УДК 517.853

МЕТОД СПУСКА ПО ИНТЕРВАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ ДЛЯ НЕГЛАДКИХ МОНОТОННЫХ ЗАДАЧ РАВНОВЕСИЯ

О. В. Пинягина[1]

В работе рассматривается один класс монотонных задач равновесия, содержащих негладкие функции. Комбинированное применение аппарата интервальных функций и регуляризации позволяет преобразовать исходную задачу к задаче о необходимых условиях оптимальности в негладкой оптимизации и построить двухуровневый метод спуска для решения такой задачи.
Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда НИОКР РТ и Академии наук Финляндии (проект 77796).

1. Введение. Пусть U — непустое замкнутое выпуклое множество в пространстве R^n, а ψ — равновесная функция, т.е. $\psi : R^n \times R^n \to R$ и $\psi(u,u) = 0$ для любого $u \in U$. Определим задачу равновесия следующим образом:

Задача 1. *Найти точку* $u^* \in U$, *такую, что* $\psi(u^*, v) \geqslant 0 \ \ \forall v \in U$.

Задачи равновесия в настоящее время интенсивно исследуются. Области их применения весьма разнообразны и многочисленны — от математической физики и исследования операций до экономики, транспорта и связи. Кроме того, задачи равновесия представляют собой обобщение многих задач нелинейного анализа, таких, как задачи оптимизации, задачи о дополнительности и вариационные неравенства.

Хорошо известно, что один из традиционных подходов к решению вариационного неравенства состоит в преобразовании его в оптимизационную задачу с помощью так называемых интервальных, или оценочных функций (gap functions). В работах [1, 2] аппарат интервальных функций применялся для негладких задач равновесия; были построены методы, сходящиеся к решению исходной задачи. Однако для сходимости требовались дополнительные условия сильной монотонности.

С другой стороны, для решения монотонных вариационных неравенств широко используются регуляризирующие приемы (см., например, [3]), основанные на аппроксимациях Браудера–Тихонова [4]. В данной работе, комбинируя эти две технологии — интервальные функции и регуляризацию, мы построим метод для решения исходной задачи равновесия в общем монотонном случае.

2. Регуляризация для монотонных равновесных задач. Прежде всего напомним некоторые известные свойства функций равновесия, которые потребуются для дальнейшего изложения (см., например, [5 - 7]).

Определение. Равновесная функция ψ называется

(i) *монотонной*, если для любых u, $v \in R^n$, выполняется условие $\psi(u,v) + \psi(v,u) \leqslant 0$;

(ii) *строго монотонной*, если для любых u, $v \in R^n$, $u \neq v$, выполняется условие $\psi(u,v) + \psi(v,u) < 0$;

(iii) *сильно монотонной с константой* τ, если для любых u, $v \in R^n$ выполняется условие

$$\psi(u,v) + \psi(v,u) \leqslant -\tau \|u - v\|^2.$$

Определим дуальную задачу к задаче 1.

Задача 2. *Найти точку* $v^* \in U$, *такую, что* $\psi(u, v^*) \leqslant 0 \ \ \forall u \in U$.

Предложение 1. (i) *Если функция* ψ *монотонна и функция* $\psi(\cdot, v)$ *полунепрерывна сверху для любого* $v \in U$, *тогда множество решений задачи* 1 *совпадает с множеством решений дуальной задачи* 2, *причем эти множества выпуклы и замкнуты.*

(ii) *Если* ψ *строго монотонна, то задача* 1 *не может иметь более одного решения.*

(iii) *Если* ψ *сильно монотонна и* $\psi(\cdot, v)$ *полунепрерывна сверху для любого* $v \in U$, *то задача* 1 *имеет единственное решение.*

В дальнейшем в этом разделе будем предполагать, что ψ монотонна, $\psi(\cdot, v)$ полунепрерывна сверху для любых $v \in U$ и $\psi(u, \cdot)$ выпукла для любых $u \in R^n$.

[1] Казанский государственный университет (КГУ), факультет вычислительной математики и кибернетики, ул. Кремлевская, 18, 420008, г. Казань; e-mail: Olga.Piniaguina@ksu.ru

В качестве вспомогательной функции выберем любую равновесную функцию $\varphi : R^n \times R^n \to R$, удовлетворяющую следующим условиям:

1) $\varphi(u, \cdot)$ выпукла для любых $u \in R^n$ и $\varphi(\cdot, v)$ полунепрерывна сверху для любых $v \in R^n$;

2) φ сильно монотонна с константой $\tau > 0$;

3) для любых $u, v \in R^n$ выполняется условие $\big|\varphi(u, v)\big| \leqslant \|u\|\,\|v - u\|$. В частности, в качестве простейшей вспомогательной функции можно выбрать $\varphi(u, v) = \langle u, v - u\rangle$.

