

УДК 518.5:533.6

## НЕЕДИНСТВЕННОСТЬ УДАРНО-ВОЛНОВЫХ СТРУКТУР В РЕАЛЬНЫХ ГАЗАХ: МАХОВСКОЕ И/ИЛИ РЕГУЛЯРНОЕ ОТРАЖЕНИЕ

Г. А. Тарнавский<sup>1</sup>

Рассмотрен ряд проблем неединственности ударно-волновых структур, возникающих в высокоскоростных газовых потоках при взаимодействии скачков уплотнения с отражением маховского или регулярного типов. Исследовано влияние реальных свойств газа (модель эффективного показателя адиабаты) на изменение положения в параметрическом пространстве задачи точек бифуркации — границ области, в которой возможно существование двойного решения.

**1. Введение.** Развитие методов математического моделирования, обусловленное высокими качествами современной вычислительной техники, сделало возможным исследование пространственных высокоскоростных течений газа с образованием сложных ударно-волновых структур в потоке. При этом весьма важным становится изучение проблем неединственности и гистерезиса получаемых численных решений, анализа их адекватности реальным физическим процессам. Основной целью настоящей работы является исследование такого взаимодействия ударных волн, например в воздухозаборниках и соплах двигателей гиперзвуковых летательных аппаратов в некоторых диапазонах режимов полета, когда имеет место дуализм решения — возможность существования при одних и тех же определяющих параметрах задачи картин отражения двух различных типов: регулярного или маховского (парадокс Неймана [1]).

К настоящему времени проведенные исследования регулярного (РО) и маховского (МО) отражений ударных волн (УВ) позволяют сделать некоторые выводы об областях их существования, в том числе и об области существования двойного решения, т.е. о наличии ряда поддиапазонов изменения определяющих параметров процесса, таких как число Маха набегающего потока, угол отклонения потока и т.п., в которых возможно образование устойчивых картин как РО, так и МО. Схематическое изображение этих двух ударно-волновых структур, которые возникают при отражении УВ в установившихся течениях, представлено на рис. 1.

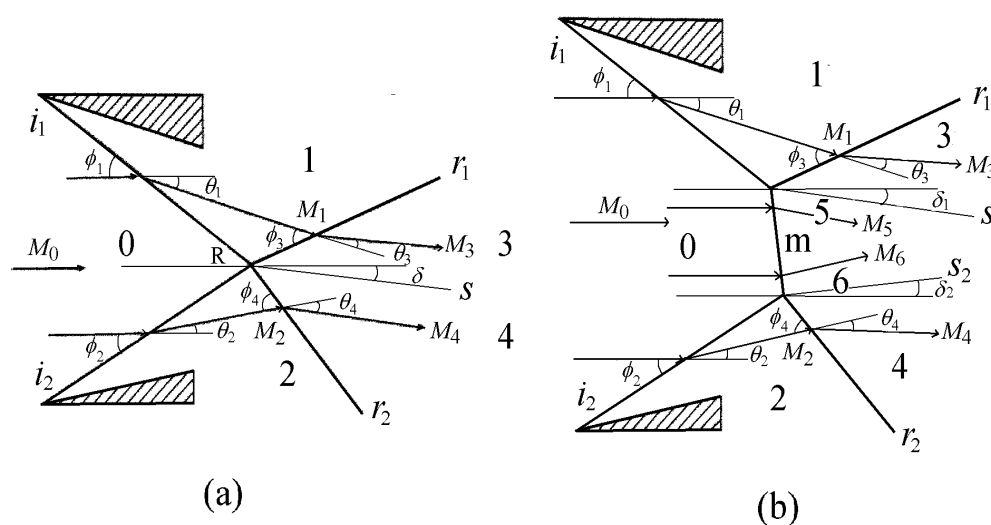


Рис. 1. Картины ударно-волновых структур при взаимодействии скачков уплотнения: регулярное (а) и маховское (б) отражения

<sup>1</sup> Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, ул. Институтская, 4/1, 630090, г. Новосибирск; e-mail: tarnav@itam.nsc.ru

Картина РО (рис. 1 а), образовавшаяся при натекании сверхзвукового потока с числом Маха  $M_0$  на два клина, характеризующихся углами  $\beta_1$  и  $\beta_2$ , включает соответственно два косых скачка уплотнения (СУ)  $i_1$  и  $i_2$ , сформированных вблизи поверхности клиньев и падающих внутрь области течения с углами наклона  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  (здесь и далее углы определяются по отношению к направлению вектора набегающего потока), и два отраженных СУ  $r_1$  и  $r_2$  с углами наклона  $\varphi_3$  и  $\varphi_4$ . Эти СУ пересекаются в точке  $R$ . Спутная струя  $S$  с углом наклона  $\delta$  образуется при прохождении потока через систему скачков, с углами отклонения потока  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$  и  $\theta_4$  на скачках  $i_1, i_2, r_1$  и  $r_2$  соответственно. Для стационарной картины выполняются соотношения:  $\theta_1 = \beta_1; \theta_2 = \beta_2; \theta_1 - \theta_3 = \theta_2 - \theta_4 = \delta$ .

Для симметричного ( $\beta_1 = \beta_2$ ) отражения, естественно,  $\delta = 0$ .

При возникновении волновой структуры с МО (рис. 1 б) в дополнение к падающим и отраженным СУ  $i_1, i_2, r_1$  и  $r_2$  появляется центральный скачок  $m$ , фронт которого соединяет две тройные точки пересечения скачков  $(i_1, r_1, m)$  и  $(i_2, r_2, m)$ , а также возникают две спутные струи  $S_1$  и  $S_2$  с углами наклона  $\delta_1$  и  $\delta_2$ . Для стационарной картины выполняются соотношения:  $\theta_1 = \beta_1; \theta_2 = \beta_2; \theta_1 - \theta_3 = \delta_1; \theta_2 - \theta_4 = \delta_2$ .

