УДК 519.6

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ СТОКСА С РАЗРЫВНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

А. В. Рукавишников[1]

В работе рассмотрена задача Стокса с кусочно-постоянным коэффициентом в эллиптическом операторе в области, состоящей из объединения двух прямоугольников. Для решения этой задачи применен метод декомпозиции области в сочетании с аппроксимацией задачи на подобластях при помощи неконформных конечных элементов. Для склейки решений на интерфейсе используются мортарные конечные элементы. В системе линейных алгебраических уравнений удалось исключить ряд неизвестных, в результате чего общее число уравнений стало существенно меньше. Для решения полученной системы уравнений рассмотрен и исследован итерационный метод. Результаты численных экспериментов подтвердили возможность использования такого подхода для задачи Стокса.

1. Введение. Численному решению задачи Стокса посвящено большое количество публикаций в связи с многочисленными приложениями, а также тем фактом, что эффективное решение этой задачи открывает путь к решению нелинейных уравнений Навье–Стокса. Первыми итерационными методами решения стационарной задачи Стокса в переменных "скорость-давление" были методы Эрроу–Гурвица и Удзавы, предложенные (без обоснования) на дифференциальном уровне в работе [1]. Несмотря на то, что с момента создания этих методов прошло уже более сорока лет, они остаются основой для создания новых итерационных методов.

Обоснованию методов аппроксимации задачи Стокса также посвящено большое количество работ. Эти работы могут быть условно поделены на две части. К первой из них относятся работы по аппроксимации задачи методом конечных разностей, а ко второй — методом конечных элементов. В первой части следует отметить работы О. А. Ладыженской [2], которая впервые предложила разностные схемы первого порядка для решения нестационарных уравнений Навье–Стокса. В контексте данной статьи следует упомянуть работы Г. И. Марчука и Н. Н. Яненко [3 – 5], О. М. Белоцерковского, В. А. Гущина и В. В. Щенникова [6], А. А. Дородницына и Н. А. Меллер [7], Г. М. Кобелькова [8].

Необходимость решения задачи Стокса в областях сложной формы, а также, как следствие, необходимость аппроксимации криволинейной границы потребовали использования конечно-элементной аппроксимации задачи. При этом оказалось, что нельзя использовать элементы одного и того же типа одновременно для аппроксимации скоростей и давления. Это потребовало разработки специальных конечных элементов (см., например, [9, 10]).

Тем не менее, был найден способ, как использовать элементы одного и того же типа для аппроксимации скоростей и давления. При этом, однако, пришлось отказаться от требования принадлежности приближенного решения $\mathbf{w}$ пространству $\mathbf{H}^1$. Такие конечные элементы получили название *неконформных*. Несмотря на то, что с математической точки зрения этот подход полностью обоснован, возникает ряд проблем, связанных с решением получаемой системы линейных алгебраических уравнений. Кроме этого, до сих пор не был исследован метод декомпозиции для задачи Стокса с неконформными конечными элементами.

В данной статье рассмотрена задача Стокса с кусочно-постоянным коэффициентом в эллиптическом операторе в области, состоящей из объединения двух прямоугольников. Для дискретизации задачи используется метод конечных элементов с неконформными элементами в каждой подобласти. При этом сетка в каждой подобласти выбирается независимо, а на общей границе подобластей стыковка происходит при помощи мортарных конечных элементов на основе методов, предложенных в работах [11 – 14]. Для решения полученной системы линейных алгебраических уравнений предложен способ преобразования при помощи исключения ряда неизвестных, в результате чего удается уменьшить вдвое число неизвестных, а преобразованная система обладает свойствами, позволяющими использовать для ее решения классические итерационные методы. Выполненные расчеты тестовой задачи с использованием обобщенного

[1] Хабаровское отделение института прикладной математики ДВО РАН, ул. Запарина, 92, 680000, г. Хабаровск; e-mail: alexeyruk@mail.ru

метода минимальных невязок (GMRES, см., например, [15]) для обращения оператора Лапласа в каждой из подобластей показали эффективность данного подхода.

Работа состоит из трех разделов. В первом разделе обсуждается постановка задачи Стокса. Второй раздел посвящен изложению алгоритма численного решения задачи Стокса с использованием неконформных конечных элементов и функций склейки на границе между подобластями (мортарные элементы), построению и исследованию итерационного метода решения полученной системы линейных алгебраических уравнений. В третьем разделе приведены результаты тестовых расчетов модельной задачи.

2. Постановка задачи. Пусть $\Omega \subset R^2$ — прямоугольник

$$\bar\Omega = \bar\Omega_1 \cup \bar\Omega_2 = \{(x,\,y) : 0 \leqslant x \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant y \leqslant \pi\}$$

с границей $\Gamma = \bigcup\limits_{i=1}^{4} \Gamma_i$, где Γ_1 и Γ_3 — нижняя и верхняя стороны прямоугольника, а Γ_2 и Γ_4 — правая и левая. Подобласти Ω_1 и $\Omega_2 = \Omega\backslash\bar\Omega_1$ являются квадратами, где $\Omega_1 = \{(x,y) : 0 < x < \pi,\, 0 < y < \pi\}$. Через Γ_{12} обозначим общую часть границы (*интерфейс*) Ω_1 и Ω_2.

Требуется найти вектор-функцию $\mathbf{w} = (u, v)$ и скалярную функцию p, удовлетворяющие следующей системе уравнений и граничных условий (*задача Стокса*):

$$\begin{aligned}
&-\operatorname{div}\big(a(x,\,y)\nabla\mathbf{w}\big) + \nabla p = \mathbf{f} && \text{в} \quad \Omega,\\
&\operatorname{div}\mathbf{w} = 0 && \text{в} \quad \Omega,\\
&\mathbf{w}\,\mathbf{n} = 0 && \text{на} \quad \Gamma,\\
&\mathbf{w}\,\tau = g_i && \text{на} \quad \Gamma_i, \quad i = 1,2,3,4,\\
&\int\limits_{\Omega} p\,dx\,dy = 0,
\end{aligned} \tag{1}$$

где $\mathbf{f} = (f_1,\, f_2)$ и g_i $(i = 1,2,3,4)$ — заданные функции, а $\mathbf{n}$ и τ — единичные нормальный и касательный векторы к границе.