Рассмотрим возмущенную равновесную задачу:

Задача 3. *Найти точку $u_\varepsilon \in U$, такую, что $\psi(u_\varepsilon, v)+\varepsilon\varphi(u_\varepsilon, v) \geqslant 0 \ \ \forall v \in U$, где ε — фиксированный положительный параметр.*

Положим $\Psi(u, v) = \psi(u, v) + \varepsilon\varphi(u, v)$; тогда Ψ представляет собой равновесную функцию, сильно монотонную с константой $\varepsilon\tau$. Кроме того, $\Psi(u, \cdot)$ выпукла для любого $u \in R^n$. Применяя предложение 1 при $\psi = \Psi$, мы делаем вывод, что задача 3 имеет единственное решение.

Обозначим через U^* множество решений задачи 1. Покажем, каким образом связаны между собой задачи 1 и 3.

Теорема 1. *Если $U^* \neq \emptyset$, то $\{u_\varepsilon\} \to u_n^*$ при $\varepsilon \to 0$, где u_ε — решение задачи 3,*

$$u_n^* \in U^* : \varphi(u_n^*, w) \geqslant 0 \ \ \forall w \in U^*.$$

Отметим, что элемент u_n^* определяется единственным образом; в случае $\varphi(u, v) = \langle u, v - u\rangle$ он имеет наименьшую норму среди всех элементов из U^*.

Доказательство. Как уже было отмечено, в силу предложения 1 задача 3 имеет единственное решение. Для $u^* \in U^*$ и u_ε выполняются соотношения $\psi(u^*, u_\varepsilon) \geqslant 0$ и $\psi(u_\varepsilon, u^*) + \varepsilon\varphi(u_\varepsilon, u^*) \geqslant 0$. Складывая эти неравенства, получим

$$\varepsilon\varphi(u_\varepsilon, u^*) \geqslant -\big[\psi(u^*, u_\varepsilon) + \psi(u_\varepsilon, u^*)\big] \geqslant 0.$$

Поскольку функция φ сильно монотонна, то

$$-\varepsilon\varphi(u^*, u_\varepsilon) = -\varepsilon\big[\varphi(u_\varepsilon, u^*) + \varphi(u^*, u_\varepsilon)\big] + \varepsilon\varphi(u_\varepsilon, u^*) \geqslant \varepsilon\tau\|u^\varepsilon - u^*\|^2; \tag{1}$$

следовательно, учитывая свойства функции φ, имеем $\|u^*\| \geqslant \tau\|u_\varepsilon - u^*\|$. Таким образом, последовательность $\{u_\varepsilon\}$ ограничена. Выделим из нее сходящуюся подпоследовательность $\{u_{\varepsilon_l}\}$. В силу предложения 1(i) для любого l

$$\Psi(u, u_{\varepsilon_l}) = \psi(u, u_{\varepsilon_l}) + \varepsilon_l\varphi(u, u_{\varepsilon_l}) \leqslant 0 \ \ \forall u \in U,$$

поэтому для любой предельной точки u' последовательности $\{u_{\varepsilon_l}\}$ имеем

$$0 \geqslant \lim_{\varepsilon_l \to 0}\big[\psi(u, u_{\varepsilon_l}) + \varepsilon_l\varphi(u, u_{\varepsilon_l})\big] = \lim_{\varepsilon_l \to 0}\psi(u, u_{\varepsilon_l}) = \psi(u, u') \quad \forall u \in U,$$

т.е. u' является решением задачи 2, а в силу предложения 1(i) является также решением задачи 1. Таким образом, $u' \in U^*$. Используя (1) при $u^* = u_n^*$, т.е.

$$-\varphi(u_n^*, u_{\varepsilon_l}) \geqslant \tau\|u_{\varepsilon_l} - u_n^*\|^2,$$

имеем при $l \to \infty$

$$0 \geqslant -\varphi(u_n^*, u') \geqslant \tau\|u' - u_n^*\|^2 \geqslant 0,$$

т.е $\lim\limits_{\varepsilon_l \to 0} u_{\varepsilon_l} = u_n^*$, а в силу произвольности выбора u', $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} u_\varepsilon = u_n^*$. Теорема доказана.

