УДК 517.956.223

ПОСТРОЕНИЕ ФУНДАМЕНТАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ВЫРОЖДЕНИЕМ

Ю. П. Горьков[1]

Построено фундаментальное решение параболического уравнения $u_{yy} - \operatorname{Sgn} y\, |y|^p\, u_x = 0$.

Введение. Цель настоящей работы — построение фундаментального решения уравнения

$$u_{yy} - \operatorname{Sgn}\ y\, |y|^p\, u_x = 0 \tag{1}$$

и использование его для получения явного решения краевой задачи

$$u_{yy} - \operatorname{Sgn} y\, |y|^p\, u_x = f(x, y), \quad (x, y) \in R_2^+, \tag{2}$$

$$u(0, y) = \varphi(y), \quad y \geqslant 0; \tag{3}$$

$R_2^+ = \{x, y : x > 0, -\infty < y < \infty\}$, $p > 0$. В работе [1] построено явное решение задачи (2), (3) при $f = 0$; в работе [2] построено явное решение этой же задачи при $p = 1$.

Пусть выполнены условия:

1) $\sup\limits_{x,y} \big| f(x, y)\big| < \infty, \quad (x, y) \in R_2^+$;

2) $f(x, y) \in C^{\alpha, \beta}(R_2^+), \quad \dfrac{1}{q} < \alpha, \quad 0 < \beta, \quad q = p + 2$;

3) $\displaystyle\int\limits_0^\infty \int\limits_{-\infty}^\infty \big|f(x, y)\big|(x^2 + y^2)\, dx\, dy < \infty$;

4) $\varphi(y)$ — непрерывная функция, $\big|\varphi(y)\big| \leqslant C_0(1 + y^\delta)$, где $C_0 > 0$ и $0 \leqslant \delta < 1/2$.

Под решением задачи (2), (3) будем понимать непрерывную в $\overline{R_2^+}$ функцию $u(x, y)$, имеющую непрерывные в R_2^+ производные u_x, u_y, u_{yy}, удовлетворяющую в R_2^+ уравнению (2) и удовлетворяющую условию (3).

1. Построение фундаментального решения. Сделаем несколько замечаний.

Замечание 1. Из представления решения задачи (2), (3), полученного в [1] для случая $f = 0$, следует, что

$$\begin{aligned} u(0, y) = \frac{1}{\pi} \sin\Big(\frac{\pi}{q}\Big) \times \\ \times \int\limits_0^\infty \big(|y|t\big)^{1/2} K_{1/q}\big(|y|^{q/2} t\big)\, \frac{q}{4\cos^2(\pi/2q)}\, t^{1/2} \Big[\int\limits_0^\infty \lambda^{p+1/2} \varphi(\lambda) \big[\mathbf{J}_{1/q}(\lambda^{q/2} t) + \mathbf{J}_{-1/q}(\lambda^{q/2} t)\big]\, d\lambda \Big] dt, \end{aligned} \tag{4}$$

где $\mathbf{J}_\nu(z)$ — функция Ангера порядка ν и $y \leqslant 0$. После несложных вычислений, основанных на представлениях $K_{1/q}(z)$ и $\mathbf{J}_\nu(z)$ (см. [3]), равенство (4) приводится к виду

$$u(0, y) = \frac{q}{\pi} \sin\frac{\pi}{2q} \int\limits_0^\infty \frac{\tau^{q-3/2}}{\tau^q + 1}\, \varphi\big(|y|\tau\big)\, d\tau, \quad y \leqslant 0.$$

Замечание 2. Если $f(x)$ — ограниченная непрерывная функция, то функция

$$\omega(x, y) = \frac{1}{\Gamma(1/q) q^{2/q}}\, y \int\limits_{-\infty}^x f(t) \exp\Big(-\frac{y^q}{q^2(x - t)}\Big)\, \frac{1}{(x - t)^{1+1/q}}\, dt$$

[1] Научно-исследовательский вычислительный центр, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, 119992, Москва; e-mail: arush@srcc.msu.su

удовлетворяет в области $\mathbb{R}_2^+ = \{x, y : -\infty < x < \infty, y > 0\}$ уравнению $u_{yy} - \operatorname{Sgn} y\,|y|^p\, u_x = 0$ и условию $u(x,0) = f(x)$ [1].