В случае симметрии ( $\beta_1 = \beta_2$ ), очевидно,  $\theta_1 = \theta_2, \delta_1 = \delta_2 = 0$ .

Вся область течения разделяется на ряд зон (см. рис. 1), в каждой из которых течение (в идеализированной постановке — однородное) имеет собственные характеристики. Зона 0, область невозмущенного течения, ограничена слева любой границей, помещенной в область набегающего сверхзвукового потока (например прямой линией, соединяющей вершины клиньев), а справа — фронтами СУ  $i_1$  и  $i_2$  (и дополнительно фронтом СУ  $m$  для МО).

Зона 1, область течения, развернутого (по часовой стрелке) на СУ  $i_1$  вдоль поверхности верхнего клина, ограничена фронтами СУ  $i_1$  и  $r_1$  соответственно слева и справа. Аналогично зона 2, область течения развернутого (против часовой стрелки) на СУ  $i_2$  вдоль поверхности нижнего клина, ограничена фронтами СУ  $i_2$  и  $r_2$  слева и справа соответственно.

Зона 3, сектор течения, развернутого (против часовой стрелки) на СУ  $r_1$ , ограничена его фронтом и поверхностью контактного разрыва, который является границей спутной струи  $S$  (для МО —  $S_1$ ). Зона 4, сектор течения, развернутого (по часовой стрелке) на СУ  $r_2$ , ограничена его фронтом и поверхностью контактного разрыва, который также является границей спутной струи  $S$  (для МО —  $S_2$ ). В случае РО зоны 3 и 4 имеют общую границу (непосредственно смыкаются), а в случае МО между ними расположены зоны 5 и 6, области течения за фронтом СУ  $m$ .

Переходы между этими двумя типами отражения определяются критерием отделения и критерием Неймана. Оба эти критерия (точки бифуркации) разграничивают три области, в которых возможно существование только МО, МО и РО или только РО. Процесс перехода этих типов отражения одной в другую при вариации параметров, определяющих физику задачи, например скорости и высоты полета, может сопровождаться явлением гистерезиса.

Обычно исследование волновых структур этих двух типов (РО и МО) проводится в предположении неизменности физических свойств газового потока при прохождении через всю систему УВ, т.е. используется модель идеального политропного газа с постоянным значением показателя адиабаты (политропы)  $\gamma$  во всей области течения (см., например, [2]). Однако реальные процессы (см. [3, 4]), изучение которых связано с интенсификацией разработки гиперзвуковых летательных аппаратов, настоятельно требуют расширения этой физической модели. Заметим, что процесс, схематически изображенный на рис. 1, моделирует течение на входе в воздухозаборник ГПВРД. Уровень знания режимов этого течения, предсказание переходов от РО к МО и обратно, а также ответ на вопрос, какой из двух типов ударно-волновых структур реализуется в области неединственности решения и какие факторы влияют на это, весьма важны при создании системы управления режимом горения топлива для устойчивого функционирования двигательной установки в целом.

В настоящей работе для исследования газо- и термодинамики физического процесса [3–5] используется метод “эффективного показателя адиабаты” (см. [5–7]), позволяющий моделировать течение газа с учетом его реальных свойств при помощи вариации показателя адиабаты  $\gamma(p, T)$ , изменяющегося во всем поле течения в зависимости от локальных значений давления  $p$  и температуры  $T$ .

Иллюстрацией к выводу о необходимости учета изменения термодинамических свойств газа в гиперзвуковых потоках с зонами высоких  $p$  и  $T$  является рис. 2, на котором приведена зависимость отношения теплоемкостей  $c_p/c_v$  для воздуха (классический показатель адиабаты  $\gamma = c_p/c_v$ ) от температуры в параметрическом виде, где параметр — давление с фиксированными значениями для каждой кривой. Данные взяты из таблиц [8, 9]. “Волнообразное” поведение кривых связано с такими физическими процессами, последовательно протекающими при увеличении  $T$ , как возбуждение колебательных степеней свободы

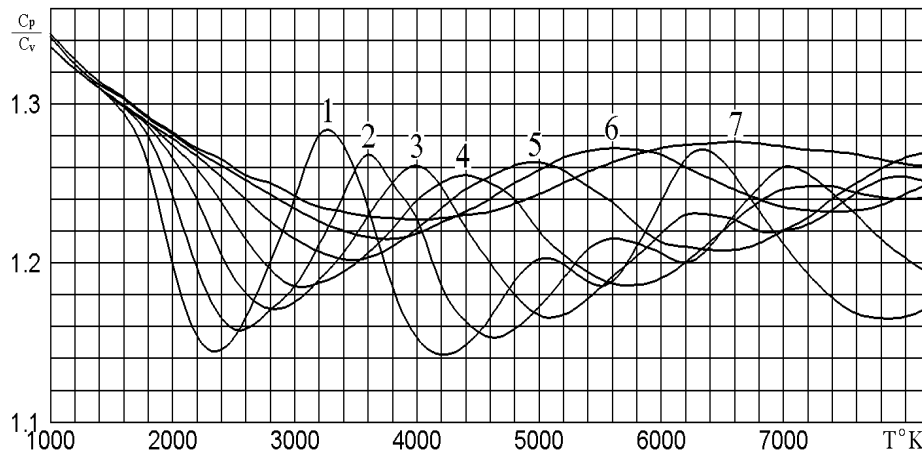


Рис. 2. Зависимость отношения  $c_p/c_v$  (для воздуха) от температуры при вариации давления  $10^{-3}$ (1),  $10^{-2}$ (2),  $10^{-1}$ (3), 1(4), 10(5),  $10^2$ (6),  $10^3$ (7) атм

молекул кислорода и их диссоциация, возбуждение колебаний в молекулах азота и их диссоциация, возбуждение электронных оболочек атомов и их ионизация.