Данный результат является обобщением известного свойства сходимости аппроксимаций Браудера–Тихонова для вариационных неравенств (см., например, [4], Лемма 3.7), а также вариантом Теоремы 2.1 из [8] для конечномерного случая.

3. Интервальные функции. В дальнейшем будем рассматривать негладкую равновесную функцию вида

$$\psi(u, v) = h(u, v) + f(v) - f(u),$$

где $h : R^n \times R^n \to R$ — дифференцируемая монотонная равновесная функция, $h(u, \cdot)$ выпукла для всех $u \in R^n$; $f : R^n \to R$ — выпуклая недифференцируемая функция. Тогда задача 1 примет следующий вид:

Задача 4. *Найти точку $u^* \in U$, такую, что $h(u^*, v) + f(v) - f(u^*) \geqslant 0 \ \ \forall v \in U$.*

В качестве вспомогательной функции φ выберем ее простейший вариант $\varphi(u, v) = \langle u, v - u\rangle$. Возмущенная задача 3 будет выглядеть следующим образом:

Задача 5. *Пусть $\varepsilon > 0$ — фиксированный параметр. Найти точку $u_\varepsilon \in U$, такую, что*

$$h(u_\varepsilon, v) + f(v) - f(u_\varepsilon) + \varepsilon\langle u_\varepsilon, v - u_\varepsilon\rangle \geqslant 0 \quad \forall v \in U.$$

Согласно предложению 1, задача 5 имеет единственное решение, а по теореме 1 последовательность решений $\{u_\varepsilon\}$ возмущенных задач 5 при $\varepsilon \to 0$ сходится к решению задачи 4 с наименьшей нормой.

Пусть U^* — множество решений задачи 4 и $h_\varepsilon(u,v) = h(u,v) + \varepsilon\langle u, v-u\rangle$.

Ясно, что функция h_ε является сильно монотонной с константой ε. Поэтому для решения задачи 5 мы можем применять аппарат интервальных функций, рассмотренный в [1, 2].

Пусть

$$\Phi_\alpha^{(\varepsilon)}(u,v) = -h_\varepsilon(u,v) - f(v) + f(u) - 0.5\alpha\|v-u\|^2, \quad \mu_\alpha^{(\varepsilon)}(u) = \sup_{v\in U}\Phi_\alpha^{(\varepsilon)}(u,v) = \Phi_\alpha^{(\varepsilon)}\big(u, v_\alpha^{(\varepsilon)}(u)\big), \qquad (2)$$

где $\alpha > 0$ — фиксированный параметр. Легко видеть, что внутренняя задача (2) имеет единственное решение $v_\alpha^{(\varepsilon)}(u)$, поскольку функция $\Phi_\alpha^{(\varepsilon)}(u,\cdot)$ сильно вогнута и непрерывна.

Условия оптимальности для задачи 5 и для внутренней задачи (2) можно сформулировать в форме смешанных вариационных неравенств. Здесь и далее $\nabla_u h_\varepsilon(\cdot,\cdot)$ $\big(\nabla_v h_\varepsilon(\cdot,\cdot)\big)$ обозначает частный градиент функции h_ε по первому (второму) векторному аргументу.

Предложение 2 ([1], Предложения 2.1 и 2.3). (i) *Точка u_ε является решением задачи 4 тогда и только тогда, когда $u_\varepsilon \in U$ и*

$$\big\langle \nabla_v h_\varepsilon(u_\varepsilon, u_\varepsilon), v - u_\varepsilon\big\rangle + f(v) - f(u_\varepsilon) \geqslant 0 \quad \forall v \in U. \qquad (3)$$

(ii) *Для всех $u' \in U$ выполняется*

$$\Big\langle \nabla_v h_\varepsilon\big(u', v_\alpha^{(\varepsilon)}(u')\big) + \alpha\big(v_\alpha^{(\varepsilon)}(u') - u'\big), v - v_\alpha^{(\varepsilon)}(u')\Big\rangle + f(v) - f\big(v_\alpha^{(\varepsilon)}(u')\big) \geqslant 0 \quad \forall v \in U. \qquad (4)$$

Определенная в (2) функция $\mu_\alpha^{(\varepsilon)}$ будет использоваться в качестве интервальной в задаче равновесия 5. Покажем, что $\mu_\alpha^{(\varepsilon)}(u)$ обладает свойствами интервальной функции, т.е. она неотрицательна на допустимом множестве U и равна нулю в точке u_ε.

