(x,t)\eta(t)\delta_{l_0,n}(x)\, dx\, dt. \tag{32}$$

С другой стороны, интегрируя (31) по частям с учетом соотношений (14) – (16) и (27) – (30), устанавливаем, что

$$II_n = \int\limits_{\overline{x}}^l [c\psi_n z]_{t=0}^{t=T}\, dx \mp \int\limits_0^T \int\limits_{\overline{x}}^l \psi_n c z_t\, dx\, dt + \int\limits_0^T [za\psi_{nx}]_{x=\overline{x}}^{x=l}\, dt -$$

$$- \int\limits_0^T \int\limits_{\overline{x}}^l a\psi_{nx} z_x\, dx\, dt + \int\limits_0^T [\psi_n \mathcal{A}_1 z]_{x=\overline{x}}^{x=l}\, dt \mp \int\limits_0^T \int\limits_{\overline{x}}^l \mathcal{A}_1 \psi_n z_x\, dx\, dt \mp$$

$$\mp \int\limits_0^T \int\limits_{\overline{x}}^l \mathcal{A}_2 \psi_n z\, dx\, dt - \int\limits_0^T [\psi_n a z_x]_{x=\overline{x}}^{x=l}\, dt + \int\limits_0^T \int\limits_{\overline{x}}^l a\psi_{nx} z_x\, dx\, dt =$$

$$= \int_0^T \psi_n\big|_{x=\overline{x}} \{az_x - \mathcal{A}_1 z\}\big|_{x=\overline{x}}\, dt - \int_0^T \psi_{nx}\big|_{x=\overline{x}} \{az\}\big|_{x=\overline{x}}\, dt,$$

т.е.

$$II_n = \int_0^T \psi_n(x,t)|_{x=\overline{x}}\, w(t)\, dt - \int_0^T \psi_{nx}(x,t)|_{x=\overline{x}}\, \theta(t)\, dt. \tag{33}$$

Переходя в (32) к пределу при $n \to \infty$ и учитывая свойства ε-усреднений (см. рассуждения в лемме 1), получим

$$\lim_{n\to\infty} II_n = \int_0^T \eta(t) \lim_{n\to\infty} \int_{l_0-\varepsilon}^{l_0+\varepsilon} z(x,t)\delta_{l_0,n}(x)\, dx\, dt = \int_0^T \eta(t) z(x,t)|_{x=l_0}\, dt.$$

В то же время в силу предположений (25), (26) из (33) следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} II_n = 0$. Таким образом, приходим к соотношению

$$\int_0^T z\big|_{x=l_0}\, \eta(t)\, dt = 0,$$

откуда в силу произвольности функции $\eta(t) \in C^1[0,T]$ и вытекает, что $z|_{x=l_0} = 0$ при $0 \leqslant t \leqslant T$.

Это условие вместе с условиями (29), (30) позволяет заключить, что решение однородного уравнения (27) в области $\{l_0 \leqslant x \leqslant l, 0 \leqslant t \leqslant T\}$ есть $z(x,t) \equiv 0$. Это означает, что при $x = l_0$ заданы нулевые данные Коши: $z|_{x=l_0} = 0$, $z_x|_{x=l_0} = 0$. Показывая, как и в [3], возможность применить результаты [9] о единственности решения нехарактеристической задачи Коши для линейных параболических уравнений, устанавливаем, что $z(x,t) \equiv 0$ при $\{\overline{x} \leqslant x \leqslant l_0, 0 \leqslant t \leqslant T\}$. Но тогда из (28) и из вида функции $\theta(t)$ сразу вытекает, что $w(t) = 0$, $\theta(t) = 0$ при $0 \leqslant t \leqslant T$, что и требовалось доказать.

Допустим теперь, что $l_0 < \overline{x} < l$. Рассмотрим снова уравнение (27), но уже в области $\overline{Q_{\overline{x}}}$ вида $\overline{Q_{\overline{x}}} = \{0 \leqslant x \leqslant \overline{x}, 0 \leqslant t \leqslant T\}$ и со следующими краевыми условиями:

$$c(x,t,u_1^0) z_t - \mathcal{L} z = 0, \quad (x,t) \in Q_{\overline{x}}, \tag{34}$$

$$z|_{x=0} = 0, \quad 0 < t \leqslant T, \tag{35}$$

$$a(x,t,u_1^0) z_x - \mathcal{A}_1 z|_{x=\overline{x}} = w(t), \quad 0 < t \leqslant T, \tag{36}$$

$$z|_{t=0} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant \overline{x}. \tag{37}$$

Повторяя предыдущие рассуждения относительно коэффициентов этого уравнения, можно показать, что линейная краевая задача (34)–(37) имеет решение $z(x,t) \in C(\overline{Q_{\overline{x}}}) \cap C^{2,1}(Q_{\overline{x}})$. Покажем, что при $x = l_0$ $z(x,t)$ удовлетворяет дополнительному условию $z|_{x=l_0} = 0$.

Пусть снова функция $\theta(t)$ имеет вид $\theta(t; w) = a(x,t,u_1^0)|_{x=\overline{x}}\, z(x,t)|_{x=\overline{x}}$. Рассмотрим вспомогательное выражение, аналогичное выражению II_n:

$$III_n = \int_0^T \int_0^{\overline{x}} z\{(c\psi_n)_t + \mathcal{L}^* \psi_n\}\, dx\, dt + \int_0^T \int_0^{\overline{x}} \psi_n \{c z_t - \mathcal{L} z\}\, dx\, dt. \tag{38}$$

Для него в силу уравнений (14) и (34) следует, что

$$III_n = \int_0^T \int_0^{\overline{x}} z(x,t)\eta(t)\delta_{l_0,n}(x)\, dx\, dt. \tag{39}$$

С другой стороны, интегрирование по частям в (38) с учетом соотношений (15), (16) и (35)–(37) дает

$$III_n = -\int_0^T \psi_n\big|_{x=\overline{x}} \{az_x - \mathcal{A}_1 z\}\big|_{x=\overline{x}}\, dt + \int_0^T \psi_n\big|_{x=0} \{az_x - \mathcal{A}_1 z\}\big|_{x=0}\, dt +$$

$$+ \int_0^T \psi_{nx}\big|_{x=\overline{x}} \{az\}\big|_{x=\overline{x}}\, dt - \int_0^T \psi_{nx}\big|_{x=0} \{az\}\big|_{x=0}\, dt,$$

т.е.

$$III_n = -\int\limits_0^T \psi_n(x,t)|_{x=\overline{x}}\, w(t)\, dt + \int\limits_0^T \psi_{nx}(x,t)|_{x=\overline{x}}\, \theta(t)\, dt.$$

Отсюда и из (25), (26) следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} III_n = 0$. Но из (39) в силу свойств ε-усреднений вытекает, что

$$\lim_{n\to\infty} III_n = \int\limits_0^T \eta(t) \lim_{n\to\infty} \int\limits_{l_0-\varepsilon}^{l_0+\varepsilon} z(x,t)\delta_{l_0,n}(x)\, dx\, dt = \int\limits_0^T \eta(t) z(x,t)|_{x=l_0}\, dt.$$