В данной работе для учета реальных свойств газа используется физико-математическая модель УВ с различными показателями адиабаты до и после фронта скачка уплотнения, который предполагается бесконечно тонким разрывом. Основные газо- и термодинамические соотношения на разрыве, анализ области применимости модели и ее сравнение с моделью неизменности свойств газовой среды при переходе через СУ даны в работе [10].

**2. Неединственность решений одного типа. Маховское отражение: слабые и сильные решения.** Для анализа волновых структур, возникающих при взаимодействии падающих УВ  $i_1$  и  $i_2$ , которые определяют образование отраженных УВ  $r_1$  и  $r_2$  различных типов (РО и МО), весьма удобно использовать технику ударных поляр (см. также [11]). Эта техника позволяет заменить сложный математический анализ результатов совместного решения нескольких (по числу взаимодействующих УВ) нелинейных алгебраических уравнений, связывающих значения параметров перед и за фронтом каждого СУ с необходимостью селекции решений вследствие их неединственности, наглядным графическим способом получения решения. Данный способ делает сам процесс получения решений и их анализ существенно более ясным и логичным, а выбор необходимого решения в случае их неединственности вызывает значительно меньше затруднений.

Под полярной ударной волны, или просто ударной полярной, понимается соотношение, связывающее угол отклонения потока  $\theta$  и отношение давлений  $\xi = p_+/p_-$ , где  $p_+$  — давление за, а  $p_-$  — перед фронтом СУ, при параметрической зависимости от числа Маха  $M_-$  и эффективных показателей адиабаты  $\gamma_+$  и  $\gamma_-$ :

$$f(\theta, \xi, M_-, \gamma_-, \gamma_+) = 0. \quad (1)$$

Графически иллюстрирующая зависимость (1) кривая, собственно и называемая ударной полярной (в дальнейшем — УП) в плоскости

$$(x, y) = (\theta, \xi), \quad (2)$$

является замкнутой кривой, ограниченной значениями

$$\theta_{\min} \leq \theta \leq \theta_{\max}, \quad \xi_{\min} \leq \xi \leq \xi_{\max} \quad (3)$$

и зеркально симметричной относительно прямой

$$\theta_s = 0.5(\theta_{\min} + \theta_{\max}). \quad (4)$$

Конкретный вид (1) в (2) и подробный анализ УП при вариации  $\gamma_+$ ,  $\gamma_-$  и  $M_-$ , определяющие значения (3)–(4), приводятся в [10].

Все типы УП (1) являются двузначными кривыми как для зависимости

$$\xi = \xi(\theta), \quad (5)$$

так и для обратной зависимости

$$\theta = \theta(\xi), \tag{6}$$

образуя соответственно верхнюю и нижнюю (5), а также левую и правую ветви для (6). Для определенности в (5) верхнюю ветвь называют сильным, а нижнюю — слабым решением. Для (6) сильным решением определяется правая, а слабым — левая ветвь, если  $\theta_s \geq 0$ , а при  $\theta_s < 0$ , наоборот, сильным решением — левая, а слабым — правая ветвь.

На рис. 3 представлены УП для задачи с фиксированными значениями числа Маха  $M_0 = 5$ , угла верхнего клина  $\beta_1 = 25^\circ$  и вариацией угла нижнего клина  $\beta_2 = 35^\circ, 30^\circ, 25^\circ, 20^\circ, 15^\circ, 10^\circ$  (рис. 3, а, b, c, d, e, f соответственно). Показатель адиабаты газовой среды  $\gamma$  неизменен во всех зонах течения:  $\gamma_0 = \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \gamma_4 = 1.4$ .