Замечание 3. Функция

$$E(x,y,\eta) = \frac{1}{2q}\,\frac{|y\eta|^{1/2}}{x}\,\exp\Big(-\frac{|y|^q + |\eta|^q}{q^2 x}\Big)\Big[I_{-1/q}\Big(\frac{2|y\eta|^{q/2}}{q^2 y}\Big) + \operatorname{Sgn} y \operatorname{Sgn}\eta\, I_{1/q}\Big(\frac{2|y\eta|^{q/2}}{q^2 x}\Big)\Big] H(x)$$

($H(x)$ — функция Хевисайда) является фундаментальным решением уравнения

$$u_{yy} - |y|^p\, u_x = 0. \tag{5}$$

При ограниченной непрерывной функции $f(y)$ функция $v(x,y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\eta|^p E(x,y,\eta) f(\eta)\, d\eta$ удовлетворяет уравнению (5) и условию $v(0,y) = f(y)$; $(x,y) \in \mathbb{R}_2^+$ [4].

Приведем несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 1. *Система уравнений*

$$\begin{aligned}
\mu(y) &= \frac{q}{\pi}\sin\Big(\frac{\pi}{2q}\Big)\sqrt{|y|}\int\limits_0^\infty \frac{\tau^{q-3/2}}{\tau^q + |y|^q}\,\big[\psi(\tau) + \eta^{2-q}\delta(\tau-\eta)\big]\,d\tau, \quad y<0,\\
\psi(y) &= \frac{q}{\pi}\sin\Big(\frac{\pi}{2q}\Big)\sqrt{y}\int\limits_0^\infty \frac{\tau^{q-3/2}}{\tau^q + y^q}\,\mu(-\tau)\,d\tau, \quad y>0
\end{aligned} \tag{6}$$

имеет решение

$$\mu(y) = \frac{q}{2\pi}\operatorname{tg}\frac{\pi}{2q}\,\frac{|y|+\eta}{|y|^q+\eta^q}, \quad y<0; \quad \psi(y) = \frac{q}{2\pi}\operatorname{tg}\frac{\pi}{2q}\,\frac{y-\eta}{y^q-\eta^q}, \quad y>0,$$

где $\delta(x)$ — функция Дирака и $\eta > 0$.

Лемма 2. *Интегральные уравнения*

$$\begin{aligned}
\frac{q}{2\pi}\operatorname{tg}\frac{\pi}{2q}\,\frac{\gamma-y}{\gamma^q-y^q} &= \frac{1}{\Gamma(1/q)q^{2/q}}\,y\int\limits_0^\infty f_1(\gamma t^{1/q})\exp\Big(-\frac{y^q}{q^2}t\Big)\,dt, \quad y>0,\\
\frac{q}{2\pi}\operatorname{tg}\frac{\pi}{2q}\,\frac{\gamma+|y|}{\gamma^q+|y|^q} &= \frac{1}{\Gamma(1/q)q^{2/q}}\,|y|\int\limits_0^\infty f_2(\gamma t^{1/q})\exp\Big(-\frac{|y|^q}{q^2}t\Big)\,dt, \quad y<0
\end{aligned}$$

имеют при $\gamma > 0$ следующие решения:

$$f_1(\gamma) = \frac{q^{2/q}}{2\pi^2}\Gamma(1/q)\operatorname{tg}\frac{\pi}{2q}\,\sin\frac{\pi}{q}\int\limits_0^\infty \frac{1}{\xi^q+1}\,\exp\Big(-\frac{\gamma^q}{q^2\xi^q}\Big)\,d\xi,$$

$$f_2(\gamma) = \frac{1}{2\pi}\Gamma(1/q)\operatorname{tg}\frac{\pi}{2q}\,q^{2/q-1}\Big[\exp\Big(-\frac{\gamma^q}{q^2}\Big) + \frac{2q}{\pi}\int\limits_0^\infty \sin\Big(\frac{\gamma^q}{q^2\xi^q}\Big)\frac{1}{\xi^{2q}+1}\Big(\cos\frac{\pi}{2q} + \sin\frac{\pi}{2q}\,\xi^q\Big)\,d\xi\Big].$$

Чтобы убедиться в справедливости лемм, достаточно функции $\mu(y)$, $\psi(y)$, $f_1(\gamma)$, $f_2(\gamma)$ подставить в соответствующие уравнения и вычислить интегралы.