Это означает в силу произвольности функции $\eta(t) \in C^1[0,T]$, что $z|_{x=l_0} = 0$ при $0 \leqslant t \leqslant T$. Но тогда решением однородного уравнения (34) в области $\{0 \leqslant x \leqslant l_0, 0 \leqslant t \leqslant T\}$ является $z(x,t) \equiv 0$. Таким образом, при $x = l_0$ имеем $z|_{x=l_0} = 0$, $z_x|_{x=l_0} = 0$. Это позволяет заключить, опираясь на теорему единственности в классе гладких функций для нехарактеристической задачи Коши [9], что $z(x,t) \equiv 0$ при $l_0 \leqslant x \leqslant \overline{x}$, $0 \leqslant t \leqslant T$. Но тогда из (36) и из вида функции $\theta(t)$ сразу вытекает, что $w(t) = 0$, $\theta(t) = 0$ при $0 \leqslant t \leqslant T$ и в случае $l_0 < \overline{x} < l$.

Рассмотрим теперь случай $\overline{x} = l_0$. Исследуя линейную краевую задачу (27)–(30) в области $\overline{Q_{\overline{x}}} = \{\overline{x} \leqslant x \leqslant l, 0 \leqslant t \leqslant T\}$ при $\overline{x} = l_0$, устанавливаем для ее решения $z(x,t)$ из $C(\overline{Q_{\overline{x}}}) \cap C^{2,1}(Q_{\overline{x}})$ справедливость условия $z|_{x=l_0} = 0$. Это утверждение доказывается как и выше с помощью интегрального выражения II_n (см. (31)) при $\overline{x} = l_0$. Единственное отличие состоит в том, что исходя из свойств ε-усреднений имеем в данном случае

$$\lim_{n\to\infty} II_n = \int\limits_0^T \eta(t) \lim_{n\to\infty} \int\limits_{l_0}^{l_0+\varepsilon} z(x,t)\delta_{l_0,n}(x)\, dx\, dt = \frac{1}{2}\int\limits_0^T \eta(t) z(x,t)|_{x=l_0}\, dt.$$

Полученное условие $z|_{x=l_0} = 0$ позволяет установить, что решением первой краевой задачи для уравнения (27) в области $\overline{Q_{\overline{x}}}$ является $z(x,t) \equiv 0$, т.е. из вида функции $\theta(t)$ следует, что $\theta(t) = 0$. Кроме того, это означает, что $z_x|_{x=l_0} = 0$, т.е. из краевого условия (28) вытекает, что $w(t) = 0$ при $0 \leqslant t \leqslant T$, что и требовалось доказать.

Заметим, что для случая $\overline{x} = l_0$ можно провести аналогичные рассуждения и для линейной краевой задачи (34)–(37) в области $\overline{Q_{\overline{x}}} = \{0 \leqslant x \leqslant \overline{x}, 0 \leqslant t \leqslant T\}$ при $\overline{x} = l_0$, рассматривая выражение III_n из (38) при $\overline{x} = l_0$. При этом

$$\lim_{n\to\infty} III_n = \int\limits_0^T \eta(t) \lim_{n\to\infty} \int\limits_{l_0-\varepsilon}^{l_0} z(x,t)\delta_{l_0,n}(x)\, dx\, dt = \frac{1}{2}\int\limits_0^T \eta(t) z(x,t)|_{x=l_0}\, dt.$$

Для завершения доказательства леммы 2 осталось рассмотреть случаи совпадения $\overline{x}$ с граничными точками $x = 0$ и $x = l$. Пусть, например, $x = 0$. Рассмотрим первую краевую задачу, сопряженную с (14)–(16) в области $\overline{Q} = \{0 \leqslant x \leqslant l, 0 \leqslant t \leqslant T\}$:

$$c(x,t,u_1^0) z_t - \mathcal{L}z = 0, \quad (x,t) \in Q, \tag{40}$$

$$z|_{x=0} = w(t), \quad 0 < t \leqslant T, \tag{41}$$

$$z|_{x=l} = 0, \quad 0 < t \leqslant T, \tag{42}$$

$$z|_{t=0} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{43}$$

Ее решение $z(x,t)$ принадлежит $C(\overline{Q}) \cap C^{2,1}(Q)$. Для доказательства дополнительного условия $z|_{x=l_0} = 0$ рассмотрим снова интегральное выражение II_n (см. (31)) при $\overline{x} = 0$. С одной стороны, для II_n справедливо соотношение (32) при $\overline{x} = 0$. С другой стороны, интегрирование по частям с учетом соотношений (14)–(16) и (40)–(43) дает

$$II_n = \int\limits_0^T z\big|_{x=l} \{a\psi_{nx} + \mathcal{A}_1\psi_n\}\big|_{x=l}\, dt + \int\limits_0^T \psi_n\big|_{x=0} \{az_x - \mathcal{A}_1 z\}\big|_{x=0}\, dt - \int\limits_0^T \psi_{nx}\big|_{x=0} \{az\}\big|_{x=0}\, dt,$$

где по предположению $a(x,t,u_1^0)|_{x=0}\, z(x,t)|_{x=0} = \theta(t)$ (т.е. $\theta(t) = a|_{x=0} w(t)$). Таким образом,

$$II_n = -\int_0^T \psi_{nx}(x,t)|_{x=0}\, \theta(t)\, dt,$$

что позволяет установить, учитывая предположение (26) и свойства ε-усреднений, что

$$\lim_{n\to\infty} II_n = \int_0^T \eta(t) z(x,t)|_{x=l_0}\, dt = 0.$$

Но это означает в силу произвольности функции $\eta(t) \in C^1[0,T]$, что $z|_{x=l_0} = 0$ при $0 \leqslant t \leqslant T$. Следовательно, решением однородного уравнения (40) в области $\{l_0 \leqslant x \leqslant l, 0 \leqslant t \leqslant T\}$ является $z(x,t) \equiv 0$, т.е. при $x = l_0$ заданы нулевые данные Коши: $z|_{x=l_0} = 0$, $z_x|_{x=l_0} = 0$. Опираясь на результаты [9] для нехарактеристической задачи Коши, можем заключить, что $z(x,t) \equiv 0$ также и при $0 \leqslant x \leqslant l_0$, $0 \leqslant t \leqslant T$. Но тогда $w(t) = 0$ (см. (41)) и $\theta(t) = 0$ (см. вид функции $\theta(t)$).

Случай $\overline{x} = l$ исследуется аналогично. Лемма 2 доказана.

Из этой леммы в силу сильной сходимости в $L_2[0,T]$ при $n \to \infty$ следов решений $\psi_n(x,t)|_{x=\overline{x}}$ и их производных $\psi_{nx}(x,t)|_{x=\overline{x}}$ (см. 2.1.2) вытекает следующее утверждение.