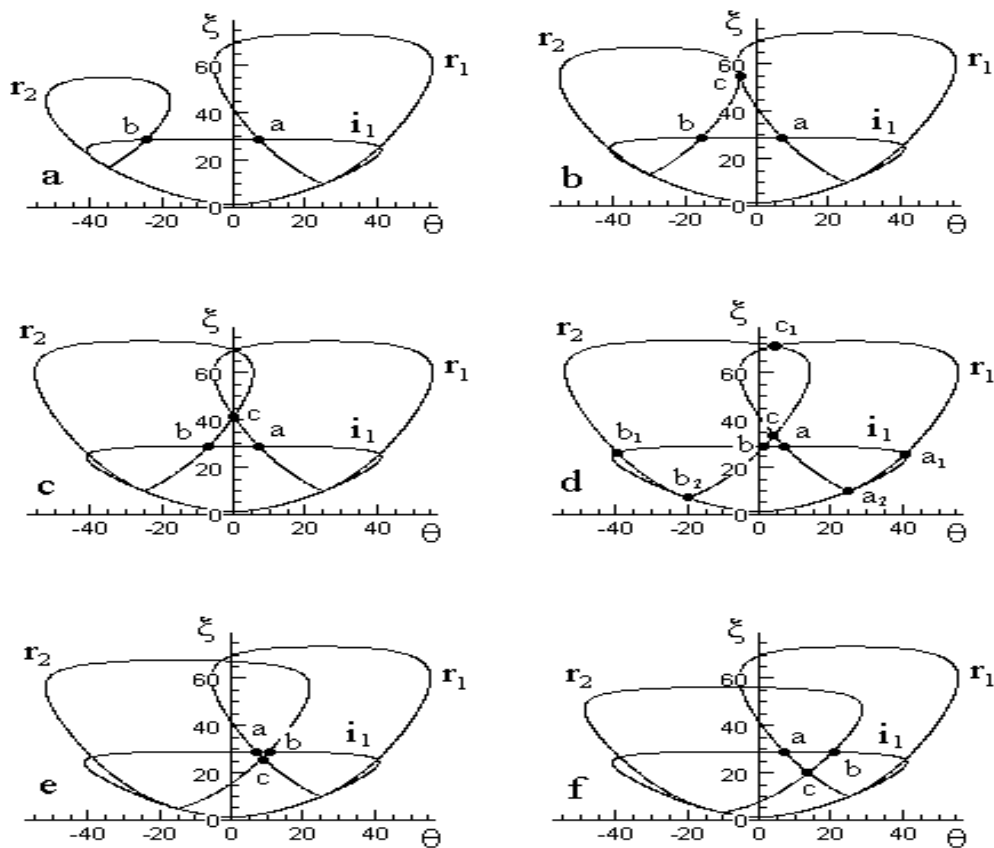


Рис. 3. Поляры падающей  $i_1$  и двух отраженных  $r_1$  и  $r_2$  ударных волн при фиксированных значениях  $M_0 = 5$ ;  $\gamma = 1.4$ ;  $\beta_1 = 25^\circ$  и вариации  $\beta_2 = 35^\circ$  (рис. а),  $30^\circ$  (б),  $25^\circ$  (с),  $20^\circ$  (д),  $15^\circ$  (е),  $10^\circ$  (ф)

На падающих с клиньев внутрь области СУ  $i_1$  и  $i_2$  происходит разворот потока с углами  $\theta_1 = \beta_1$  и  $\theta_2 = -\beta_2$ . Здесь и ниже знак  $\theta$  определяется направлением разворота течения относительно вектора набегающего потока: угол положителен при развороте по часовой стрелке (например, угол  $\theta_1$  на рис. 1) и отрицателен при развороте против часовой стрелки (например, угол  $\theta_2$  на рис. 1).

Поскольку  $\gamma_2 = \gamma_1$ , то ударные поляры скачков  $i_1$  и  $i_2$  (в дальнейшем для краткости П- $i_1$ , П- $i_2$  и т.д.), определяемые по (1) с заменой индексов “-” на “0”, “+” на “1” (для П- $i_1$ ), “+” на “2” (для П- $i_2$ ), совпадают. Поляры отраженных СУ  $r_1$  и  $r_2$  связывают величины в зонах 3/1 и 4/2 (соответственно +/- в (1)).

Для того чтобы адекватно сопоставить поляры П- $i_1$ , П- $i_2$ , П- $r_1$ , П- $r_2$  на одной плоскости (2), удобнее всего провести перенормировку поляр П- $r_1$  и П- $r_2$  к переменным П- $i_1$  и П- $i_2$ . При этом П- $r_1$  смещается “вверх-вправо” и “опирается” на точку П- $i_1$  с координатами  $(\beta_1, \xi(\beta_1))$ , а П- $r_2$  смещается “вверх-влево” и “опирается” на точку П- $i_2$  (напомним, что в данном случае П- $i_2$  совпадает с П- $i_1$ ) с координатами  $(-\beta_2, \xi(-\beta_2))$ . Соответствующие точки “опор”  $a_2$  и  $b_2$  показаны на рис. 3 д.

Расположение точек попарного пересечения поляр  $(\Pi-i_1$  и  $\Pi-r_1)$ ,  $(\Pi-i_2$  и  $\Pi-r_2)$ ,  $(\Pi-r_1$  и  $\Pi-r_2)$  характеризует возникающую ударно-волновую структуру течения с формированием РО и/или МО. Пересечение  $\Pi-i_1$  с  $\Pi-r_1$  и  $\Pi-i_2$  с  $\Pi-r_2$  определяет маховский тип отражения, который и будет рассматриваться в этом пункте данной работы.

Сделаем некоторое важное отступление. Вообще говоря, поляры  $\Pi-i$  и  $\Pi-r$  в классическом случае неизменности свойств газовой среды на СУ пересекаются в трех точках, включая точку “опоры”  $\Pi-r$  на  $\Pi-i$ . Эти точки отмечены на рис. 3 d как точки  $a$ ,  $a_1$ ,  $a_2$ . Таким образом, имеет место неединственность решения, поскольку возможны три конфигурации МО с различными значениями угла направления потока в спутной струе  $\theta_a$ ,  $\theta_{a_1}$ ,  $\theta_{a_2}$  и давления в ней  $p_a$ ,  $p_{a_1}$ ,  $p_{a_2}$ . Третье решение  $(\theta_{a_2}, p_{a_2})$  может быть исключено из рассмотрения, поскольку является вырождением ударной волны в волну бесконечно малой интенсивности.

Рассмотрим два нетривиальных решения (точки  $a$  и  $a_1$ ). Для углов направления спутного потока имеет место соотношение

$$\theta_a < \beta_1 < \theta_{a_1}. \quad (7)$$

Таким образом, из (7) следует, что первое решение (точка  $a$ ) обеспечивает разворот потока на УВ  $r_1$  против часовой стрелки по отношению к направлению потока перед ее фронтом. Этот разворот уменьшает угол наклона  $\delta_1$  течения в спутной струе к направлению вектора набегающего потока, или, говоря другими словами, к центральной линии задачи. Второе решение характерно дополнительным доворотом потока на УВ  $r_1$  по часовой стрелке, с существенным увеличением  $\delta_1$  (см. рис. 1 b). Первое решение может быть названо слабым, а второе — сильным МО (аналогично слабому и сильному решению задачи обтекания клина сверхзвуковым потоком газа).

Подчеркнем, что не следует путать, несмотря на лингвистическую тождественность, слабые и сильные **совместные** решения **всей** задачи, которые представляются точками пересечения поляр, с **собственно ветвями** поляр: слабыми (нижними или левыми) и сильными (верхними или правыми).