Предполагается, что положительный коэффициент $a(x,\,y)$ кусочно-постоянен:

$$a(x,\,y) = \begin{cases} a_1, & (x,\,y) \in \Omega_1,\\ a_2, & (x,\,y) \in \Omega_2. \end{cases}$$

Через $\widehat{\mathbf{W}}(\Omega)$ обозначим пространство вектор-функций, каждая из компонент которых принадлежит $L_2(\Omega)$, их сужение на k-ю подобласть принадлежит $H^1(\Omega_k), k = 1,2$, и удовлетворяет граничным условиям (1). Через $L_2/R(\Omega)$ обозначим пространство функций из $L_2(\Omega)$, ортогональных единице, а через $\widehat{\mathbf{W}}^0(\Omega)$ определим пространство вектор-функций, каждая компонента которых принадлежит $L_2(\Omega)$, их сужение на каждую подобласть Ω_k, $k = 1,\,2$, принадлежит $H^1(\Omega_k)$ и удовлетворяет однородным условиям Дирихле на границе Γ.

Кроме этого, введем пространство $\Lambda(\Gamma_{12})$ как множество вектор-функций, каждая компонента которых принадлежит дуальному пространству к $H^{1/2}(\Gamma_{12})$ (относительно $L_2(\Gamma_{12})$).

Через q^k обозначим сужение функции q на k-ю подобласть, а через $[q]\big|_{\Gamma_{12}}$ — функцию разности двух следов (скачок) на общей границе двух подобластей, т.е. $[q]\big|_{\Gamma_{12}} := q^1\big|_{\Gamma_{12}} - q^2\big|_{\Gamma_{12}}$. Аналогично вводятся обозначения сужения и скачка для вектор-функции $\mathbf{q}$: $\mathbf{q}^k$ и $[\mathbf{q}]\big|_{\Gamma_{12}}$.

Определим обобщенное решение системы (1) как решение следующей вариационной задачи: найти тройку $(\mathbf{w},\, p,\, \overline{\lambda}) \in \widehat{\mathbf{W}}(\Omega) \times L_2/R(\Omega) \times \Lambda(\Gamma_{12})$, такую, что для любых $(\phi,\, \psi,\, \overline{\nu}) \in \widehat{\mathbf{W}}^0(\Omega) \times L_2(\Omega) \times \Lambda(\Gamma_{12})$ выполнены соотношения

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{2}\int\limits_{\Omega_k} (a_k\,\nabla\mathbf{w}^k\,\nabla\phi^k - p^k\operatorname{div}\phi^k)\,dx\,dy + \int\limits_{\Gamma_{12}} \overline{\lambda}\,[\phi]\big|_{\Gamma_{12}}\,dy = \sum_{k=1}^{2}\int\limits_{\Omega_k} \mathbf{f}^k\,\phi^k\,dx\,dy,\\
&\sum_{k=1}^{2}\int\limits_{\Omega_k} -\operatorname{div}\mathbf{w}^k\,\psi^k\,dx\,dy = 0, \qquad \int\limits_{\Gamma_{12}} [\mathbf{w}]\big|_{\Gamma_{12}}\,\overline{\nu}\,dy = 0.
\end{aligned} \tag{2}$$

В первом равенстве системы (2) вектор-функция $\overline{\lambda}$ определяется следующим образом:

$$\int\limits_{\Gamma_{12}} -\overline{\lambda}\,\varphi\,dy := \int\limits_{\Gamma_{12}} \Big((a_1\nabla\mathbf{w}^1 + p^1)\big|_{\Gamma_{12}\bigcap\overline{\Omega}_1}\,\mathbf{n}_1\Big)\,\varphi\,dy = \\ = \int\limits_{\Gamma_{12}} \Big(-(a_2\nabla\mathbf{w}^2 + p^2)\big|_{\Gamma_{12}\bigcap\overline{\Omega}_2}\,\mathbf{n}_2\Big)\,\varphi\,dy \quad \forall\varphi\in\mathbf{L}_2(\Gamma_{12}). \tag{3}$$

Равенство

$$\int\limits_{\Gamma_{12}} [\mathbf{w}]\big|_{\Gamma_{12}}\,\overline{\nu}\,dy = 0 \quad \forall\overline{\nu}\in\Lambda(\Gamma_{12}) \tag{4}$$

определяет условие слабой непрерывности компонент вектор-функции скорости на Γ_{12}, а условие

$$\int\limits_{\Gamma_{12}} \Big((a_1\nabla\mathbf{w}^1 + p^1)\big|_{\Gamma_{12}\bigcap\overline{\Omega}_1}\,\mathbf{n}_1\Big)\,\varphi\,dy = \int\limits_{\Gamma_{12}} \Big(-(a_2\nabla\mathbf{w}^2 + p^2)\big|_{\Gamma_{12}\bigcap\overline{\Omega}_2}\,\mathbf{n}_2\Big)\,\varphi\,dy \quad \forall\varphi\in\mathbf{L}_2(\Gamma_{12}) \tag{5}$$

есть равенство потоков с давлением на функционалах, определенных на интерфейсе Γ_{12}. В выражениях (3) и (5) $\mathbf{n}_k$ — вектор внешней нормали к Γ_{12}. Равенства (4) и (5) определяют сопряженные условия на Γ_{12}.