Предложение 3 ([1], Предложение 2.4). *Функция $\mu_\alpha^{(\varepsilon)}(u)$ обладает следующими свойствами:*

(i) $\mu_\alpha^{(\varepsilon)}(u) \geqslant 0 \quad \forall u \in U$;

(ii) $\mu_\alpha^{(\varepsilon)}(u) = 0$ *и* $u \in U \iff u = u_\varepsilon$.

Приведем еще одну формулировку условия оптимальности для задачи 5 в форме неподвижной точки отображения $u \mapsto v_\alpha^{(\varepsilon)}(u)$.

Предложение 4 ([1], Предложение 2.5). *Имеем $u = v_\alpha^{(\varepsilon)}(u) \iff u = u_\varepsilon$.*

Свойства функции $\mu_\alpha^{(\varepsilon)}$, доказанные в предложении 3, показывают, что $\mu_\alpha^{(\varepsilon)}$ может служить интервальной функцией для задачи 5. Отсюда, в частности, следует, что исходная задача 5 эквивалентна задаче условной минимизации

$$\min_{u\in U} \longrightarrow \mu_\alpha^{(\varepsilon)}(u). \qquad (5)$$

Однако выпуклость функции $\mu_\alpha^{(\varepsilon)}$ не гарантируется и данная задача может иметь локальные минимумы, отличные от глобальных. В следующем параграфе мы заменим эту задачу на ее условия стационарности.

4. Непрерывность и стационарность. В дальнейшем будут использованы следующие предположения:

(A1) *для отображения $\nabla_v h(\cdot, v)$ выполняется условие Липшица с константой L_h для любого $v \in R^n$*;

(A2) *для любых $u, v \in R^n$ выполняется неравенство $\big\langle \nabla_u h(u,v) + \nabla_v h(u,v), v - u\big\rangle \geqslant 0$.*

Отметим, что в случае вариационного неравенства, т.е. когда функция h представлена в виде $h(u,v) = \langle G(u), v-u\rangle$, свойство (A2) выглядит следующим образом:

$$\big\langle \nabla G(u)^T(v-u), v-u\big\rangle \geqslant 0,$$

что соответствует требованию монотонности отображения G.

Из условия (A2) следует, что

$$\big\langle \nabla_u h_\varepsilon(u,v) + \nabla_v h_\varepsilon(u,v), v-u \big\rangle \geqslant \varepsilon\,\|u-v\|^2.$$

Лемма 1. *Если условие* (A1) *выполняется, то отображение* $u \mapsto v_\alpha^{(\varepsilon)}(u)$ *удовлетворяет условию Липшица.*

Доказательство. Выберем произвольные точки $u', u'' \in U$ и обозначим $v' = v_\alpha^{(\varepsilon)}(u')$, $v'' = v_\alpha^{(\varepsilon)}(u'')$. Тогда в силу предложения 2 имеем

$$\big\langle \nabla_v h_\varepsilon(u',v') + \alpha(v'-u'), v''-v' \big\rangle + f(v'') - f(v') \geqslant 0, \quad \big\langle \nabla_v h_\varepsilon(u'',v'') + \alpha(v''-u''), v'-v'' \big\rangle + f(v') - f(v'') \geqslant 0.$$

Сложив эти неравенства, получим

$$\big\langle \nabla_v h_\varepsilon(u',v') - \nabla_v h_\varepsilon(u'',v''), v''-v' \big\rangle + \alpha\big\langle (v'-v'') + (u''-u'), v''-v' \big\rangle \geqslant 0.$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned}\big\langle \nabla_v h_\varepsilon(u',v') - \nabla_v h_\varepsilon(u'',v'), v''-v' \big\rangle + \alpha\big\langle u''-u', v''-v' \big\rangle \geqslant \\ \geqslant \big\langle \nabla_v h_\varepsilon(u'',v') - \nabla_v h_\varepsilon(u'',v''), v'-v'' \big\rangle + \alpha\|v''-v'\|^2 \geqslant \alpha\,\|v''-v'\|^2,\end{aligned}$$

поскольку $\nabla_v h_\varepsilon(u'',\cdot)$ монотонно. Далее, используя (A1), получим

$$(L_h + \alpha)\|u'-u''\|\,\|v'-v''\| \geqslant \alpha\,\|v'-v''\|^2;$$

отсюда

$$\|v'-v''\| \leqslant (1 + L_h/\alpha)\|u'-u''\|.$$

Лемма доказана.

Из леммы 1 и формулы (2), в частности, следует, что функция $\mu_\alpha^{(\varepsilon)}$ непрерывна на U.