Заметим, что, вообще говоря, сильное решение плохо согласуется с трехскачковой схемой структуры течения (рис. 1 b), требуя, как минимум, еще одного замыкающего скачка для доворота потока в спутной струе к направлению, параллельному (или близко к нему) вектору набегающего потока.

Запишем всю ударно-волновую структуру, состоящую из двух падающих СУ  $i_1$  и  $i_2$ , двух отраженных СУ  $r_1$  и  $r_2$ , а также связывающего их центрального СУ  $m$ , в символическом виде

$$MO \Rightarrow i_1 + i_2 + m + r_1 + r_2. \quad (8)$$

Введем для (8) верхние индексы, обозначая слабое решение литерой  $w$ , а сильное — литерой  $s$ .

Теоретически возможно существование целого семейства волновых картин. Основная, наблюдаемая в экспериментах картина соответствует “полностью слабому” решению

$$MO^{wwww} \Rightarrow i_1^w + i_2^w + m + r_1^w + r_2^w. \quad (9)$$

Не противоречит физическим законам сохранения и “полностью сильное” решение

$$MO^{ssss} \Rightarrow i_1^s + i_2^s + m + r_1^s + r_2^s. \quad (10)$$

Теоретически возможны, кроме (10), еще 14 комбинаций “смешанных” решений МО с индексами:  $wwws$ ,  $wsws$ ,  $wsws$ ,  $wsws$ ,  $wsws$ ,  $wsws$ ,  $wsws$ ,  $wsws$ ,  $wsws$ ,  $wsws$ ,  $wsws$ ,  $wsws$ ,  $wsws$ ,  $wsws$ .

В целом же вопрос о селекции решений при их неединственности весьма не так прост, как зачастую его пытаются трактовать, аргументируя невозможность существования сильного решения или некими “энтропийными” соображениями, или доказывая (заметим — в линейном приближении) его неустойчивость. Однако эта проблема лежит вне рамок настоящей работы, и ниже будут анализироваться только слабые решения (9).

Таким образом, в графическом анализе будет рассматриваться только единственная точка  $a$  пересечения левой ветви  $\Pi-r_1$  верхней ветвью  $\Pi-i_1$  и единственная точка  $b$  пересечения правой ветви  $\Pi-r_2$  с верхней ветвью  $\Pi-i_2$ ; эти точки отмечены на всех рис. 3 (точки  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $c_1$  отмечены только на рис. 3 d).

Возможность существования маховского отражения определяется взаимным положением точек  $a$  и  $b$ , фактически соотношением их абсцисс  $\theta_a$  и  $\theta_b$ . Для УВ  $r_1$  МО называется:

- 1) прямым, если  $\theta_a > 0$ ;
- 2) стационарным, если  $\theta_a = 0$ ;

3) инверсным, если  $\theta_a < 0$ .

Для УВ  $r_2$ , соответственно, наоборот: МО — прямое, если  $\theta_b < 0$ , и инверсное, если  $\theta_b > 0$ .

Прямые МО УВ  $r_1$  имеют место для всех вариантов задачи, представленных на рис. 3 а–3 е. Для УВ  $r_2$  реализуются: прямые МО — в вариантах рис. 3 а, b, c и инверсные МО — показаны на рис. 3 d, e, f. При этом формируются следующие типы трубок тока выходного спутного течения (ограниченного на рис. 1b штриховыми линиями): сужающаяся, параллельная или расширяющаяся, если соответственно выполняются условия

$$\theta_a - \beta_b > 0, \tag{11}$$

$$\theta_a - \beta_b = 0, \tag{12}$$

$$\theta_a - \beta_b < 0. \tag{13}$$

Заметим, что при выполнении (12) возможно существование стационарного МО.

Волновая структура, удовлетворяющая (13), не имеет физического смысла, поскольку дозвуковое течение за фронтом центрального СУ  $m$  (рис. 1 b) не может формировать расширяющуюся трубку тока. Таким образом, условие (12), называемое условием Неймана, отделяет область (13), где запрещены МО, от области (11), где возможны и РО, и МО. В параметрическом пространстве задачи условие Неймана определяет точку бифуркации решения, отделяющую область существования единственного решения (возможно только РО) от области существования двойного решения (возможны и РО, и МО).

Забегая несколько вперед, укажем, что в области (11) существует вторая точка бифуркации решения, отделяющую область существования двойного решения (возможны и РО, и МО) от области единственности решения (возможно только МО).

**3. Неединственность решений одного типа. Регулярное отражение: слабые и сильные решения.** Возможность существования ударно-волновой структуры с образованием картины регулярного отражения (рис. 1 а) определяется наличием или отсутствием точек пересечения ударных поляр П- $r_1$  и П- $r_2$ . Для цикла задач с фиксированным значением угла верхнего клина  $\beta_1 = 25^\circ$  и вариацией значений угла нижнего клина  $\beta_2 = 35^\circ, 30^\circ, 25^\circ, 20^\circ, 15^\circ, 10^\circ$  (рис. 3 а–3 f соответственно) эти поляры не пересекаются только при  $\beta_2 = 35^\circ$ ; следовательно, в этом случае РО невозможно.