3. Численное решение. Выполним триангуляцию T_h области Ω. Сначала каждую из подобластей Ω_1 и Ω_2 вертикальными и горизонтальными линиями разбиваем на элементарные квадраты со стороной $2h_1$ и $2h_2$ соответственно. Затем каждый элементарный квадрат диагоналями разбиваем на четыре треугольника. Построенные треугольники будем обозначать символом e и называть конечными элементами.

Далее, введем $T_h^{(1)}$ и $T_h^{(2)}$ — триангуляции подобластей Ω_1 и Ω_2, а через $\Omega_h = \bigcup\limits_{e\in T_h} e$, $\Omega_{1h} = \bigcup\limits_{e\in T_h^{(1)}} e$ и $\Omega_{2h} = \bigcup\limits_{e\in T_h^{(2)}} e$ обозначим разбиения Ω, Ω_1 и Ω_2 соответственно. Отметим, что построенная триангуляция квазиравномерна на подобластях (см. [16]).

В качестве узлов аппроксимации $\{a_j^{(k)}\}$ для каждой компоненты вектор-функции скорости на $\overline{\Omega}_k$ выберем середины сторон конечных элементов e, совокупность которых обозначим через $\overline{S}^{(k)}$, $k=1,2$. Подмножество узлов, принадлежащих $\Omega_k\bigcup\Gamma_{12}$, определим как $S^{(k)}$. Выбор узлов аппроксимации для скалярной функции давления не принципиален.

В дальнейшем будем рассматривать $h_1 = 2h_2$; тогда подмножества узлов аппроксимации $S^{(1)}$ и $S^{(2)}$ для компонент вектор-функции скорости на $\Gamma_{12}\bigcap\overline{\Omega}_1$ и $\Gamma_{12}\bigcap\overline{\Omega}_2$ не совпадают.

Введем конечно-элементные пространства на Ω_{kh}.

1. $W_h^{(k)}(\Omega_{kh})$ — подпространство кусочно-линейных непрерывных на e конечно-элементных функций из пространства $L_2(\Omega_{kh})$, базисные функции в котором определены естественным образом: базисная функция, соответствующая узлу $a_j^{(k)}$, равна 1 и нулю в остальных узлах.

2. $X_h^{(k)}(\Omega_{kh})$ — подпространство кусочно-постоянных конечно-элементных функций из пространства $L_2(\Omega_{kh})$, базисные функции которого равны 1 на одном из треугольников и нулю в остальных.

Сеточное решение системы (2) на подобластях Ω_k, $k=1,2$, будем искать в виде

$$u_{kh}(x,\,y) = \sum_{\{i;a_i^{(k)}\in S^{(k)}\}} u_i^k\,\phi_i^{(k)}(x,\,y), \qquad v_{kh}(x,\,y) = \sum_{\{i;a_i^{(k)}\in S^{(k)}\}} v_i^k\,\phi_i^{(k)}(x,\,y), \qquad p_{kh}(x,\,y) = \sum_{\{i;e_i\in T_h^{(k)}\}} p_i^k\,\psi_i^{(k)}(x,\,y),$$

где $\phi_i^{(k)}$ и $\psi_i^{(k)}$ — базисные функции. Обозначим через Λ_h пространство непрерывных кусочно-линейных функций на Γ_{12} с узлами

$$\widetilde{S} = \{b_j\} = \big\{(\pi,\,h_1+2jh_1),\,j=0,\dots,N-1\big\}, \quad \text{где} \quad N = \frac{\pi}{2h_1}\,.$$

Конечными элементами (mortar elements) на этом пространстве будут отрезки

$$\begin{aligned} \Delta_0 &= \big[(\pi,\,0),\,(\pi,\,h_1)\big],\\ \Delta_j &= \Big[\big(\pi,\,h_1+2(j-1)h_1\big),\,(\pi,\,h_1+2jh_1)\Big], \quad j=1,\dots,N-1,\\ \Delta_N &= \Big[\big(\pi,\,h_1+2(N-1)h_1\big),\,(\pi,\,\pi)\Big], \end{aligned}$$

а базисные функции ν_j, $j = 0, \dots, N-1$, имеют вид

1) $\nu_0(b_0) = 1$, $\nu_0(b_j) = 0 \quad \forall j = 1, \dots, N-1$, $\nu_0(\pi, y) = 1$ при $y \in \Delta_0$,
$\nu_0(\pi, y)$ при $y \in \Delta_1$ — линейная, $\nu_0(\pi, y) = 0$ при $y \in \Delta_j \quad \forall j = 2, \dots, N$;

2) $\nu_j(b_j) = 1$, $\nu_j(b_i) = 0 \quad \forall i \neq j$, $\nu_j(\pi, y)$ при $y \in \Delta_j$, $\nu_j(\pi, y)$ при $y \in \Delta_{j+1}$ — линейные,
$\nu_j(\pi, y) = 0$ при $y \in \Delta_i \quad \forall i \neq j, j+1$, $\forall j = 1, \dots, N-2$;

3) $\nu_{N-1}(b_{N-1}) = 1$, $\nu_{N-1}(b_j) = 0 \quad \forall j = 0, \dots, N-2$, $\nu_{N-1}(\pi, y) = 1$ при $y \in \Delta_N$,
$\nu_{N-1}(\pi, y)$ при $y \in \Delta_{N-1}$ — линейная, $\nu_{N-1}(\pi, y) = 0$ при $y \in \Delta_j \quad \forall j = 0, \dots, N-2$.

Функции склейки λ и β будем искать в виде $\lambda_{kh}(y) = \sum\limits_{i=0}^{N-1} \lambda_{ikh}\nu_i(\pi, y)$ и $\beta_{kh}(y) = \sum\limits_{i=0}^{N-1} \beta_{ikh}\nu_i(\pi, y)$; с их помощью склеиваются сеточные решения компонент вектор-функции скорости на интерфейсе Γ_{12}.