Лемма 2. *Пусть выполняется условие* (A1). *Тогда функция* $\mu_\alpha^{(\varepsilon)}$ *имеет производную в любой точке* $u \in U$ *по любому направлению* $d \in R^n$, *причем*

$$\mu_\alpha^{(\varepsilon)\prime}(u;d) = f'(u;d) - \Big\langle \nabla_u h_\varepsilon\big(u, v_\alpha^{(\varepsilon)}(u)\big) + \alpha\big(u - v_\alpha^{(\varepsilon)}(u)\big), d \Big\rangle.$$

Доказательство. Выберем произвольно вектор $d \in R^n$. Учитывая свойство непрерывности отображения $u \mapsto v_\alpha^{(\varepsilon)}(u)$ и определение функции $\mu_\alpha^{(\varepsilon)}$, получаем, что в данных условиях можно применить теорему 3.4 из [9] о дифференцировании функции максимума, откуда следует, что функция $\mu_\alpha^{(\varepsilon)}$ дифференцируема по направлениям в любой точке $u \in U$ и

$$\mu_\alpha^{(\varepsilon)\prime}(u;d) = f'(u;d) - \Big\langle \nabla_u h_\varepsilon\big(u, v_\alpha^{(\varepsilon)}(u)\big) + \alpha\big(u - v_\alpha^{(\varepsilon)}(u)\big), d \Big\rangle.$$

Лемма доказана.

Сформулируем необходимое и достаточное условие оптимальности для задачи (5).

Теорема 2. Условие стационарности. *Пусть выполняются условия* (A1) *и* (A2). *Тогда*

$$\mu_\alpha^{(\varepsilon)\prime}(u'; u-u') \geqslant 0 \quad \forall u \in U \Longleftrightarrow u' = u_\varepsilon.$$

Доказательство. То, что решение задачи 5 должно удовлетворять условию неотрицательности производной по любому направлению функции $\mu_\alpha^{(\varepsilon)}$ в этой точке, является очевидным. Предположим теперь, что $\mu_\alpha^{(\varepsilon)\prime}(u'; u-u') \geqslant 0 \;\; \forall u \in U$. Из определения производной по направлению следует, что

$$f'(u'; u-u') - \Big\langle \nabla_u h_\varepsilon\big(u', v_\alpha^{(\varepsilon)}(u')\big) + \alpha\big(u' - v_\alpha^{(\varepsilon)}(u')\big), u-u' \Big\rangle \geqslant 0 \quad \forall u \in U.$$

Полагая здесь $u = v_\alpha^{(\varepsilon)}(u')$, получим

$$f'\big(u'; v_\alpha^{(\varepsilon)}(u') - u'\big) - \Big\langle \nabla_u h_\varepsilon\big(u', v_\alpha^{(\varepsilon)}(u')\big) + \alpha\big(u' - v_\alpha^{(\varepsilon)}(u')\big), v_\alpha^{(\varepsilon)}(u') - u' \Big\rangle \geqslant 0.$$

С другой стороны, в силу предложения 2, полагая в (3) $v = u'$, имеем

$$\Big\langle \nabla_v h_\varepsilon\big(u', v_\alpha^{(\varepsilon)}(u')\big) + \alpha\big(v_\alpha^{(\varepsilon)}(u') - u'\big), u' - v_\alpha^{(\varepsilon)}(u')\Big\rangle + f(u') - f\big(v_\alpha^{(\varepsilon)}(u')\big) \geqslant 0.$$

Складывая два последних неравенства, получим

$$f'\big(u'; v_\alpha^{(\varepsilon)}(u') - u'\big) + f(u') - f\big(v_\alpha^{(\varepsilon)}(u')\big) - \Big\langle \nabla_u h_\varepsilon\big(u', v_\alpha^{(\varepsilon)}(u')\big) + \nabla_v h_\varepsilon\big(u', v_\alpha^{(\varepsilon)}(u')\big), v_\alpha^{(\varepsilon)}(u') - u'\Big\rangle \geqslant 0. \quad (6)$$

Сумма первых трех слагаемых неположительна вследствие выпуклости функции f, поэтому в силу предположения (A2) из (6) следует $-\varepsilon\|u' - v_\alpha^{(\varepsilon)}(u')\| \geqslant 0$, что выполняется, если только $u' = v_\alpha^{(\varepsilon)}(u')$. Тогда согласно предложению 4 следует $u' = u_\varepsilon$. Теорема доказана.