Лемма 3. *Предположим, что при любой функции $\eta(t) \in C^1[0,T]$ соответствующее решение $\psi(x,t)$ сопряженной задачи* (10)–(12) *удовлетворяет при некотором $\overline{x}$, $0 \leqslant \overline{x} \leqslant l$, соотношениям*

$$\int_0^T \psi(x,t)|_{x=\overline{x}}\, w(t)\, dt = 0, \qquad \int_0^T \psi_x(x,t)|_{x=\overline{x}}\, \theta(t)\, dt = 0$$

для некоторых непрерывных функций $w(t)$ и $\theta(t)$. Тогда $w(t) = 0$, $\theta(t) = 0$ при $0 \leqslant t \leqslant T$.

Замечание 1. Условие (26) для следов $\psi_{nx}(x,t)|_{x=\overline{x}}$ и соответствующее условие для следов $\psi_x(x,t)|_{x=\overline{x}}$ в лемме 3 могут быть сформулированы следующим образом:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T \left\{a(x,t,u_1^0)\psi_{nx}(x,t)\right\}\big|_{x=\overline{x}}\, \theta(t)\, dt = 0,$$

$$\int_0^T \left\{a(x,t,u_1^0)\psi_x(x,t)\right\}\big|_{x=\overline{x}}\, \theta(t)\, dt = 0$$

для некоторой непрерывной функции $\theta(t)$ (тогда $\theta(t) = z(x,t)|_{x=\overline{x}}$, где $z(x,t)$ — решение краевой задачи соответствующего вида, см., например, (27)–(30)). Возможность таких формулировок очевидным образом следует из неравенства $a \geqslant a_{\min} > 0$ (см. требование 1 к входным данным).

Лемма 3 означает в частности, что множество следов $\left\{\psi(x,t)|_{x=\overline{x}}\right\}$, получаемое при пробегании функцией $\eta(t)$ пространства $C^1[0,T]$, является всюду плотным.

2.1.4. Леммы 1, 3 уже позволяют завершить доказательство теоремы 1 о единственности решения $\{u^0(x,t), f^0(t)\}$ в смысле определения 1. Действительно, применяя в интегральном соотношении (21) леммы 1 теорему о среднем по переменной x, получим равенство

$$\int_0^T l\psi(x,t)|_{x=\overline{x}}\, p_0(x,t)|_{x=\overline{x}}\, \Delta f(t)\, dx = 0, \quad 0 \leqslant \overline{x} \leqslant l,$$

справедливое при любой функции $\eta(t) \in C^1[0,T]$ в правой части уравнения (10). Но так как множество следов $\left\{\psi(x,t)|_{x=\overline{x}}\right\}$ обладает свойством плотности в $L_2[0,T]$, то отсюда следует, что

$$p_0(x,t)|_{x=\overline{x}}\, \Delta f(t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

По предположению (см. требование 3 к входным данным) $|p_0(x,t)| \geqslant p_0 > 0$ при $(x,t) \in \overline{Q}$. Таким образом, $\Delta f(t) = 0$ при $0 \leqslant t \leqslant T$. Тогда из соотношений (7)–(9) для Δu, которые представляют собой линейную краевую задачу первого рода с гладкими коэффициентами, вытекает в силу единственности решения такой краевой задачи [6], что $\Delta u \equiv 0$ в $\overline{Q}$. Теорема 1 доказана.

2.2. Если функция f в правой части уравнения (1) ищется в виде $f(x,t)$, а не $f(t)$, то такая обратная задача с локальным переопределением не обладает, вообще говоря, свойством единственности. Это подтверждает следующий пример.

Пример 1. Функции

$$\begin{cases} u_1(x,t) = x^2 t, \\ f_1(x,t) = x^2 - 2t, \end{cases} \qquad \begin{cases} u_2(x,t) = x^4 t, \\ f_2(x,t) = x^4 - 12x^2 t \end{cases}$$

являются решениями в области $\overline{Q} = \{-1 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant t \leqslant T\}$ обратной задачи:

$$u_t - u_{xx} = f(x,t), \quad (x,t) \in Q,$$
$$u|_{x=-1} = t, \quad u|_{x=1} = t, \quad 0 < t \leqslant T,$$
$$u|_{t=0} = 0, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1,$$

с локальным условием переопределения при $x = 0$: $u|_{x=0} = 0$. Таким образом, для этой задачи единственность решения не имеет места.

2.3. Остановимся кратко на достаточных условиях единственности, которые вытекают из проведенного исследования в том случае, когда обратная задача состоит в нахождении функций $u(x,t)$ в $\overline{Q}$ и $f(t)$ при $0 \leqslant t \leqslant T$, удовлетворяющих линейному параболическому уравнению

$$c(x,t)u_t - Lu = p_0(x,t)f(t) + p_1(x,t), \quad (x,t) \in Q, \tag{44}$$
$$Lu \equiv (a(x,t)u_x)_x - b(x,t)u_x - d(x,t)u,$$

с начальным и граничными условиями (2), (3) и с локальным условием переопределения (4).

Соответствующая этой обратной задаче теорема единственности решения $\{u^0(x,t), f^0(t)\}$ в классах Гельдера принимает следующий вид.

Теорема 2. *Предположим, что входные данные линейной краевой задачи* (44), (2), (3) *удовлетворяют требованиям гладкости и согласования*

$$a, a_x, b, c, d \in H^{\lambda,\lambda/2}(\overline{Q}), \quad p_i \in H^{\lambda,\lambda/2}(\overline{Q}), \quad 0 < \lambda < 1,$$
$$v_i \in H^{1+\lambda/2}[0,T], \quad \varphi \in H^{2+\lambda}[0,l], \quad i = 0,1,$$
$$v_0|_{t=0} = \varphi|_{x=0}, \quad v_1|_{t=0} = \varphi|_{x=l},$$

обеспечивающим существование и единственность ее решения $u(x,t)$ в $H^{2+\lambda,1+\lambda/2}(\overline{Q})$ при любой функции
$f(t) \in H^{\lambda/2}[0,T]$ в правой части уравнения (44), *такой, что*

$$c(x,t)v_{0t} - L\varphi|_{x=0,t=0} = p_0(x,0)f(0) + p_1(x,0)|_{x=0},$$
$$c(x,t)v_{1t} - L\varphi|_{x=l,t=0} = p_0(x,0)f(0) + p_1(x,0)|_{x=l}.$$

Пусть, кроме того, производные b_x и c_t непрерывны в $\overline{Q}$, $|p_0(x,t)| \geqslant p_0 > 0$ при $(x,t) \in \overline{Q}$, функция $g(t)$ принадлежит $H^{1+\lambda/2}[0,T]$ и удовлетворяет условиям согласования

$$c(x,t)v_{0t} - L\varphi|_{x=0,t=0} = p_0(x,0)g^* + p_1(x,0)|_{x=0},$$
$$c(x,t)v_{1t} - L\varphi|_{x=l,t=0} = p_0(x,0)g^* + p_1(x,0)|_{x=l},$$

где

$$g^* = \{(c(x,t)g_t - L\varphi)|_{x=l_0,t=0} - p_1(l_0,0)\}/p_0(l_0,0).$$

Тогда в случае существования решения $\{u^0(x,t), f^0(t)\}$ обратной задачи, удовлетворяющего соотношениям (44), (2), (3) *и локальному условию переопределения* (4), *это решение определяется однозначно в классе функций $H^{2+\lambda,1+\lambda/2}(\overline{Q}) \times H^{\lambda/2}[0,T]$.*

Вывод теоремы 2 повторяет с соответствующими упрощениями доказательство теоремы 1.