Обратимся теперь к непосредственному построению фундаментального решения. Положим для $y > 0$, $\gamma > 0$, $-\infty < x < \infty$

$$v(x,y,\gamma) = \frac{1}{\Gamma(1/q)q^{2/q}}\,y\int\limits_{-\infty}^{x} E(t,0,\gamma)\exp\Big(-\frac{y^q}{q^2(x-t)}\Big)\frac{1}{(x-t)^{1+1/q}}\,dt.$$

Согласно замечанию 2 функция v удовлетворяет условию $v(x,0,\gamma)=E(x,0,\gamma)$ и уравнению (1) при $(x,y)\in R_2^+$. Заметим, что

$$E(x,0,\gamma)=\frac{q^{2/q-1}x^{1/q}}{2^{1+1/q}\Gamma(1-1/q)}\exp\Big(-\frac{\gamma^q}{q^2x}\Big),\quad x>0,\quad \gamma>0.$$

Обозначим $w(x,y,\gamma)=E(x,y,\gamma)-v(x,y,\gamma)$, $(x,y)\in\mathbb{R}_2^+$, $\gamma>0$. Согласно замечанию 3 функция w удовлетворяет уравнению

$$w_{yy}-\operatorname{Sgn}y\,|y|^p\,w_x=-\delta(x)\delta(y-\gamma),\quad (x,y)\in\mathbb{R}_2^+,\quad \gamma>0,$$

и условию $w(x,0,\gamma)=0$, $-\infty<x<\infty$. Учитывая вид уравнения (1), естественно предположить, что искомое фундаментальное решение $\Phi(x,y,\xi,\eta)$ удовлетворяет следующим тождествам:

$$\begin{aligned}\Phi(x,y,0,\eta)&=\frac{1}{|x|^{1-1/q}}\,\Phi\Big(\operatorname{Sgn}x,\frac{y}{|x|^{1/q}},0,\frac{\eta}{|x|^{1/q}}\Big),\\ \Phi(x,y,0,\eta)&=\frac{1}{|y|^{q-1}}\,\Phi\Big(\frac{x}{|y|^q},\operatorname{Sgn}y,0,\frac{\eta}{|y|}\Big).\end{aligned}\tag{7}$$

Естественно также предположить,что $\Phi(0,y,0,\eta)$ удовлетворяет системе уравнений (6). Согласно лемме 1 это означает, что при $\eta>0$

$$\begin{aligned}\Phi(0,y,0,\eta)&=\frac{q}{2\pi}\operatorname{tg}\frac{\pi}{2q}\,\frac{|y|+\eta}{|y|^q+\eta^q},\quad y<0,\\ \Phi(0-,y,0,\eta)&=\frac{q}{2\pi}\operatorname{tg}\frac{\pi}{2q}\,\frac{y-\eta}{y^q-\eta^q},\quad y>0.\end{aligned}\tag{8}$$

Можно также предположить, что при $\gamma>0$

$$\begin{aligned}\Phi(x,y,0,\gamma)&=\frac{1}{\Gamma(1/q)q^{2/q}}\,y\int\limits_{-\infty}^{x}\Phi(t,0,0,\gamma)\exp\Big(-\frac{y^q}{q^2(x-t)}\Big)\,\frac{1}{(x-t)^{1+1/q}}\,dt\quad\text{при}\quad x<0,\quad y>0,\\ \Phi(x,y,0,\gamma)&=\frac{1}{\Gamma(1/q)q^{2/q}}\,|y|\int\limits_{x}^{\infty}\Phi(t,0,0,\gamma)\exp\Big(-\frac{|y|^q}{q^2(t-x)}\Big)\,\frac{1}{(t-x)^{1+1/q}}\,dt\quad\text{при}\quad x>0,\quad y<0.\end{aligned}\tag{9}$$