Итак, любая стационарная точка задачи (5) дает решение возмущенной задачи равновесия 5, поэтому для отыскания решения можно использовать соответствующие итеративные методы минимизации с учетом негладкости функции $\mu_\alpha^{(\varepsilon)}$. Отметим, что из теоремы 2 и предложения 3 следует, что условие (A2) фактически гарантирует отсутствие локальных минимумов функции $\mu_\alpha^{(\varepsilon)}$, отличных от глобального.

В следующем разделе мы покажем, что если точка u не является решением задачи 5, то вектор $d = v_\alpha^{(\varepsilon)}(u) - u$ представляет собой направление убывания для функции $\mu_\alpha^{(\varepsilon)}$ в точке u. Основываясь на этом утверждении, построим метод спуска для решения задачи 5.

5. Двухуровневый метод спуска.

Лемма 3. *Пусть выполняются условия* (A1) *и* (A2). *Тогда для любого* $u \in U\backslash\{u_\varepsilon\}$ *выполняется неравенство* $\mu_\alpha^{(\varepsilon)\prime}\big(u; v_\alpha^{(\varepsilon)}(u) - u\big) < 0$.

Доказательство. Выберем любую точку $u \in U$. Согласно лемме 2

$$\mu_\alpha^{(\varepsilon)\prime}\big(u; v_\alpha^{(\varepsilon)}(u) - u\big) = f'\big(u; v_\alpha^{(\varepsilon)}(u) - u\big) - \Big\langle \nabla_u h_\varepsilon\big(u, v_\alpha^{(\varepsilon)}(u)\big) + \alpha\big(u - v_\alpha^{(\varepsilon)}(u)\big), v_\alpha^{(\varepsilon)}(u) - u\Big\rangle.$$

С другой стороны, в силу предложения 2(ii), полагая в (3) $u = u'$, $v = u$, имеем

$$0 \leqslant \Big\langle \nabla_v h_\varepsilon\big(u, v_\alpha^{(\varepsilon)}(u)\big) + \alpha\big(v_\alpha^{(\varepsilon)}(u) - u\big), u - v_\alpha^{(\varepsilon)}(u)\Big\rangle + f(u) - f\big(v_\alpha^{(\varepsilon)}(u)\big).$$

Складывая эти соотношения, получим

$$\mu_\alpha^{(\varepsilon)\prime}\big(u; v_\alpha^{(\varepsilon)}(u) - u\big) \leqslant f'\big(u; v_\alpha^{(\varepsilon)}(u) - u\big) + f(u) - f\big(v_\alpha^{(\varepsilon)}(u)\big) - \Big\langle \nabla_u h_\varepsilon\big(u, v_\alpha^{(\varepsilon)}(u)\big) + \nabla_v h_\varepsilon\big(u, v_\alpha^{(\varepsilon)}(u)\big), v_\alpha^{(\varepsilon)}(u) - u\Big\rangle.$$

Для любой точки u из множества $U\backslash\{u_\varepsilon\}$ сумма первых трех слагаемых в правой части неравенства неположительна вследствие выпуклости функции f, четвертое слагаемое отрицательно в силу предположения (A2), поскольку $u \neq v_\alpha^{(\varepsilon)}(u)$. Таким образом, $\mu_\alpha^{(\varepsilon)\prime}(u; v_\alpha^{(\varepsilon)}(u) - u) < 0$. Лемма доказана.

Итак, решение задачи (2) позволяет получить направление убывания функции $\mu_\alpha^{(\varepsilon)}$ в любой неоптимальной точке $u \in U$.

Построим теперь метод спуска для решения задачи 5.

Метод спуска для вспомогательной задачи.

Шаг 0. Выберем произвольно точку $u^0 \in U$ и параметр $\alpha > 0$. Положим $k = 0$.

Шаг 1. Вычислим $\mu_\alpha^{(\varepsilon)}(u^k)$ и $v_\alpha^{(\varepsilon)}(u^k)$ по формуле

$$\mu_\alpha^{(\varepsilon)}(u) = \sup_{v\in U} \Phi_\alpha^{(\varepsilon)}(u, v) = \Phi_\alpha^{(\varepsilon)}\big(u, v_\alpha^{(\varepsilon)}(u)\big).$$

Если $\mu_\alpha^{(\varepsilon)}(u^k) = 0$, то u^k является решением задачи 5 и процесс решения останавливается.