3. Единственность решения обратной задачи для уравнения (1) с граничными условиями третьего рода. Рассматриваемый класс обратных задач для квазилинейного параболического уравнения (1) включает в себя также случай задания граничных условий третьего рода при $x = 0$ и $x = l$.

3.1. Соответствующая обратная задача состоит в нахождении функций $u(x,t)$ в $\overline{Q}$ и $f(t)$ при $0 \leqslant t \leqslant T$, удовлетворяющих уравнению (1), краевым условиям

$$a(x,t,u)u_x - e_0(t,u)u|_{x=0} = q_0(t), \quad 0 < t \leqslant T, \tag{45}$$

$$a(x,t,u)u_x + e_1(t,u)u|_{x=l} = q_1(t), \quad 0 < t \leqslant T, \tag{46}$$

начальному условию (3) и наблюдению (4), в которых входные данные $a \geqslant a_{\min} > 0$, b, $c \geqslant c_{\min} > 0$, d, p_i, e_i, q_i $(i = 0, 1)$, φ и g являются заданными. Будем предполагать, что они удовлетворяют следующим требованиям.

6. При $(x,t) \in \overline{Q}$, $|u| < \infty$, функции a, a_x, a_u, b, c, d равномерно ограничены, $a \geqslant a_{\min} > 0$, $c \geqslant c_{\min} > 0$, $e_i \geqslant 0$ $(i = 0, 1)$.

7. При $(x,t,u) \in \overline{D} = \overline{Q} \times [-M_0, M_0]$ $(M_0 \geqslant \max_{(x,t)\in\overline{Q}} |u|)$ производные a_{xx}, a_{xu}, a_{uu} и a_t равномерно ограничены, b, c, d, a_x, a_u принадлежат $H^{1,\lambda/2,1}(\overline{D})$, $0 < \lambda < 1$, функции e_i имеют равномерно ограниченные производные e_{it}, e_{iu}, e_{iuu} $(i = 0, 1)$.

8. Функции $p_0(x,t)$ и $p_1(x,t)$ принадлежат $H^{1,\lambda/2}(\overline{Q})$, $|p_0(x,t)| \geqslant p_0 > 0$ при $(x,t) \in \overline{Q}$, функция $\varphi(x)$ принадлежит $H^{2+\lambda}[0,l]$, производные q_{it} $(i = 0, 1)$ равномерно ограничены при $0 \leqslant t \leqslant T$. Выполнены условия согласования при $t = 0$:

$$a(x,0,\varphi)\varphi_x - e_0(0,\varphi)\varphi|_{x=0} = q_0(0),$$
$$a(x,0,\varphi)\varphi_x + e_1(0,\varphi)\varphi|_{x=l} = q_1(0).$$

9. Функция $g(t)$ принадлежит $H^{1+\lambda/2}[0,T]$, $g|_{t=0} = \varphi|_{x=l_0}$.

Требования 6–8 обеспечивают существование и единственность решения квазилинейной краевой задачи (1), (45), (46), (3) в классе Гельдера $u(x,t) \in H^{2+\lambda,1+\lambda/2}(\overline{Q})$ при любой функции $f(t) \in H^{\lambda/2}[0,T]$ в правой части уравнения (1) [6].

В соответствии с этим дадим следующее

Определение 2. Решением обратной задачи для уравнения (1) с граничными условиями третьего рода назовем пару функций $\{u^0(x,t), f^0(t)\}$:

$$u^0(x,t) \in H^{2+\lambda,1+\lambda/2}(\overline{Q}), \quad f^0(t) \in H^{\lambda/2}[0,T], \quad 0 < \lambda < 1,$$

удовлетворяющих в обычном смысле соотношениям (1), (45), (46), (3), локальному условию переопределения (4) и условию согласования при $t = 0$:

$$c(x,0,\varphi)g_t - L\varphi|_{x=l_0,t=0} = p_0(x,0)f(0) + p_1(x,0)|_{x=l_0}. \tag{47}$$

3.2. Сформулируем соответствующую теорему единственности.

Теорема 3. *Пусть входные данные обратной задачи с граничными условиями третьего рода удовлетворяют требованиям* 6–9 *и пусть, кроме того, функция* $c(x,t,u)$ *имеет непрерывную производную по* t *при* $(x,t,u) \in \overline{D}$. *Тогда в случае существования решения* $\{u^0(x,t), f^0(t)\}$ *такой обратной задачи в смысле определения* 2 *это решение определяется однозначно.*

Доказательство. Ограничимся изложением основных моментов доказательства, так как оно повторяет с соответствующими модификациями доказательство теоремы 1.

Предположим, что $\{u_1^0, f_1^0\}$ и $\{u_2^0, f_2^0\}$ — два решения обратной задачи. Для u_1^0 и u_2^0 как для решений третьей краевой задачи для уравнения (1), соответствующих функциям f_1^0 и f_2^0 правой части уравнения (1), справедливы оценки вида (6) в классе Гельдера $H^{2+\lambda,1+\lambda/2}(\overline{Q})$ [6].

Пусть $\Delta u = u_2^0 - u_1^0$, $\Delta f = f_2^0 - f_1^0$. В силу (47) $\Delta f|_{t=0} = 0$, кроме того, из (1), (45), (46), (3) и (4) следует, что Δu и Δf удовлетворяют соотношениям (7), (9) и условиям

$$a(x,t,u_1^0)\Delta u_x - \mathcal{E}_0 \Delta u|_{x=0} = 0, \quad 0 < t \leqslant T, \tag{48}$$

$$a(x,t,u_1^0)\Delta u_x + \mathcal{E}_1 \Delta u|_{x=l} = 0, \quad 0 < t \leqslant T, \tag{49}$$

$$\Delta u|_{x=l_0} = 0, \quad < t \leqslant T. \tag{50}$$

Вид коэффициентов $\mathcal{E}_0$ и $\mathcal{E}_1$, зависящих соответствующим образом от производных u_2^0, u_{2x}^0 и от значений функций a_u, e_{0u} и e_{1u}, приведен в [1].

Свойства 6–8 входных данных и оценки (6) для $u_1^0(x,t)$ и $u_2^0(x,t)$ позволяют заключить, что все коэффициенты в линейном параболическом уравнении (7) и в граничных условиях (48), (49) непрерывны как функции (x,t) и соответственно t.