Далее, определим сеточные пространства на Ω_h.

1. Для компонент вектор-функции скорости (u и v): пространство $W_h^u(\Omega_h)\big(W_h^v(\Omega_h)\big)$ — подпространство функций из пространства $L_2(\Omega_h)$, удовлетворяющих краевым условиям задачи (1) в узлах на границе Γ; сужение каждого представителя определяемого пространства на k-ю подобласть принадлежит $W_h^{(k)}(\Omega_{kh})$, $k = 1, 2$.

2. Для функции давления: пространство $X_h(\Omega_h)$ — подпространство функций из пространства $L_2(\Omega_h)$, сужение каждого представителя которого на k-ю подобласть принадлежит $X_h^{(k)}(\Omega_{kh})$, $k = 1, 2$.

Кроме этого, введем пространство $\widehat{W}_h^0(\Omega_h)$ как подпространство функций из пространства $L_2(\Omega_h)$, удовлетворяющих однородному условию Дирихле в узлах на границе Γ и таких, что их сужение на k-ю подобласть принадлежит $W_h^{(k)}(\Omega_{kh})$, $k = 1, 2$.

Поскольку пространство $W_h^u(\Omega_h) \times W_h^v(\Omega_h)$ не вложено в исходное пространство $\widehat{\mathbf{W}}(\Omega)$, то следуя [9] и [16] метод нахождения решения задачи (2) будем называть неконформным методом конечных элементов.

Запишем конечно-элементную задачу в виде: найти $(u_h, v_h, p_h, \lambda_h, \beta_h) \in W_h^u \times W_h^v \times X_h \times \Lambda_h \times \Lambda_h$, такие, что

$$\begin{aligned} &a'_h(u_h, \phi_h) + b'_h(\phi_h, p_h) + d_h(\phi_h, \lambda_h) = l'_h(\phi_h),\\ &a''_h(v_h, \phi_h) + b''_h(\phi_h, p_h) + d_h(\phi_h, \beta_h) = l''_h(\phi_h),\\ &c_h(u_h, v_h, \psi_h) = 0,\\ &d_h(u_h, \nu_h) = 0,\\ &d_h(v_h, \nu_h) = 0 \end{aligned} \tag{6}$$

для любых $(\phi_h, \psi_h, \nu_h) \in \widehat{W}_h^0 \times X_h \times \Lambda_h$.

Как и в работе [12], полагаем $\lambda_{2h} = -\lambda_{1h}$, $\beta_{2h} = -\beta_{1h}$. В дальнейшем будем использовать обозначения $\lambda_h = \lambda_{1h}$, $\beta_h = \beta_{1h}$, при этом $\overline{\lambda}_h = (\lambda_h, \beta_h)$ — конечно-элементный аналог вектор-функции $\overline{\lambda}$, определенной в (3). Отметим, что искомая сеточная функция p_h должна удовлетворять условию $\int\limits_{\Omega_h} p_h\, dx\, dy = 0$.

Конечно-элементная задача (6) порождает систему линейных алгебраических уравнений, имеющую седловую матрицу

$$\widetilde{A}\begin{pmatrix} u_h\\ v_h\\ p_h\\ \lambda_h\\ \beta_h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1^h\\ f_2^h\\ 0\\ 0\\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad \widetilde{A} = \begin{pmatrix} A'_h & 0 & B'_h & D_h & 0\\ 0 & A''_h & B''_h & 0 & D_h\\ C'_h & C''_h & 0 & 0 & 0\\ D_h^T & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & D_h^T & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

или, что то же самое,

$$\begin{aligned} &A'_h u_h + B'_h p_h + D_h \lambda_h = f_1^h,\\ &A''_h v_h + B''_h p_h + D_h \beta_h = f_2^h,\\ &C'_h u_h + C''_h v_h = 0,\\ &D_h^T u_h = 0,\\ &D_h^T v_h = 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Для использования метода декомпозиции перепишем (7) следующим образом:

$$\begin{aligned}
&A'_{kh}u_{kh} + B'_{kh}p_{kh} + D_{kh}\lambda_h = f_1^{kh},\\
&A''_{kh}v_{kh} + B''_{kh}p_{kh} + D_{kh}\beta_h = f_2^{kh},\\
&C'_{kh}u_{kh} + C''_{kh}v_{kh} = 0,\\
&\sum_{k=1}^{2} D^T_{kh}u_{kh} = 0,\\
&\sum_{k=1}^{2} D^T_{kh}v_{kh} = 0.
\end{aligned} \tag{8}$$

Разделим множество узлов $S^{(k)}$ на каждой из подобластей Ω_{kh} на две группы так, чтобы первая группа состояла из узлов конечных элементов, имеющих общее ребро с интерфейсом, а вторая — из оставшихся узлов. Компоненты вектор-функции скорости в узлах первой группы обозначим индексом Γ, второй — индексом I. Для функции давления введем аналогичные обозначения. Тогда (8) примет вид