При других значениях  $\beta_2$  существуют две точки пересечения П- $r_1$  и П- $r_2$ , которые показаны на рис. 3 d, — точки  $c$  и  $c_1$  (на других рис. 3 точка  $c_1$  не маркируется во избежание излишнего загромождения рисунка). Для определенности эти точки обозначаются в соответствии со значением их ординат

$$\xi_c < \xi_{c_1}. \tag{14}$$

Решение  $(\theta_c, \xi_c)$  определим как слабое, а  $(\theta_{c_1}, \xi_{c_1})$  — как сильное. Еще раз заметим, что не следует путать, несмотря на сходство терминологии, слабое и сильное **совместное** решение всей задачи (точки  $c$  и  $c_1$  пересечения двух разных поляр) с понятием слабого или сильного решения для **каждой** поляры по отдельности как некоторого множества решений (1), составляющих поляру и определяемых принадлежностью к той или иной ветви поляры (сильные решения составляют верхнюю, а слабые — нижнюю ветвь поляры).

Сильное (по (14)) решение может быть точкой пересечения как верхних ветвей УП (рис. 3 b–3 e), так и нижней ветви П- $r_1$  и верхней ветви П- $r_2$ . Аналогично и слабое решение задачи (точки  $c$  на всех рис. 3) может быть точкой пересечения как двух нижних, так и одной нижней и одной верхней ветвью поляр, несмотря на то, что на всех представленных рис. 3 b–3 f слабое решение определяется пересечением только нижних ветвей П- $r_1$  и П- $r_2$ .

Это связано только с большим шагом параметра  $\beta_2$  в представленных графиках ( $\Delta\beta_2 = 5^\circ$ ). При более мелкой вариации  $\beta_2$ , естественно, существует критическое значение  $\beta_2^*$ , при котором П- $r_1$  и П- $r_2$  касаются друг друга, т.е. имеют единственную точку пересечения; в этом случае сильное и слабое решения совпадают. Для данной задачи при значениях других параметров:  $M_0 = 5$  и  $\beta_1 = 25^\circ$  критическое значение  $\beta_2^* = 30.1^\circ$  (см. близкий к этому рис. 3 b, где  $\beta_2 = 30^\circ$ ).

Рассмотрим несколько более подробно, какими именно ветвями поляр образуется точка касания. Очевидно, для симметричной задачи, например при фиксированных  $\beta_1 = \beta_2$  и вариации  $M_0$  для поиска критического значения  $M_0^*(\beta_1, \beta_2)$ , поляры, будучи зеркально симметричными относительно оси ординат, коснутся друг друга своими “максимально удаленными” точками (3):  $(\theta_{\max}, \xi(\theta_{\max}))$  — левой поляры и  $(\theta_{\min}, \xi(\theta_{\min}))$  — правой поляры. Эти точки есть точки перехода нижних ветвей поляр в верхние.

Для несимметричной задачи, показанной на рис. 3, уменьшение варьируемого параметра  $\beta_2$  от  $35^\circ$  к  $30^\circ$  приводит к увеличению геометрического размера П- $r_2$  и ее приближению к П- $r_1$  (см. рис. 3 а–3 b). Касание поляр осуществится точками, принадлежащими: слева — верхней ветви П- $r_2$ , справа —

нижней ветви поляры  $\Pi-r_1$ . При дальнейшем уменьшении  $\beta_2$  (см. рис. 3 с–3 d) точки пересечения поляр образуются, как уже отмечалось выше, следующими ветвями поляр: точка  $c$  (слабое решение) — нижними ветвями, точка  $c_1$  (сильное решение) — верхними ветвями.

Таким образом, следует подчеркнуть важный факт, что для несимметричных задач вблизи точки касания существует очень небольшой диапазон значений варьируемого параметра, в котором слабое решение всей задачи (т.е. совместное решение) будет образовываться обязательно одним слабым и одним сильным ударно-волновым решением (1). Заметим, что в данном случае этот диапазон составляет всего около  $\Delta\beta_2 \approx 0.5^\circ$ , что делает экспериментальные исследования, с последующим сравнением с вычислительными результатами, весьма затруднительным.

В связи с анализом, проведенным выше, аргументы, приводимые для доказательства (точнее, для некоторых объяснений), что сильное решение “в принципе никогда не реализуется”, представляются малоубедительными. Действительно, пока в экспериментах обнаруживаются только слабые решения

$$PO^{wwww} \implies i_1^w + i_2^w + r_1^w + r_2^w.$$

Но физические законы сохранения допускают (во всяком случае не противоречат) существование как полностью сильных

$$PO^{ssss} \implies i_1^s + i_2^s + r_1^s + r_2^s,$$

так и 14 вариантов “смешанных” решений  $wwss$ ,  $ssww$  и т.д. (см. выше).

Однако данная проблема требует особого исследования и также лежит вне рамок настоящей работы, поэтому далее рассматриваются и анализируются только слабые решения (точки  $c$  пересечения  $\Pi-r_1$  и  $\Pi-r_2$ ).

#### 4. Неединственность решений разных типов: маховское и/или регулярное отражение.

Рассмотрим влияние вариации угла  $\beta_2$  при последовательном уменьшении его значения на формирование ударно волновых структур течения.

При  $\beta_2 = 35^\circ$  (рис. 3 а) нет пересечения  $\Pi-r_1$  и  $\Pi-r_2$  и существуют только точки пересечения  $\Pi-i_1$  и  $\Pi-r_1$  (точка  $a$ ) и  $\Pi-i_1$  и  $\Pi-r_2$  (точка  $b$ ). Таким образом, при рассмотренном наборе определяющих параметров  $M_0$ ,  $\beta_1$  и  $\beta_2$  возможно только маховское отражение. Кроме того, это МО является прямым как для верхней, так и для нижней отраженной УВ.