Утверждение, что $\Delta u = 0$ в $\overline{Q}$, $\Delta f = 0$ при $0 \leqslant t \leqslant T$, основано на свойствах обобщенного решения краевой задачи, сопряженной с задачей (7), (9), (48)–(50). В данном случае она имеет вид

$$(c(x,t,u_1^0)\psi)_t + \mathcal{L}^*\psi = \eta(t)\delta_{l_0}(x), \quad 0 < x < l, \quad 0 \leqslant t < T, \tag{51}$$

$$a(x,t,u_1^0)\psi_x - (\mathcal{E}_0 - \mathcal{A}_1)\psi|_{x=0} = 0, \quad 0 \leqslant t < T, \tag{52}$$

$$a(x,t,u_1^0)\psi_x + (\mathcal{E}_1 + \mathcal{A}_1)\psi|_{x=l} = 0, \quad 0 \leqslant t < T, \tag{53}$$

$$\psi|_{t=T} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{54}$$

где $\mathcal{L}^*\psi \equiv (a(x,t,u_1^0)\psi_x)_x + (\mathcal{A}_1\psi)_x - \mathcal{A}_2\psi$, $\eta(t)$ — произвольная функция из $C[0,T]$ и где $\delta_{l_0}(x)$ — δ-функция точки $x = l_0$.

Следуя [6], назовем обобщенным решением задачи (51)–(54) в классе $V_2^{1,0}(Q)$ $(V_2^{1,1/2}(Q))$ функцию $\psi(x,t)$ из $V_2^{1,0}(Q)$ $(V_2^{1,1/2}(Q))$, удовлетворяющую тождеству

$$J(\psi,\zeta) \equiv -\int_0^T\int_0^l c\psi\zeta_t\,dx\,dt + \int_0^T\int_0^l \{(\mathcal{A}_1\psi)_x - \mathcal{A}_2\psi\}\zeta\,dx\,dt - \int_0^T\int_0^l a\psi_x\zeta_x\,dx\,dt -$$

$$-\int_0^T (\mathcal{E}_1 + \mathcal{A}_1)\psi|_{x=l}\zeta|_{x=l}\,dt - \int_0^T (\mathcal{E}_0 - \mathcal{A}_1)\psi|_{x=0}\zeta|_{x=0}\,dt = \int_0^T \eta(t)\zeta|_{x=l_0}\,dt$$

при любой гладкой функции $\zeta(x,t)$, равной 0 при $t = 0$.

Достаточная гладкость коэффициентов уравнения (51) и граничных условий (52), (53), а также принадлежность правой части $F(x,t) = \eta(t)\delta_{l_0}(x)$ уравнения (51) пространству $L_{1,\infty}(Q)$ обеспечивают выполнение требований однозначной разрешимости краевой задачи (51)–(54) в $V_2^{1,0}(Q)$ $(V_2^{1,1/2}(Q))$ (см. [6]). Для ее обобщенного решения $\psi(x,t)$ справедливы утверждения, приведенные в 2.1.1.

Как и выше в 2.1.2, можно показать, что обобщенное решение $\psi(x,t)$ сопряженной задачи (51)–(54) есть предел в норме $V_2^{1,0}(Q)$ решений $\psi_n(x,t)$ последовательности краевых задач для уравнения со сглаженной правой частью $F_n(x,t) = \eta(t)\delta_{l_0,n}(x)$ и с теми же условиями (52)–(54).

Для $\psi(x,t)$ и его гладких приближений $\psi_n(x,t)$ справедливы соответствующие аналоги лемм 1–3. В частности, аналогом леммы 2 является

Лемма 4. *Предположим, что при любой функции $\eta(t) \in C^1[0,T]$ соответствующие решения $\psi_n(x,t)$ последовательности краевых задач для уравнения*

$$(c(x,t,u_1^0)\psi)_t + \mathcal{L}^*\psi = \eta(t)\delta_{l_0,n}(x), \quad 0 < x < l, \quad 0 \leqslant t < T, \tag{55}$$

с начальным условием (54) *и с граничными условиями* (52), (53) *удовлетворяют соотношениям*

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^T \psi_n(x,t)|_{x=\overline{x}}\,w(t)\,dt = 0, \quad 0 \leqslant \overline{x} \leqslant l,$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^T \psi_{nx}(x,t)|_{x=\overline{x}}\,\theta(t)\,dt = 0, \quad 0 < \overline{x} < l,$$

для некоторых непрерывных функций $w(t)$ и $\theta(t)$. Тогда при любом $\overline{x}$ $w(t) = 0$, $\theta(t) = 0$ при $0 \leqslant t \leqslant T$.

Приведем для примера обоснование этих утверждений для случая $0 < \overline{x} < l_0$. Для этого рассмотрим краевую задачу, сопряженную с (55), (52)–(54) в области $\overline{Q_{\overline{x}}} = \{\overline{x} \leqslant x \leqslant l, 0 \leqslant t \leqslant T\}$:

$$c(x,t,u_1^0)z_t - \mathcal{L}z = 0, \quad (x,t) \in Q_{\overline{x}}, \tag{56}$$

$$a(x,t,u_1^0)z_x - \mathcal{A}_1 z|_{x=\overline{x}} = w(t), \quad 0 < t \leqslant T, \tag{57}$$

$$a(x,t,u_1^0)z_x+\mathcal{E}_1 z|_{x=l}=0,\quad 0<t\leqslant T, \tag{58}$$

$$z|_{t=0}=0,\quad \overline{x}\leqslant x\leqslant l, \tag{59}$$

где $\mathcal{L}z\equiv(a(x,t,u_1^0)z_x)_x-\mathcal{A}_1 z_x-\mathcal{A}_2 z$. Эта краевая задача, являясь линейной относительно $z(x,t)$, имеет решение $z(x,t)\in C(\overline{Q}_{\overline{x}})\cap C^{2,1}(Q_{\overline{x}})$ в силу непрерывности коэффициентов в уравнении (56) и в граничных условиях (57), (58). Пусть функция $\theta(t)$ имеет вид $\theta(t;w)=a(x,t,u_1^0)|_{x=\overline{x}}\,z(x,t)|_{x=\overline{x}}$.

Покажем, что при $x=l_0$ решение $z(x,t)$ удовлетворяет дополнительному условию $z|_{x=l_0}=0$. Для этого, как и при доказательстве леммы 2, воспользуемся вспомогательным выражением II_n из (31).