Шаг 2. Вычислим $w(u^k) = u^k + l_k d^k$, где $d^k = v(u^k) - u^k$, а l_k представляет собой решение задачи одномерной минимизации

$$\min_{0\leqslant l\leqslant 1} \longrightarrow \mu_\alpha^{(\varepsilon)}(u^k + ld^k);$$

положим $u^{k+1} = w(u^k)$, заменим k на $k+1$ и перейдем к шагу 1.

Введем дополнительное предположение.

(A3) *Для любого* $v \in R^n$ *отображение* $\nabla_v h(\cdot, v)$ *является монотонным на множестве* U.

Из условия (A3) следует, что отображение $\nabla_v h_\varepsilon(\cdot, v)$ является сильно монотонным для любого $v \in R^n$ на множестве U с константой ε.

Теорема 3. *Пусть выполняется предположение* (A3) *и* $\varepsilon \geqslant \alpha$. *Тогда найдется число* $\sigma > 0$, *такое, что* $\sigma\|u - u_\varepsilon\|^2 \leqslant \mu_\alpha^{(\varepsilon)}(u)\ \ \forall u \in U$, *где* u_ε *— решение задачи* 5.

Доказательство. Выберем произвольно число $\nu \in (0, 1]$ и определим $v_\nu = \nu u_\varepsilon + (1-\nu)u$. Учитывая выпуклость функций $h(u,\cdot)$ и f, имеем

$$\begin{aligned}\mu_\alpha^{(\varepsilon)}(u) &\geqslant -h_\varepsilon(u, v_\nu) + f(u) - f(v_\nu) - 0.5\alpha\,\|u - v_\nu\|^2 \geqslant \\ &\geqslant -\nu h_\varepsilon(u, u_\varepsilon) - (1-\nu)h_\varepsilon(u,u) + f(u) - \nu f(u_\varepsilon) - (1-\nu)f(u) - 0.5\alpha\nu^2\,\|u - u_\varepsilon\|^2 = \\ &= -\nu h_\varepsilon(u, u_\varepsilon) + \nu\big[f(u) - f(u_\varepsilon)\big] - 0.5\alpha\nu^2\,\|u - u_\varepsilon\|^2.\end{aligned}$$

Далее, из выпуклости функции $h_\varepsilon(u,\cdot)$, свойства $h_\varepsilon(u,u) = 0$ и соотношения (3) следует

$$-h_\varepsilon(u, u_\varepsilon) + f(u) - f(u_\varepsilon) \geqslant \big\langle \nabla_v h_\varepsilon(u, u_\varepsilon) - \nabla_v h_\varepsilon(u_\varepsilon, u_\varepsilon), u - u_\varepsilon\big\rangle.$$

Поэтому с учетом свойства (A3) получаем при $\sigma = \varepsilon - 0.5\alpha$, что

$$\mu_\alpha^{(\varepsilon)}(u) \geqslant \nu\big\langle \nabla_v h_\varepsilon(u, u^*) - \nabla_v h_\varepsilon(u_\varepsilon, u_\varepsilon), u - u_\varepsilon\big\rangle - 0.5\alpha\nu^2\,\|u - u_\varepsilon\|^2 \geqslant (\nu\tau - 0.5\alpha\nu^2)\|u - u_\varepsilon\|^2 \geqslant \sigma\|u - u_\varepsilon\|^2.$$

Теорема доказана.

Введем обозначение: $S(u) = \big\{v \in U \mid \mu_\alpha^{(\varepsilon)}(v) \leqslant \mu_\alpha^{(\varepsilon)}(u)\big\}\ \ \forall u \in U$.

Следствие 1. *Пусть выполняется предположение* (A3). *Тогда лебегово множество* $S(u)$ *для любого* $u \in U$ *является ограниченным.*

Теорема 4. Глобальная сходимость. *Пусть выполняются предположения* (A1), (A2) и (A3). *Тогда итерационная последовательность* $\{u^k\}$, *построенная методом спуска, сходится к единственному решению задачи* 5.

Доказательство. Для доказательства сходимости метода воспользуемся теоремой сходимости A из [10] (гл. 4, раздел 4.5). Прежде всего покажем, что выполняются все условия этой теоремы.

1) Все точки последовательности $\{u^k\}$ принадлежат компактному подмножеству U. Условие вытекает из следствия 1.

2) $\mu_\alpha^{(\varepsilon)}(u^{k+1}) < \mu_\alpha^{(\varepsilon)}(u^k)$ для $u^k \notin U^*$ и $u^k \in U^*$ в случае $\mu_\alpha^{(\varepsilon)}(u^{k+1}) \geqslant \mu_\alpha^{(\varepsilon)}(u^k)$. Условие следует непосредственно из теоремы 2, леммы 3 и правила выбора шага в методе.