Уменьшение  $\beta_2$  до значения  $30^\circ$  (рис. 3 б) приводит к появлению точки  $c$  пересечения  $\Pi-r_1$  и  $\Pi-r_2$ , в данном случае можно считать — точки касания. Поэтому наряду с прямым МО становится возможной ударно-волновая структура с РО. Таким образом, в параметрическом пространстве задачи существует точка

$$\beta_2 = \beta_2^{**}(M_0, \beta_1, \gamma), \quad (15)$$

которая является точкой (верхней по  $\beta_2$ ) бифуркации решения, ограничивающей область

$$\beta_2 > \beta_2^{**} \quad (16)$$

единственности решения, где возможно только МО, от области

$$\beta_2 < \beta_2^{**} \quad (17)$$

неединственности, где (в некотором диапазоне) возможно существование как МО, так и РО. Граница (15), называемая условием отделения [1], для рассматриваемой задачи  $M_0 = 5$ ,  $\beta_1 = 25^\circ$ ,  $\gamma = 1.4$  есть  $\beta_2^{**} = 30.1^\circ$ .

Напомним, что в области (16), вообще говоря, имеет место граница  $\beta_2 > \beta_{\max}$  применимости модели СУ, присоединенного к клину; при  $\beta_2 > \beta_{\max}$  образуется течение с отошедшим скачком и совершенно другой ударно-волновой картиной, чем представленные на рис. 1. Такое же ограничение на рассматриваемую модель имеет место и по углу  $\beta_1$ .

Дальнейшее уменьшение  $\beta_2$  до  $25^\circ$  (рис. 3 с), т.е. до значения  $\beta_1 = \beta_2$ , естественно, приводит к симметричности течения: точка  $c$  лежит на оси ординат, а точки  $a$  и  $b$  зеркально симметричны относительно нее. Это также область неединственности решения: возможно как РО, так и прямое МО.

Уменьшение  $\beta_2$  до  $20^\circ$  (рис. 3 d), оставляя решение в области неединственности, приводит к изменению типа МО: в верхней части течения реализуется по-прежнему прямое МО, а в нижней — МО становится инверсным. При этом волновая структура МО является устойчивой, поскольку формирующееся за скачками спутное течение характеризуется сужающейся трубкой тока (выполняется условие (11), как и в предыдущих вариантах).

Дальнейшее уменьшение  $\beta_2$  до  $15^\circ$  (рис. 3 e) и далее до  $10^\circ$  (рис. 3 f) приводит к тому (см. расположение точек  $a$  и  $b$ ), что выполняется условие (13), т.е. трубка тока спутного течения становится расходящейся. Эта волновая структура МО физически нереализуема, поскольку является неустойчивой — дозвуковое течение за центральным СУ  $m$  не может формировать расширяющуюся устойчивую трубку тока.

Заметим, что графический анализ делает ненужным численную проверку выполнения условий с номерами (11)–(13): если точка  $c$  находится внутри области полярны П- $i_1$ , то при этом наборе определяющих параметров возможно только РО.

Таким образом, наряду с (15), в параметрическом пространстве задачи существует точка (при этом графически все точки  $a$ ,  $b$ ,  $c$  совпадают)

$$\beta_2 = \beta_2^*(M_0, \beta_1, \gamma), \tag{18}$$

которая является точкой (нижней по  $\beta_2$ ) бифуркации решения, ограничивающей область

$$\beta_2 < \beta_2^* \tag{19}$$

единственности решения, где возможно только РО, от области неединственности, где (в некотором диапазоне) возможно существование как РО, так и МО.

Граница (18), называемая условием Неймана [1], для рассматриваемой задачи  $M_0 = 5$ ,  $\beta_1 = 25^\circ$ ,  $\gamma = 1.4$  есть  $\beta_2 = 17^\circ$ .

Согласовывая условия (17) и (19) и объединяя с этим условия (15) и (19) в единую запись, имеем следующие диапазоны ударно-волновых структур:

$$\begin{aligned} \beta_2 < \beta_2^*, & \quad \text{возможно только РО;} \\ \beta_2^* \leq \beta_2 \leq \beta_2^{**}, & \quad \text{возможно и РО, и МО;} \\ \beta_2 > \beta_2^{**}, & \quad \text{возможно только МО.} \end{aligned} \tag{20}$$

Для рассматриваемой задачи с условием неизменности показателя адиабаты во всех зонах течения  $\gamma = 1.4$ , значениями  $M_0 = 5$  и  $\beta_1 = 25^\circ$  имеют место границы смены ударно-волновых режимов  $\beta^* = 17^\circ$ ,  $\beta^{**} = 30^\circ$ .

Заметим, что помимо определения границ режимов, техника ударных поляр делает возможным получение числовых характеристик течений (рис. 1 a, b): определяются относительное и абсолютное значения давления и угла отклонения потока на фронтах всех СУ, а по ним — значения всех остальных газодинамических параметров и углов наклона ударных волн во всей области течения.

В заключение следует кратко остановиться на следующем вопросе. Прямое численное моделирование течений на основе, в частности, уравнений Эйлера, в области неединственности решения ставит свои особые, специфические проблемы. Поскольку вычислительный алгоритм может получить только какое-то одно определенное решение, то возникают вопросы: какое это решение (МО или РО), какие факторы влияют на получение именно этого решения. Например, каковы бассейны притяжения решения: при использовании различных начальных данных, если используются методы установления; при вариации других алгоритмических параметров — размерности и конфигурации расчетной сетки и т.п. Интересным является вопрос о характере вычислительного процесса вблизи точек бифуркации решения: есть ли спонтанные переходы с одной ветви решения на другую, в особенности при попытке получить в финале один тип решения, стартуя с другого типа? Или алгоритм “самостоятельно определяет” только один тип решения, полностью игнорируя другой?

Подчеркнем, что основной “опасностью” прямого численного моделирования сложных задач газовой динамики в малоизученной или вообще неизученной области, где нет поддержки ни аналитическими соотношениями, ни экспериментальными данными, служащими определенным ориентиром, является вероятность получения какого-либо “собственного” решения (см., например, [12, 13]). Это особенно касается разработанного в последнее время большого количества алгоритмов так называемого “повышенного” порядка точности и их применения для расчета задач со сложной ударно-волновой конфигурацией. Например, в работах [14, 15] было показано, что все примененные алгоритмы дали различные (некоторые кардинально) решения одной и той же задачи.