$$\begin{aligned}
&A'_{Ikh}u_{Ikh} + A'_{I\Gamma kh}u_{\Gamma kh} + B'_{Ikh}p_{Ikh} + B'_{I\Gamma kh}p_{\Gamma kh} = f_1^{Ikh},\\
&A'_{\Gamma Ikh}u_{Ikh} + A'_{\Gamma kh}u_{\Gamma kh} + B'_{\Gamma Ikh}p_{Ikh} + B'_{\Gamma kh}p_{\Gamma kh} + D_{\Gamma kh}\lambda_h = f_1^{\Gamma kh},\\
&A''_{Ikh}v_{Ikh} + A''_{I\Gamma kh}v_{\Gamma kh} + B''_{Ikh}p_{Ikh} + B''_{I\Gamma kh}p_{\Gamma kh} = f_2^{Ikh},\\
&A''_{\Gamma Ikh}v_{Ikh} + A''_{\Gamma kh}v_{\Gamma kh} + B''_{\Gamma Ikh}p_{Ikh} + B''_{\Gamma kh}p_{\Gamma kh} + D_{\Gamma kh}\beta_h = f_2^{\Gamma kh},\\
&C'_{Ikh}u_{Ikh} + C'_{I\Gamma kh}u_{\Gamma kh} + C''_{Ikh}v_{Ikh} + C''_{I\Gamma kh}v_{\Gamma kh} = 0,\\
&C'_{\Gamma Ikh}u_{Ikh} + C'_{\Gamma kh}u_{\Gamma kh} + C''_{\Gamma Ikh}v_{Ikh} + C''_{\Gamma kh}v_{\Gamma kh} = 0,\\
&\sum_{k=1}^{2} D^T_{\Gamma kh}u_{\Gamma kh} = 0,\\
&\sum_{k=1}^{2} D^T_{\Gamma kh}v_{\Gamma kh} = 0.
\end{aligned} \tag{9}$$

Система (9) имеет следующую алгебраическую структуру:

$$\begin{bmatrix}
A'_{1h} & 0 & 0 & 0 & B'_{1h} & 0 & D_{1h} & 0\\
0 & A'_{2h} & 0 & 0 & 0 & B'_2 & D_{2h} & 0\\
0 & 0 & A''_{1h} & 0 & B''_{1h} & 0 & 0 & D_{1h}\\
0 & 0 & 0 & A''_{2h} & 0 & B''_{2h} & 0 & D_{2h}\\
C'_{1h} & 0 & C''_{1h} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & C'_{2h} & 0 & C''_{2h} & 0 & 0 & 0 & 0\\
D^T_{1h} & D^T_{2h} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & D^T_{1h} & D^T_{2h} & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} u_{1h}\\ u_{2h}\\ v_{1h}\\ v_{2h}\\ p_{1h}\\ p_{2h}\\ \lambda_h\\ \beta_h \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} f_1^{1h}\\ f_1^{2h}\\ f_2^{1h}\\ f_2^{2h}\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0 \end{bmatrix}, \tag{10}$$

где

$$A'_{kh} = \begin{bmatrix} A'_{Ikh} & A'_{I\Gamma kh}\\ A'_{\Gamma Ikh} & A'_{\Gamma kh} \end{bmatrix}, \quad
B'_{kh} = \begin{bmatrix} B'_{Ikh} & B'_{I\Gamma kh}\\ B'_{\Gamma Ikh} & B'_{\Gamma kh} \end{bmatrix}, \quad
A''_{kh} = \begin{bmatrix} A''_{Ikh} & A''_{I\Gamma kh}\\ A''_{\Gamma Ikh} & A''_{\Gamma kh} \end{bmatrix},$$

$$B''_{kh} = \begin{bmatrix} B''_{Ikh} & B''_{I\Gamma kh}\\ B''_{\Gamma Ikh} & B''_{\Gamma kh} \end{bmatrix}, \quad
C'_{kh} = \begin{bmatrix} C'_{Ikh} & C'_{I\Gamma kh}\\ C'_{\Gamma Ikh} & C'_{\Gamma kh} \end{bmatrix}, \quad
C''_{kh} = \begin{bmatrix} C''_{Ikh} & C''_{I\Gamma kh}\\ C''_{\Gamma Ikh} & C''_{\Gamma kh} \end{bmatrix}, \quad
D_{kh} = \begin{bmatrix} 0\\ D_{\Gamma kh} \end{bmatrix}, \tag{11}$$

$$f_1^{kh} = \begin{bmatrix} f_1^{Ikh}\\ f_1^{\Gamma kh} \end{bmatrix}, \quad
f_2^{kh} = \begin{bmatrix} f_2^{Ikh}\\ f_2^{\Gamma kh} \end{bmatrix}, \quad
u_{kh} = \begin{bmatrix} u_{Ikh}\\ u_{\Gamma kh} \end{bmatrix}, \quad
v_{kh} = \begin{bmatrix} v_{Ikh}\\ v_{\Gamma kh} \end{bmatrix}, \quad
p_{kh} = \begin{bmatrix} p_{Ikh}\\ p_{\Gamma kh} \end{bmatrix}.$$

Следует различать три типа узлов сетки $S^{(k)}$, $k = 1, 2$:

— середины вертикальных сторон элементарных квадратов (первый тип);

— середины горизонтальных сторон элементарных квадратов (второй тип);

— середины сторон элементарных треугольников, внутренних по отношению к элементарным квадратам (третий тип).

Заметим, что узлы, находящиеся на интерфейсе Γ_{12}, входят в множество узлов первого типа. Переменные компонент вектор-функции скорости в узлах $S^{(k)}$ таким же образом делятся на три типа.

Поскольку давление постоянно на каждом элементе e, его достаточно определить в одной внутренней точке треугольника. В качестве такой точки будем выбирать середину высоты, проведенной из центра элементарного квадрата на его сторону. В результате множество всех треугольников разбивается на два вида.

Из полученной системы (как показано в [17]) удается исключить узлы (и соответствующие переменные) третьего типа:

(1) для уравнений, имеющих дивергентную структуру, следует взять линейную комбинацию на конечных элементах двух смежных элементарных квадратов (8 треугольников);

(2) остальные уравнения преобразуем следующим образом: из уравнений, соответствующих узлам третьего типа, выражаем переменные того же типа и подставляем в уравнения, соответствующие соседним узлах первого и второго типов.

Замечание. Назовем узел соседним по отношению к некоторому узлу третьего типа, если они оба принадлежат одному и тому же элементу триангуляции $T_h^{(k)}$.