С одной стороны, из уравнений (55) и (56) и из свойств ε-усреднений следует, что

$$\lim_{n\to\infty}II_n=\int\limits_0^T\eta(t)\lim_{n\to\infty}\int\limits_{l_0-\varepsilon}^{l_0+\varepsilon}z(x,t)\delta_{l_0,n}(x)\,dx\,dt=\int\limits_0^T\eta(t)z(x,t)|_{x=l_0}\,dt.$$

С другой стороны, интегрирование по частям с учетом соотношений (52)–(55) и (56)–(59) дает

$$II_n=\int\limits_{\overline{x}}^{l}[c\psi_n z]_{t=0}^{t=T}\,dx+\int\limits_0^T[za\psi_{nx}]_{x=\overline{x}}^{x=l}\,dt+\int\limits_0^T[\psi_n\mathcal{A}_1 z]_{x=\overline{x}}^{x=l}\,dt-\int\limits_0^T[\psi_n a z_x]_{x=\overline{x}}^{x=l}\,dt=$$

$$=\int\limits_0^T z\big|_{x=l}\left\{a\psi_{nx}+\mathcal{A}_1\psi_n\right\}\big|_{x=l}\,dt-\int\limits_0^T\psi_{nx}\big|_{x=\overline{x}}\left\{az\right\}\big|_{x=\overline{x}}\,dt+$$

$$+\int\limits_0^T\psi_n\big|_{x=\overline{x}}\left\{az_x-\mathcal{A}_1 z\right\}\big|_{x=\overline{x}}\,dt-\int\limits_0^T\psi_n\big|_{x=l}\left\{az_x\right\}\big|_{x=l}\,dt,$$

т.е. для II_n имеет место соотношение

$$II_n=\int\limits_0^T z\big|_{x=l}\left\{a\psi_{nx}+(\mathcal{A}_1+\mathcal{E}_1)\psi_n\right\}\big|_{x=l}\,dt+\int\limits_0^T\psi_n(x,t)\big|_{x=\overline{x}}\,w(t)\,dt-\int\limits_0^T\psi_{nx}(x,t)\big|_{x=\overline{x}}\,\theta(t)\,dt=$$

$$=\int\limits_0^T\psi_n(x,t)\big|_{x=\overline{x}}\,w(t)\,dt-\int\limits_0^T\psi_{nx}(x,t)\big|_{x=\overline{x}}\,\theta(t)\,dt,$$

что в силу предположений леммы 4 приводит к равенству $\lim\limits_{n\to\infty}II_n=0$. Таким образом, справедливо утверждение

$$\int\limits_0^T\eta(t)z(x,t)|_{x=l_0}\,dt=0,$$

из которого вследствие произвольности функции $\eta(t)$ заключаем, что $z|_{x=l_0}=0$.

Но тогда решением краевой задачи со смешанными граничными условиями для однородного уравнения (56) в области $\{l_0\leqslant x\leqslant l, 0\leqslant t\leqslant T\}$ является $z(x,t)\equiv 0$. Это в свою очередь означает, что при $x=l_0$ заданы нулевые данные Коши: $z|_{x=l_0}=0$, $z_x|_{x=l_0}=0$. Следовательно, на основе результатов [9] для нехарактеристической задачи Коши заключаем, что $z(x,t)\equiv 0$ также и при $\overline{x}\leqslant x\leqslant l_0$, $0\leqslant t\leqslant T$. Тогда из (57) и из вида $\theta(t)$ сразу вытекает, что $w(t)=0$ и $\theta(t)=0$ при $0\leqslant t\leqslant T$, что и требовалось доказать.

Для завершения доказательства теоремы 3 о единственности решения обратной задачи с граничными условиями третьего рода осталось применить теорему о среднем по переменной x в интегральном соотношении вида (21) (аналог леммы 1) и получить равенство

$$\int\limits_0^T l\psi(x,t)|_{x=\overline{x}}\,p_0(x,t)|_{x=\overline{x}}\,\Delta f(t)\,dx=0,\quad 0\leqslant\overline{x}\leqslant l,$$

справедливое при любой функции $\eta(t)\in C^1[0,T]$ в правой части уравнения (51). Отсюда в силу плотности в $L_2[0,T]$ множества следов $\left\{\psi(x,t)|_{x=\overline{x}}\right\}$ и из неравенства $|p_0(x,t)|\geqslant p_0>0$ в $\overline{Q}$ заключаем, что $\Delta f(t)=0$

при $0 \leqslant t \leqslant T$. Тогда из уравнения (7), начального условия (9) и граничных условий (48), (49) следует, что решением этой линейной краевой задачи третьего рода с гладкими коэффициентами является $\Delta u \equiv 0$. Теорема 3 доказана.

3.3. Как и в случае граничных условий первого рода, справедливо утверждение: рассматриваемая обратная задача с локальным переопределением не обладает, вообще говоря, свойством единственности, если функция f в правой части уравнения (1) ищется в виде $f(x,t)$, а не $f(t)$. Это показывает следующий пример.

Пример 2. Две пары функций

$$\begin{cases} u_1(x,t) = x(x^2-1)t, \\ f_1(x,t) = x(x^2-1) - 6xt, \end{cases} \qquad \begin{cases} u_2(x,t) = x^3(x^2-1)t, \\ f_2(x,t) = x^3(x^2-1) - 2xt(10x^2-3) \end{cases}$$

являются решениями в области $\overline{Q} = \{-1 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant t \leqslant T\}$ обратной задачи:

$$u_t - u_{xx} = f(x,t), \quad (x,t) \in Q,$$
$$u_x - u|_{x=-1} = 2t, \quad u_x + u|_{x=1} = 2t, \quad 0 < t \leqslant T,$$
$$u|_{t=0} = 0, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1,$$

с локальным условием переопределения при $x = 0$: $u|_{x=0} = 0$. Таким образом, эта обратная задача имеет более одного решения.

3.4. Допустим теперь, что обратная задача с локальным условием переопределения состоит в нахождении функций $u(x,t)$ в $\overline{Q}$ и $f(t)$ при $0 \leqslant t \leqslant T$, удовлетворяющих линейному параболическому уравнению (44), линейным граничным условиям

$$a(x,t)u_x - e_0(t)u|_{x=0} = q_0(t), \quad 0 < t \leqslant T, \tag{60}$$

$$a(x,t)u_x + e_1(t)u|_{x=l} = q_1(t), \quad 0 < t \leqslant T, \tag{61}$$

начальному условию (3) и дополнительному условию (4).

Соответствующая этой обратной задаче теорема единственности решения $\{u^0(x,t), f^0(t)\}$ в классах Гельдера принимает следующий вид.

Теорема 4. *Предположим, что входные данные линейной краевой задачи* (44), (60), (61), (3) *удовлетворяют требованиям гладкости и согласования, обеспечивающим существование и единственность* $u(x,t)$ *в* $H^{2+\lambda,1+\lambda/2}(\overline{Q})$ *при любой функции* $f(t) \in H^{\lambda/2}[0,T]$ *в правой части уравнения* (44):

$$a, a_x, b, c, d \in H^{\lambda,\lambda/2}(\overline{Q}), \quad p_i \in H^{\lambda,\lambda/2}(\overline{Q}), \quad 0 < \lambda < 1,$$

$$e_i, q_i \in H^{\frac{1+\lambda}{2}}[0,T], \quad e_i \geqslant 0, \quad \varphi \in H^{2+\lambda}[0,l], \quad i = 0,1,$$
$$a(x,0)\varphi_x - e_0(0)\varphi|_{x=0} = q_0(0),$$
$$a(x,0)\varphi_x + e_1(0)\varphi|_{x=l} = q_1(0).$$