3) Алгоритмическое отображение $u \mapsto w(u)$ замкнуто в любой точке $u \notin U^*$. Условие следует из непрерывности отображения $u \mapsto v(u)$, непрерывности функции $\mu_\alpha^{(\varepsilon)}$ на U и компактности множества $S(u^0)$.

Таким образом, все условия теоремы сходимости A ([10], гл. 4, раздел 4.5) выполняются, поэтому любая предельная точка последовательности $\{u^k\}$ является стационарной (в силу свойства 1 хотя бы одна такая точка существует). Следовательно, в силу теоремы 3 последовательность $\{u^k\}$ сходится к единственному решению u_ε задачи 5. Теорема доказана.

Теперь, наконец, мы можем описать метод спуска для решения исходной монотонной задачи 4.

Двухуровневый метод спуска для монотонной задачи равновесия.

Шаг 0 (инициализация). Выберем произвольно число $\theta > 0$, последовательность положительных чисел $\{\varepsilon_l\} \searrow 0$ и точку $z^0 \in U$. Положим $l = 1$.

Шаг 1. Положим $\varepsilon = \varepsilon_l$ и $u^l = z^{l-1}$ и выберем произвольное число α, $0 < \alpha \leqslant \varepsilon$.

Шаг 2. Применим вышеизложенный алгоритм для сильно монотонной задачи и найдем точку

$$u^l \in \big\{u \in U \mid \mu_\alpha^{(\varepsilon)}(u) \leqslant \mu_\alpha^{(\varepsilon)}(u^0)\big\},$$

такую, что

$$\mu_\alpha^{(\varepsilon)}(u^l) \leqslant \varepsilon^{1+\theta}. \tag{7}$$

Шаг 3. Положим $z^l = u^l$, $l = l + 1$ и перейдем к шагу 1.

Теорема 5. *Пусть выполнены все условия теоремы* 4. *Тогда* $\lim\limits_{l\to\infty} z^l = u_n^*$.

Доказательство. Используя теорему 3 и учитывая, что $\alpha \leqslant \varepsilon_l$, получим оценку

$$0.5\varepsilon_l\|z^l - u_{\varepsilon_l}\|^2 \leqslant \mu_\alpha^{(\varepsilon_l)}(z^l).$$

В силу (7) имеем $\varepsilon_l\|z^l - u_{\varepsilon_l}\|^2 \leqslant 2\varepsilon_l^{1+\theta}$. Отсюда следует, что

$$\|z^l - u_n^*\| \leqslant \|z^l - u_{\varepsilon_l}\| + \|u_{\varepsilon_l} - u_n^*\| \leqslant \|u_{\varepsilon_l} - u_n^*\| + \sqrt{2\varepsilon_l^\theta}.$$

В силу теоремы 1 имеем $\{u_{\varepsilon_l}\} \longrightarrow u_n^*$, поэтому $\lim\limits_{l\to\infty} z^l = u_n^*$. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Коннов И.В., Пинягина О.В.* Метод спуска по интервальной функции для негладких задач равновесия // Изв. вузов. Математика. 2003. № 12. 71–77.
2. *Konnov I.V., Pinyagina O.V.* D-gap functions for a class of equilibrium problems in Banach spaces // Computational Methods in Applied Mathematics. 2003. **3**, N 2. 274–286.
3. *Konnov I.V., Kum S.* Descent methods for mixed variational inequalities in a Hilbert space // Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications. 2001. **47**. 561–572.
4. *Бакушинский А.Б., Гончарский А.В.* Итерационные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1989.
5. *Байокки К., Капело А.* Вариационные и квазивариационные неравенства. Приложения к задачам со свободной границей. М.: Наука, 1988.
6. *Bianchi M., Schaible S.* Generalized monotone bifunctions and equilibrium problems // J. Optim. Theory Appl. 1996. **90**. 31–43.
7. *Blum E., Oettli W.* From optimization and variational inequalities to equilibrium problems // The Mathem. Student. 1994. **63**. 123–145.
8. *Konnov I.V., Pinyagina O.V.* D-gap functions and descent methods for a class of monotone equilibrium problems // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2003. **13**. 57–65.
9. *Демьянов В.Ф., Рубинов А.И.* Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление. М.: Наука, 1990.
10. *Зангвилл У.* Нелинейное программирование. Единый подход. М.: Советское радио, 1973.

Поступила в редакцию
14.06.2004