Тогда из соотношений (7) – (9) и леммы 2 следует, что при $\gamma>0$

$$\Phi(-1,0,0,\gamma)=f_1(\gamma),\quad \Phi(1,0,0,\gamma)=f_2(\gamma).$$

Последние равенства тождественны следующим равенствам: при $x>0$

$$\Phi(x,0,0,\gamma)=\frac{1}{2\pi x^{1-1/q}}\,\Gamma(1/q)\operatorname{tg}\frac{\pi}{2q}\,q^{2/q-1}\Big[\exp\Big(-\frac{\gamma^q}{q^2x}\Big)+\frac{2q}{\pi}\int\limits_0^\infty\sin\frac{\gamma^q}{q^2x\xi^q}\,\frac{1}{\xi^{2q}+1}\,\Big\{\cos\frac{\pi}{2q}+\sin\frac{\pi}{2q}\xi^q\Big\}\,d\xi\Big]$$

и при $x<0$

$$\Phi(x,0,0,\gamma)=\frac{q^{2/q}}{2\pi^2|x|^{1-1/q}}\,\Gamma(1/q)\operatorname{tg}\frac{\pi}{2q}\,\sin\frac{\pi}{q}\int\limits_0^\infty\frac{1}{\xi^q+1}\,\exp\Big(-\frac{\gamma^q}{q^2|x|\xi^q}\Big)\,d\xi.$$

Положим

$$\Phi_+(x,y,\gamma)=\frac{1}{\Gamma(1/q)q^{2/q}}\,y\int\limits_{-\infty}^{x}\Phi(t,0,0,\gamma)\exp\Big(-\frac{y^q}{q^2(x-t)}\Big)\,\frac{1}{(x-t)^{1+1/q}}\,dt,\quad\text{при}\quad (x,y)\in\mathbb{R}_2^+,$$

$$\Phi_-(x,y,\gamma)=\frac{1}{\Gamma(1/q)q^{2/q}}\,|y|\int\limits_{x}^{\infty}\Phi(t,0,0,\gamma)\exp\Big(-\frac{|y|^q}{q^2(t-x)}\Big)\,\frac{1}{(t-x)^{1+1/q}}\,dt,\quad\text{при}\quad (x,y)\in\mathbb{R}_2^-.$$

Функции Φ_+ и Φ_- удовлетворяют уравнению (1) (каждая в своей области определения) и при $\gamma > 0$ и $-\infty < x < \infty$ имеем $\Phi_+(x,0,\gamma) = \Phi_-(x,0,\gamma)$. Полагая

$$\Phi(x,y,\xi,\gamma) = \begin{cases} \Phi_+(x-\xi,y,\gamma) + w(x-\xi,y,\gamma), & (x,y) \in \mathbb{R}_2^+, \\ \Phi_-(x-\xi,y,\gamma), & (x,y) \in \mathbb{R}_2^-, \end{cases}$$

получим функцию, непрерывную при $(x,y) \neq (\xi,\gamma)$, имеющую непрерывные производные Φ_x, Φ_y, Φ_{yy} (при $(x,y) \neq (\xi,\gamma)$) и удовлетворяющую уравнению

$$\Phi_{yy} - \operatorname{Sgn} y\,|y|^p \Phi_x = -\delta(x-\xi)\delta(y-\gamma).$$

Построение фундаментального решения при $\gamma \leqslant 0$ проводится аналогично. Функция $\Phi(x,y,\xi,\gamma)$ с указанными выше производными стремится к нулю при $x^2+y^2 \to \infty$ (при ограниченных значениях ξ и γ). Асимптотика фундаментального решения $\Phi(x,y,\xi,\gamma)$ при $x^2+y^2 \to \infty$ и при $p=1$ построена в работе [5]. Построение асимптотики фундаментального решения при произвольном p проводится аналогично.

2. Представление решения краевой задачи. Пусть $\Phi^*(x,y,\xi,\eta)$ означает фундаментальное решение сопряженного уравнения

$$u_{yy} + \operatorname{Sgn} y\,|y|^p\, u_x = -\delta(x-\xi)\delta(y-\eta).$$

Поскольку функция

$$z(x,y) = -\int\limits_0^\infty \int\limits_{-\infty}^\infty f(\xi,\eta)\Phi(x,y,\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta$$

удовлетворяет уравнению (2) и условию 4) (при $x=0$), то решение задачи (2), (3) достаточно выписать при $f=0$.