Построим итерационный метод решения преобразованной системы линейных алгебраических уравнений (10), (11), представленной в виде (см., например, [18])

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega \\ z \end{bmatrix}, \tag{12}$$

где

$$A = \begin{bmatrix} A'_{1h} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A'_{2h} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A''_{1h} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A''_{2h} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B'_{1h} & 0 & D_{1h} & 0 \\ 0 & B'_{2h} & D_{2h} & 0 \\ B''_{1h} & 0 & 0 & D_{1h} \\ 0 & B''_{2h} & 0 & D_{2h} \end{bmatrix}, \quad C^T = \begin{bmatrix} C'_{1h} & 0 & C''_{1h} & 0 \\ 0 & C'_{2h} & 0 & C''_{2h} \\ D^T_{1h} & D^T_{2h} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D^T_{1h} & D^T_{2h} \end{bmatrix},$$

$$\zeta = \begin{bmatrix} u_{1h} \\ u_{2h} \\ v_{1h} \\ v_{2h} \end{bmatrix}, \quad \eta = \begin{bmatrix} p_{1h} \\ p_{2h} \\ \lambda_h \\ \beta_h \end{bmatrix}, \quad \omega = \begin{bmatrix} f_1^{1h} \\ f_1^{2h} \\ f_2^{1h} \\ f_2^{2h} \end{bmatrix}, \quad z = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{13}$$

Итерационный процесс состоит из четырех этапов. На первом этапе находим решение системы $A\zeta_0 = \omega$ по формуле

$$\zeta_0^{n+1} = \zeta_0^n + \alpha_1(\omega - A\zeta_0^n). \tag{14}$$

На втором этапе вычисляется решение системы $S\eta = C^T\zeta_0 - z$:

$$\eta^{n+1} = \eta^n + \alpha_2(C^T\zeta_0 - z - S\eta^n). \tag{15}$$

Здесь $S = C^T A^{-1} B$ — дополнение по Шуру матрицы системы (12).

Далее, на третьем этапе, ищем поправку χ к ζ_0 с помощью найденного вектора η как решение системы $A\chi = B\eta$:

$$\chi^{n+1} = \chi^n + \alpha_3(B\eta - A\chi^n). \tag{17}$$

На последнем этапе вычисляем вектор ζ:

$$\zeta = \zeta_0 - \chi. \tag{18}$$

Здесь пара векторов (ζ, η) — решение системы (12), (13); α_1, α_2, α_3 — параметры процессов (14) – (16); ζ_0^{n+1}, η^{n+1}, χ^{n+1} и ζ_0^n, η^n, χ^n — значения векторов на $(n+1)$-й и n-й итерации (14) – (16) соответственно; ζ_0^0, η^0, χ^0 — задаваемые начальные приближения процессов (14) – (16).

На каждой итерации для всех из перечисленных этапов, за исключением четвертого, требуется вычисление вектора невязки r^n. Для экономичного нахождения r^n используем разложение этого вектора в

m-мерном подпространстве Крылова посредством GMRES-метода. Оценка скорости сходимости GMRES-метода установлена в [15].

На основе полученной [17] системы линейных алгебраических уравнений (12), (13) и итерационного метода (14)–(17) создана программа численного решения задачи Стокса с разрывным (кусочно-постоянным) множителем в дивергентно-градиентной части уравнений. Результаты численных экспериментов приведены ниже.

4. Анализ тестовых примеров. Были рассмотрены два тестовых примера с коэффициентом $a(x,\,y) = \begin{cases} 1, & (x,\,y) \in \Omega_1, \\ a_2, & (x,\,y) \in \Omega_2. \end{cases}$

В каждом из них параметр a_2 изменяется таким образом, чтобы разрыв коэффициентов на подобластях увеличивался. Соотношение шагов сеток по каждому направлению, как и ранее, $h_1 = 2h_2$. При этом число отрезков разбиения стороны Ω_k равно $N_{(k)} = \dfrac{\pi}{2h_k}$.

Разность между точным и приближенным решениями для компонент вектор-функции скорости будем определять в нормах $L_2(\Omega_k)$ и $\prod\limits_{e \in T_h^{(k)}} H^1(e)$, а для скалярной функции давления — в норме $L_2(\Omega_k)$.

Одна из рассмотренных характеристик — поведение погрешности в норме L_2 на полосах вблизи интерфейса Γ_{12}. Ширина полосы, примыкающей к интерфейсу, равна $\pi/8$ с каждой стороны. Полосу в k-й подобласти обозначим через ρ_k. Эта характеристика использована в примере 2. Обозначим через $\widehat{u}^{\,k}$, $\widehat{v}^{\,k}$ сеточное решение компонент вектор-функции скорости на полосе $\rho_k \subset \Omega_k$, $k = 1, 2$.

Основная цель анализа тестовых примеров — показать, что даже в случае увеличения разрыва коэффициентов в дивергентно-градиентной части уравнения на подобластях погрешность компонент вектор-функции скорости $\mathbf{w} = (u,\,v)$ несильно растет в нормах $L_2(\Omega_k)$ и $\prod\limits_{e \in T_h^{(k)}} H^1(e)$.

В примерах использован итерационный метод (14)–(17) с параметрами $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0.1$. Начальное приближение $(\zeta_0^0,\, \eta^0,\, \chi^0) = (0,\,0,\,0)$, размерность подпространства Крылова $m = 4$.