Пусть, кроме того, производные b_x *и* c_t *непрерывны в* $\overline{Q}$, *функция* $g(t) \in H^{1+\lambda/2}[0,T]$, $|p_0(x,t)| \geqslant p_0 > 0$ *при* $(x,t) \in \overline{Q}$. *Тогда решение* $\{u^0(x,t), f^0(t)\}$ *такой обратной задачи в случае его существования единственно в классе функций*

$$u^0(x,t) \in H^{2+\lambda,1+\lambda/2}(\overline{Q}), \quad f^0(t) \in H^{\lambda/2}[0,T],$$

$$(c(x,0)g_t - L\varphi)|_{x=l_0,t=0} = p_0(l_0,0)f^0|_{t=0} + p_1(l_0,0).$$

Доказательство повторяет с соответствующими упрощениями доказательство теоремы 3 с учетом того, что множество следов $\left\{\psi(x,t)|_{x=\overline{x}}\right\}$ решений сопряженной задачи, имеющей в данном случае вид

$$(c(x,t)\psi)_t + (a(x,t)\psi_x)_x + (b(x,t)\psi)_x - d(x,t)\psi = \eta(t)\delta_{l_0}(x), \quad 0 < x < l, \quad 0 \leqslant t < T,$$

$$a(x,t)\psi_x - (e_0(t) - b(x,t))\psi|_{x=0} = 0, \quad 0 \leqslant t < T,$$
$$a(x,t)\psi_x + (e_1(t) + b(x,t))\psi|_{x=l} = 0, \quad 0 \leqslant t < T,$$

$$\psi|_{t=T} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l,$$

плотно в $L_2[0,T]$ при пробегании функцией $\eta(t)$ пространства $C^1[0,T]$.

4. Единственность решения обратной задачи со смешанными краевыми условиями. К рассматриваемому классу обратных задач относится также случай задания на границах области краевых условий смешанного типа.

Пусть, например, обратная задача состоит в нахождении функций $u(x,t)$ в $\overline{Q}$ и $f(t)$ при $0 \leqslant t \leqslant T$, удовлетворяющих уравнению (1), граничным условиям

$$u|_{x=0} = v_0(t), \quad a(x,t,u)u_x + e_1(t,u)u|_{x=l} = q_1(t), \quad 0 < t \leqslant T, \tag{62}$$

начальному условию (3) и наблюдению (4), в которых входные данные $a \geqslant a_{\min} > 0$, b, $c \geqslant c_{\min} > 0$, d, p_i $(i = 0,1)$, v_0, e_1, q_1 φ и g предполагаются заданными.

Пусть входные данные удовлетворяют соответствующим требованиям гладкости и согласования, т.е. требованиям 3 – 8 применительно к смешанным краевым условиям.

Определение 3. Решением обратной задачи со смешанными краевыми условиями назовем пару функций $\{u^0(x,t), f^0(t)\}$:

$$u^0(x,t) \in H^{2+\lambda,1+\lambda/2}(\overline{Q}), \quad f^0(t) \in H^{\lambda/2}[0,T], \quad 0 < \lambda < 1,$$

удовлетворяющих соотношениям (1), (62), (3) и локальному условию переопределения (4) в обычном смысле.

Единственность решения этой обратной задачи в смысле определения 3 устанавливает следующая

Теорема 5. *Пусть входные данные удовлетворяют требуемым условиям гладкости и согласования и пусть, кроме того, функция $c(x,t,u)$ имеет непрерывную производную по t при $(x,t,u) \in \overline{D}$. Тогда в случае существования решения $\{u^0(x,t), f^0(t)\}$ рассматриваемой обратной задачи в классах Гельдера $H^{2+\lambda,1+\lambda/2}(\overline{Q}) \times H^{\lambda/2}[0,T]$ это решение определяется однозначно.*

Основные моменты доказательства этой теоремы повторяют соответствующие рассуждения при доказательстве теорем 1, 3.

Достаточные условия единственности решения $\{u^0(x,t), f^0(t)\}$ в указанных классах Гельдера в линейном случае (т.е. для линейного параболического уравнения и линейного краевого условия третьего рода при $x = l$, см. (44) и (61)) вытекают из соответствующих утверждений теорем 2, 4.

Обратная задача со смешанными краевыми условиями может иметь более одного решения, если функция f в правой части уравнения (1) или (44) ищется в виде $f(x,t)$, а не $f(t)$. Это подтверждает, в частности, следующий пример.

Пример 3. Две пары функций

$$\begin{cases} u_1(x,t) = x(x^2-1)t + t, \\ f_1(x,t) = x(x^2-1) - 6xt + 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} u_2(x,t) = x^3(x^2-1)t + t, \\ f_2(x,t) = x^3(x^2-1) - 2xt(10x^2-3) + 1 \end{cases}$$

являются решениями в области $\overline{Q} = \{-1 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant t \leqslant T\}$ обратной задачи

$$u_t - u_{xx} = f(x,t), \quad (x,t) \in Q,$$

$$u|_{x=-1} = t, \quad u_x + u|_{x=1} = 3t, \quad 0 < t \leqslant T,$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1,$$

с локальным переопределением при $x = 0$: $u|_{x=0} = t$, $0 < t \leqslant T$. Таким образом, для этой обратной задачи нарушена единственность решения.

5. О некорректности обратных задач с локальным условием переопределения. Рассматриваемый класс обратных задач для параболических уравнений с неизвестной правой частью относится к некорректно поставленным задачам.

5.1. Проявлением некорректности является неустойчивость решения относительно погрешностей входных данных. Это подтверждает следующий

Пример 4. Функции

$$u^0(x,t) = t(4-x^2), \quad f^0(t) = t$$

являются точным решением обратной задачи в области $\overline{Q} = \{0 \leqslant x \leqslant 2, 0 \leqslant t \leqslant T\}$:

$$u_t - u_{xx} = f(t) + t - x^2 + 4, \quad (x,t) \in Q,$$

$$u|_{x=0} = 4t, \quad u|_{x=2} = 0, \quad 0 < t \leqslant T,$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2,$$

с условием переопределения при $x = 1$:

$$u|_{x=1} = g(t), \quad g(t) = 3t, \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Допустим, что функция $g(t)$ задана приближенно

$$g_n(t) = g(t) + \delta_n(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

с погрешностью $\delta_n(t) = n^{-2}t$, где $n > 0$ — любое целое. При $n \to \infty$ $\delta_n(t) \to 0$ в равномерной метрике. Решением обратной задачи с приближенно заданной функцией $g_n(t)$ при $x = 1$ является пара функций

$$u_n = u^0 + \Delta_n u, \quad \Delta_n u = n^{-2}tx(2-x)\exp n(1-x)^2,$$
$$f_n = f^0 + \Delta_n f, \quad \Delta_n f = \{4tx(x-2)(1-x)^2 + 2n^{-1}t(5x^2 - 10x + 4) + n^{-2}(2t + 2x - x^2)\}\exp n(1-x)^2.$$

Очевидно, что при $n \to \infty$ $\Delta_n u \to \infty$, $\Delta_n f \to \infty$ в метрике $C(\overline{Q})$.