Пусть $u(x,y)$ удовлетворяет уравнению (2) при $f=0$ и граничному условию $u(0,y)=\varphi(y)$ при $y \geqslant 0$. Интегрируя обе части тождества $\big(u_{yy} - \operatorname{Sgn} y\,|y|^p\, u_x\big)\Phi^*(x,y,\xi,\eta) = 0$ по области $x>0$, $-\infty<y<\infty$, получим равенство

$$u(\xi,\eta) = \int\limits_0^\infty y^p u(0,y)\Phi^*(0,y,\xi,\eta)\,dy - \int\limits_{-\infty}^0 |y|^p u(0,y)\Phi^*(0,y,\xi,\eta)\,dy. \tag{10}$$

Учитывая замечание 1, равенство (10) представим в виде

$$u(\xi,\eta) = \int\limits_0^\infty y^p\varphi(y)\Phi^*(0,y,\xi,\eta)\,dy - \int\limits_{-\infty}^0 |y|^p\Phi^*(0,y,\xi,\eta)\left[\frac{q}{\pi}\sin\Big(\frac{\pi}{2q}\Big)\int\limits_0^\infty \frac{\tau^{q-3/2}}{\tau^q+1}\,\varphi\big(\tau|y|\big)\,d\tau\right]dy.$$

Полагая

$$G(\xi,\eta,y) = \Phi^*(0,y,\xi,\eta) - \frac{q}{\pi}\sin\Big(\frac{\pi}{2q}\Big)\int\limits_0^\infty \frac{\tau^{q-3/2}}{\tau^q+1}\,\Phi^*(0,-\tau y,\xi,\eta)\,d\tau,$$

приходим к равенству $u(\xi,\eta) = \int\limits_0^\infty y^p\varphi(y)G(\xi,\eta,y)\,dy.$

Теорема. *Пусть выполнены условия* 1)–4). *В классе функций, растущих при* $x^2+y^2\to\infty$ *не быстрее, чем* $M\big(x^{\delta/3}+|y|^\delta\big)$, *где* M — *постоянная и* $0\leqslant\delta<1/2$, *решение задачи* (2), (3) *единственно и имеет вид*

$$u(x,y) = \int\limits_0^\infty \gamma^p\varphi(\gamma)G(x,y,\gamma)\,d\gamma + \int\limits_0^\infty\int\limits_{-\infty}^\infty f(\xi,\eta)\left[\int\limits_0^\infty \gamma^p\Phi(0,\gamma,\xi,\eta)G(x,y,\gamma)\,d\gamma\right]d\xi\,d\eta. \tag{11}$$

Доказательство теоремы проводится аналогично доказательству представления решения задачи (2), (3) при $p=1$ [2].

Представлению (11) можно придать другой вид, если воспользоваться тождеством $\Phi_*(\xi,\eta,x,y) = \Phi(x,y,\xi,\eta)$. Доказательство тождества проводится стандартным приемом с использованием формулы

Грина [6]. Учитывая специфику уравнения (2), область интегрирования по переменным μ и σ очевидным образом меняется. Продолжение фундаментальных решений по переменным μ и σ (при переходе к полярной системе координат) осуществляется согласно явным представлениям.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Pagani C.* On the parabolic equation $\mathrm{Sgn}(x)|x|^p u_y - u_{xx} = 0$ and a related one // Annali di matematica para ed appicata. 1974. **IV**, N IC. 333–399.
2. *Горьков Ю.П.* Формула решения одной краевой задачи для стационарного уравнения броуновского движения // Доклады АН СССР. 1974. **223**, № 3. 525–528.
3. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. II. М.: Наука, 1974.
4. *Gevrey M.* Sur les equations aux derivees partielles du type parabolique // Jornal de Mathematique. 1914. Chap. IV, V. 105–137.
5. *Горьков Ю.П.* О поведении решения одной краевой задачи для стационарного уравнения броуновского движения // Труды института математики и механики УНЦ АН СССР. 1979. Вып. 28. 73–80.
6. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. М.: Мир, 1968.

Поступила в редакцию
21.01.2005