Пример 1. В качестве решения системы (1) выберем

$$u(x,\,y) = \sin x \cos y, \quad v(x,\,y) = -\cos x \sin y, \quad p(x,\,y) = \frac{x\,y}{\pi^4} - \frac{1}{2\,\pi^2};$$

тогда

$$f_1(x,\,y) = \begin{cases} 2\sin x\, \cos y + \dfrac{y}{\pi^4}, & (x,\,y) \in \Omega_1, \\ 2a_2 \sin x\, \cos y + \dfrac{y}{\pi^4}, & (x,\,y) \in \Omega_2, \end{cases} \qquad f_2(x,\,y) = \begin{cases} -2\cos x\, \sin y + \dfrac{x}{\pi^4}, & (x,\,y) \in \Omega_1, \\ -2a_2 \cos x\, \sin y + \dfrac{x}{\pi^4}, & (x,\,y) \in \Omega_2, \end{cases}$$

$$u = g_1(x,\,y) = \sin x \ \text{ на } \ \Gamma_1, \qquad v = g_2(x,\,y) = -\sin y \ \text{ на } \ \Gamma_2, \quad u = 0 \ \text{ на } \ \Gamma_2 \cup \Gamma_4,$$
$$u = g_3(x,\,y) = -\sin x \ \text{ на } \ \Gamma_3, \quad v = g_4(x,\,y) = -\sin y \ \text{ на } \ \Gamma_4, \quad v = 0 \ \text{ на } \ \Gamma_1 \cup \Gamma_3.$$

Для $(N_{(1)},\,N_{(2)}) = (8,\,16)$ и значений коэффициента $a_2 = 1;\ 1.2;\ 1.5;\ 1.8$ результаты расчетов приведены в табл. 1.

Таблица 1

Погрешность в норме $L_2(\Omega_k)$, $k = 1, 2$							Погрешность в норме $\prod\limits_{e \in T_h^{(k)}} H^1(e)$, $k = 1, 2$				
a_2	u_1	u_2	v_1	v_2	p_1	p_2	a_2	u_1	u_2	v_1	v_2
1.	0.0548	0.0412	0.0447	0.0801	0.206	0.175	1.	0.131	0.0782	0.0690	0.1290
1.2	0.0701	0.0545	0.0447	0.0691	0.194	0.170	1.2	0.166	0.1360	0.0686	0.1110
1.5	0.0914	0.0788	0.0433	0.0579	0.190	0.166	1.5	0.223	0.2170	0.0672	0.0921
1.8	0.1070	0.1000	0.0420	0.0501	0.186	0.165	1.8	0.265	0.2870	0.0665	0.0792

Для $(N_{(1)},\,N_{(2)}) = (16,\,32)$ и $a_2 = 1;\ 1.2;\ 1.5;\ 1.8$ результаты расчетов приведены в табл. 2.

Таблица 2

Погрешность в норме $L_2(\Omega_k)$, $k=1,2$							Погрешность в норме $\prod_{e\in T_h^{(k)}} H^1(e)$, $k=1,2$				
a_2	u_1	u_2	v_1	v_2	p_1	p_2	a_2	u_1	u_2	v_1	v_2
1.	0.0592	0.0419	0.0461	0.0821	0.175	0.114	1.	0.138	0.0891	0.0699	0.1290
1.2	0.0682	0.0579	0.0530	0.0647	0.166	0.115	1.2	0.157	0.1550	0.0810	0.1030
1.5	0.0847	0.0826	0.0599	0.0490	0.161	0.116	1.5	0.204	0.2160	0.0918	0.0801
1.8	0.0996	0.1020	0.0670	0.0391	0.159	0.117	1.8	0.249	0.2790	0.104	0.0658

Пример 2. В качестве решения системы (1) выберем функции

$$u(x,\,y) = \sin x\,\cos y, \quad v(x,\,y) = -\cos x\,\sin y, \quad p(x,\,y) = \sin x\,\sin y;$$

тогда

$$f_1(x,\,y) = \begin{cases} 2\sin x\,\cos y + \cos x\,\sin y, & (x,\,y)\in\Omega_1, \\ 2a_2\,\sin x\,\cos y + \cos x\,\sin y, & (x,\,y)\in\Omega_2, \end{cases} \qquad f_2(x,\,y) = \begin{cases} -2\cos x\,\sin y + \sin x\,\cos y, & (x,\,y)\in\Omega_1, \\ -2a_2\,\cos x\,\sin y + \sin x\,\cos y, & (x,\,y)\in\Omega_2, \end{cases}$$

$$u = g_1(x,\,y) = \sin x \ \text{ на } \ \Gamma_1, \qquad v = g_2(x,\,y) = -\sin y \ \text{ на } \ \Gamma_2, \qquad u = 0 \ \text{ на } \ \Gamma_2\cup\Gamma_4,$$
$$u = g_3(x,\,y) = -\sin x \ \text{ на } \ \Gamma_3, \qquad v = g_4(x,\,y) = -\sin y \ \text{ на } \ \Gamma_4, \qquad v = 0 \ \text{ на } \ \Gamma_1\cup\Gamma_3.$$

При $(N_{(1)},\,N_{(2)}) = (8,\,16)$ и $a_2 =$ 1; 1.2; 1.5; 1.8; 2.5 результаты расчетов приведены в табл. 3 и 4.

Таблица 3

Погрешность в норме $L_2(\Omega_k)$, $k=1,2$						
a_2	u_1	u_2	v_1	v_2	p_1	p_2
1	0.0808	0.0689	0.0276	0.0287	0.206	0.169
1.2	0.0887	0.0753	0.0276	0.0236	0.204	0.170
1.5	0.106	0.0895	0.0278	0.0190	0.199	0.172
1.8	0.1240	0.1050	0.0282	0.0159	0.198	0.173
2.5	0.1510	0.1260	0.0295	0.0112	0.198	0.173

Таблица 4

Погрешность в норме $\prod_{e\in T_h^{(k)}} H^1(e)$, $k=1,2$					Погрешность в норме $L_2(\rho_k)$, $k=1,2$				
a_2	u_1	u_2	v_1	v_2	a_2	$\widehat{u}^{\,1}$	$\widehat{u}^{\,2}$	$\widehat{v}^{\,1}$	$\widehat{v}^{\,2}$
1	0.165	0.139	0.0713	0.0740	1	0.0186	0.0177	0.00411	0.00612
1.2	0.188	0.185	0.0728	0.0621	1.2	0.0234	0.0284	0.00429	0.00528
1.5	0.249	0.247	0.0756	0.0511	1.5	0.0356	0.0377	0.00468	0.00494
1.8	0.307	0.304	0.0767	0.0436	1.8	0.0489	0.0504	0.00524	0.00482
2.5	0.386	0.378	0.0786	0.0326	2.5	0.0671	0.0668	0.00604	0.00349

При $(N_{(1)},\,N_{(2)}) = (16,\,32)$ и $a_2 =$ 1; 1.2; 1.5; 1.8; 2.5 результаты приведены в табл. 5 и 6.