Для построения приближенных решений, устойчивых к погрешностям входных данных этого класса обратных задач, необходимо применять регуляризирующие методы. Однако в случае квазилинейных параболических уравнений возникает проблема обоснования применимости известных принципов регуляризации, так как область применения некоторых из них (например, метода квазиобращения и методов сведения исходной задачи к интегральному уравнению) включает в себя только линейные параболические уравнения.

5.2. Эффективным способом устойчивого приближенного решения рассматриваемого класса обратных задач является вариационный метод квазирешений [10].

Изложим кратко основные принципы построения устойчивых приближений в классах Гельдера на примере обратной задачи (1) – (4). Ее операторное представление имеет вид

$$Af = g, \quad f \in F \subset L_2[0,T], \quad g \in G \subset L_2[0,T], \tag{63}$$

где $A : F \to G$ — нелинейный оператор, ставящий в соответствие каждому элементу $f \in F$ след решения $u|_{x=l_0}$ краевой задачи (1) – (3). Точным решением уравнения (63) является такой элемент $f^0 \in F$, для которого $u|_{x=l_0}$ совпадает с заданным элементом $g \in G$.

Предположим, что входные данные обратной задачи (1) – (4) удовлетворяют условиям теоремы 1. Тогда возможность определения оператора A для любого $f \in F$ и принадлежность $Af \in G$ обеспечиваются выбором F и G в виде

$$F = \{f(t) \in W_2^1[0,T]\}, \quad F \subset H^{\lambda/2}[0,T],$$
$$G = \{\omega(t) \in H^{1+\lambda/2}[0,T]\}, \quad 0 < \lambda < 1.$$

Вариационный подход к постановке обратной задачи (1) – (4) основан на том, что решение операторного уравнения (63) эквивалентно минимизации в F функционала

$$\inf_{f \in F} J_g(f), \quad J_g(f) = \|Af - g\|_{L_2[0,T]}.$$

Для регуляризации этой некорректной вариационной задачи воспользуемся методом квазирешений на системе расширяющихся компактных в $H^{\lambda/2}[0,T]$ $(0 < \lambda < 1)$ множеств F_R, где

$$F_R = \{f(t) \in F, \ \|f\|_{W_2^1[0,T]} \leqslant R\}, \quad R = \mathrm{const} > 0.$$

Квазирешением уравнения (63) на множестве F_R назовем множество

$$F_R^* = \{f_R \in F_R, \ J_g(f_R) = \inf_{f \in F_R} J_g(f)\}.$$

Корректность задачи минимизации функционала $J_g(f)$ на F_R при любом фиксированном $R > 0$ и возможность построения квазирешения F_R^* (непустота F_R^*) устанавливаются как в [3].

Если точное решение, т.е. элемент f^0, не принадлежит некоторому компакту $F_{\overline{R}}$, то любой элемент из множества квазирешений F_R^* $(\overline{R} < R < R^0 = \|f^0\|_{W_2^1[0,T]})$ сходится в $W_2^1[0,T]$ к f^0 при $R \to R^0$. Это утверждение формулирует следующая теорема на основе понятия α-сходимости множеств.

Теорема 6. *Пусть входные данные обратной задачи* (1) – (4) *удовлетворяют условиям теоремы* 1 *и, кроме того, при* $(x,t,u) \in \overline{D}$ *производные* a_{xu}, a_{uu}, b_u, c_u, d_u *непрерывны в смысле Гельдера по* x, t, u *с показателями* λ, $\lambda/2$, λ *соответственно,* $0 < \lambda < 1$.

Тогда квазирешение F_R^*, *определенное для любого* R, $0 < R < R^0 = \|f^0\|_{W_2^1[0,T]}$, α-*сходится к точному решению* f^0 *операторного уравнения* (63) *при* $R \to R^0$:

$$F_R^* \xrightarrow{\alpha} f^0 \ (W_2^1[0,T]).$$

При этом для $R \to R^0$

$$U_R^* \xrightarrow{\alpha} u^0 \ (H^{2+\lambda,1+\lambda/2}(\overline{Q})),$$

где $U_R^* = \{u_R(x,t)\}$ — *множество решений квазилинейной краевой задачи* (1)–(3), *соответствующее множеству* F_R^* *функций* $f_R(t)$ *в правой части уравнения* (1), $\{u^0(x,t), f^0(t)\}$ — *точное решение обратной задачи* (1)–(4) *в смысле определения* 1.

Доказательство теоремы 6 аналогично доказательству соответствующих утверждений в [3]. Оно основано, в частности, на оценках устойчивости в классах Гельдера первой краевой задачи (1)–(3)

$$|\Delta u|_Q^{2+\lambda,1+\lambda/2} \leqslant K|\Delta f|_{[0,T]}^{\lambda/2}, \quad 0 < \lambda < 1, \quad K = \mathrm{const} > 0.$$

Исследование устойчивости метода квазирешений при приближенном задании оператора A и правой части g в операторном представлении (63) обратной задачи (1)–(4) проводится по той же схеме, что в [3] для обратной задачи с данными Коши.

Замечание 2. Обоснование применимости метода квазирешений для устойчивого приближенного решения обратной задачи с краевыми условиями третьего рода (45), (46) проводится аналогичным образом. При этом выбор множества F должен учитывать требование согласования (47):

$$F = \{f(t) \in W_2^1[0,T],\ c(x,0,\varphi)g_t - L\varphi|_{x=0,t=0} = p_0(x,0)f(0) + p_1(x,0)|_{x=l_0}\}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гольдман Н.Л.* Обратная задача с финальным переопределением для квазилинейного параболического уравнения с неизвестной правой частью // Вычислительные методы и программирование. 2003. **4**, № 1. 159–170.
2. *Гольдман Н.Л.* Единственность определения правой части в квазилинейных параболических уравнениях с финальным и граничным наблюдением // Доклады РАН. 2004. **395**, № 2. 151–156.
3. *Гольдман Н.Л.* Об одном классе обратных задач с данными Коши для квазилинейного параболического уравнения // Вычислительные методы и программирование. 2004. **5**, № 1. 74–86.
4. *Гольдман Н.Л.* Определение правой части в квазилинейном параболическом уравнении с финальным наблюдением // Дифференциальные уравнения. 2005. **41**, № 3. 366–374.
5. *Prilepko A.I., Orlovsky D.G., and Vasin I.A.* Methods for solving inverse problems in mathematical physics. New York–Basel: Marcel Dekker, 1999.
6. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.
7. *Никольский С.М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1969.
8. *Натансон И.П.* Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1974.
9. *Ландис Е.М.* Некоторые вопросы качественной теории эллиптических и параболических уравнений // Успехи матем. наук. 1959. **14**, № 1. 21–85.
10. *Иванов В.К.* О некорректно поставленных задачах // Труды МИАН. 1971. **112**. 232–240.

Поступила в редакцию
02.04.2005