Таблица 5

Погрешность в норме $L_2(\Omega_k)$, $k=1,2$						
a_2	u_1	u_2	v_1	v_2	p_1	p_2
1	0.0828	0.0717	0.0287	0.0282	0.169	0.129
1.2	0.0873	0.0795	0.0293	0.0235	0.168	0.131
1.5	0.0950	0.0971	0.0313	0.0189	0.165	0.134
1.8	0.1050	0.1100	0.0332	0.0158	0.164	0.136
2.5	0.1580	0.1180	0.0274	0.0127	0.162	0.136

Таблица 6

Погрешность в норме $\prod_{e\in T_h^{(k)}} H^1(e)$, $k=1,2$					Погрешность в норме $L_2(\rho_k)$, $k=1,2$				
a_2	u_1	u_2	v_1	v_2	a_2	$\widehat{u}^1$	$\widehat{u}^2$	$\widehat{v}^1$	$\widehat{v}^2$
1	0.167	0.148	0.0721	0.0705	1	0.0161	0.0213	0.00417	0.00629
1.2	0.186	0.201	0.0738	0.0588	1.2	0.0211	0.0282	0.00408	0.00501
1.5	0.218	0.246	0.0796	0.0478	1.5	0.0239	0.0385	0.00492	0.00461
1.8	0.258	0.322	0.0849	0.0405	1.8	0.0304	0.0456	0.00506	0.00422
2.5	0.389	0.359	0.0712	0.0296	2.5	0.0652	0.0707	0.00474	0.00401

Расчеты показали, что погрешность не слишком сильно растет в нормах пространств $L_2(\Omega_k)$ и $\prod_{e\in T_h^{(k)}} H^1(e)$, $k=1,2$, при увеличении разрыва коэффициентов эллиптического оператора на подобластях. При этом большая часть погрешности (в норме L_2) сосредоточена вдоль полос ρ_k в окрестности интерфейса Γ_{12} между подобластями, т.е. погрешность не распространяется на внутреннюю часть подобластей.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Администрации Хабаровского края (код проекта 04–01–97004).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Arrow K., Hurwicz L., Uzawa H.* Studies in linear and nonlinear programming. Stanford: Stanford Univ. Press, 1958.
2. *Ладыженская О.А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970.
3. *Yanenko N.* The method of fractional steps (the solution of problems of mathematical physics in several variables). Berlin: Springer-Verlag, 1971.
4. *Марчук Г.И., Яненко Н.Н.* Решение многомерного кинетического уравнения методом расщепления // Докл. АН СССР. 1964. **157**, № 6. 1291–1292.
5. *Марчук Г.И.* Методы расщепления. М.: Наука, 1988.
6. *Белоцерковский О.М., Гущин В.А., Щенников В.В.* Метод расщепления в применении к решению задач динамики вязкой несжимаемой жидкости // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1975. **15**, № 1. 197–207.
7. *Дородницын А.А., Меллер Н.А.* О некоторых подходах к решению стационарных уравнений Навье–Стокса // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1968. **8**, № 2. 393–402.
8. *Kobelkov G.M.* On numerical methods of solving the Navier–Stokes equations in "velocity–pressure" variables // Numerical Methods and Applications. Amsterdam: CRC Press, Inc., 1994. 81–115.
9. *Brezzi F., Fortin M.* Mixed and hybrid finite element methods. New York: Springer–Verlag, 1991.
10. *Arnold D.N., Brezzi F.* Mixed and nonconforming finite element methods: implementation, postprocessing and error estimates // RAIRO Math. Model. Numer. Anal. 1985. **19**. 7–35.
11. *Bernardi C., Maday Y., Patera A.* A new nonconforming approach to domain decomposition: the mortar element method // Nonlinear Partial Differential Equations and their Applications. Paris: Pitman, 1989. 13–51.
12. *Kuznetsov Yu.A.* Efficient iterative solvers for elliptic finite element problems on nonmatching grids // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modeling. 1995. **10**, N 3. 187–211.

13. *Kuznetsov Yu.A., Wheeler M.F.* Optimal order substructuring preconditioners for mixed finite element methods on nonmatching grids // East-West J. Numer. Math. 1995. **3**, N 2. 127–143.
14. *Василевский Ю.В.* Методы решения краевых задач с использованием нестыкующихся сеток // Труды Математического центра им. Н. И. Лобачевского. Казань: Унипресс, 1999. 94–121.
15. *Saad Y.* Iterative methods for sparse linear systems. New Jersey: PWS, 1996.
16. *Ciarlet P.* The finite element method for elliptic problems. Amsterdam–New York–Oxford: North–Holland Publishing Company, 1978.
17. *Рукавишников А.В.* Численный метод решения задачи Стокса с разрывными коэффициентами в прямоугольнике. Препринт ДВО РАН № 10. Хабаровское отделение Института прикладной математики. Владивосток: Дальнаука, 2002.
18. *Little L., Saad Y.* Block LU-preconditioners for symmetric and nonsymmetric saddle point problems. Minnesota: Minnesota Supercomputing Inst., 1999.

Поступила в редакцию
15.10.2004