Поэтому теоретические исследования, выявляющие особые области поведения решений, вновь становятся весьма важным элементом продвижения численного моделирования в область гиперзвуковых течений реального газа.



**5. Неединственность решений: влияние показателя адиабаты.** В классической модели не-изменности свойств газа ударно-волновые структуры рассматриваемой задачи (рис. 1) определяются следующим списком параметров:

$$F_c = (\beta_1, \beta_2, M_0, \gamma). \quad (21)$$

Рассмотрим физически более реальную, в особенности для высокоскоростных течений газа, модель, учитывающую изменение свойств газовой среды при прохождении потока через фронты СУ. В этом случае список (21) расширяется:

$$F_r = (\beta_1, \beta_2, M_0, \gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4), \quad (22)$$

где  $\gamma_i$  ( $i \in [0, 4]$ ) — показатели адиабаты в различных зонах течения, разграниченных фронтами СУ (см. рис. 1). Более подробно описание модели эффективного показателя адиабаты, область ее применимости, газодинамические соотношения, отличие от классической модели приведено в [6, 7, 10].

Параметры (22) изменяются в диапазонах

$$\begin{aligned} M_0 &\in (1, \infty), \\ \beta_k &\in [0, \beta_{\max}], \quad k = 1, 2, \\ \gamma_i &\in (1, 5/3], \quad i = 0, 1, 2, 3, 4. \end{aligned} \quad (23)$$

Значение  $\beta_{\max}$  в (23) определяется условием существования присоединенных СУ, при которых имеют место ударно-волновые структуры, показанные на рис. 1 а или рис. 1 б.

В данном пункте работы исследуется влияние реальных свойств среды (при использовании модели эффективного показателя адиабаты) на область неединственности решения, т.е. на положение точек бифуркации в параметрическом пространстве (22). Оценка этого влияния будет рассматриваться на одном из исследованных выше вариантов задачи:  $\gamma_0 = 1.4$ ,  $M_0 = 5$ , симметричная геометрия  $\beta_1 = \beta_2 = 25^\circ$  (см. рис. 3 с). Для сохранения симметрии примем условия  $\gamma_2 = \gamma_1$  и  $\gamma_4 = \gamma_3$  (одинаковые газовые среды за падающими СУ в зонах 1 и 2; и также одинаковые газовые среды за отраженными СУ в зонах 3 и 4). Значения  $\gamma_1$  и  $\gamma_3$  будут варьироваться практически по всему диапазону своего возможного изменения (23).

На рис. 4 а–4 д приводятся ударные поляры при значениях  $\gamma_1 = 1.4; 1.3; 1.2$  и  $1.1$  соответственно. На каждом из этих графиков показаны:

- 1) поляра  $\Pi-i_1$  с ударным переходом в (1) от  $\gamma_- = \gamma_0 = 1.4$  к  $\gamma_+ = \gamma_1$ ;
- 2) семейство поляр  $\Pi-r_1$  с ударным переходом от  $\gamma_- = \gamma_1$  к  $\gamma_+ = \gamma_3 = 1.4; 1.3; 1.2; 1.1$  и  $1.01$  (кривые 1–5 соответственно).

Поляра  $\Pi-i_2$  также, как и в вариантах, иллюстрирующих рис. 3, совпадает с  $\Pi-i_1$ . Поляры  $\Pi-i_2$  на рис. 4 не приводятся во избежание ненужного загромождения рисунков: вследствие симметрии задачи точки  $c$  пересечения  $\Pi-r_1$  и  $\Pi-r_2$  есть точки пересечения  $\Pi-r_1$  с осью ординат, а точки  $b$  (см. рис. 3) пересечения  $\Pi-r_2$  и  $\Pi-i_1$  зеркально симметричны относительно оси ординат точкам  $a$  пересечения  $\Pi-r_1$  и на рис. 4 также не приводятся. На рис. 4 точки  $a_k$  и  $c_k$  ( $k \in [1, 5]$ ) маркируют точки пересечения левой нижней ветви  $k$  — варианта семейства  $\Pi-r_1$  соответственно: с верхней ветвью  $\Pi-i_1$  и осью ординат. Ниже рассматриваются в основном слабые (совместные) решения; в некоторых случаях будет проведен краткий анализ особенностей сильных решений.

Ударным полярам в газе, не меняющем своего значения  $\gamma = 1.4$  (показанным ранее на рис. 3 с), соответствуют на рис. 4 а поляра  $\Pi-i_1$  и кривая 1 семейства поляр  $\Pi-r_1$ . Остальные кривые рис. 4 представляют УП реагирующих газов с изменением значения  $\gamma$  на фронте СУ. Заметим, что поляры, связывающие значения  $\gamma$  до и после прохождения потока через УВ, представляют две ситуации: уменьшение или рост  $\gamma$ .

Первая, с точки зрения физики процесса, чаще реализующаяся ситуация: за скачком возбуждаются дополнительные степени свободы (например, колебательные) молекул газа и значение  $\gamma$  уменьшаются (убывающие участки кривых на рис. 2). Вторая ситуация представляет область параметров перед и за фронтом скачка, располагающихся на возрастающих участках кривых рис. 2, например в диапазоне температур от  $2400$  до  $3300^\circ$  К для давления  $10^{-3}$  атм или от  $3100$  до  $4200^\circ$  К для давления 1 атм. На этих участках доминирующим является не процесс возбуждения колебательных степеней свободы молекул, а их диссоциация, вызывающая рост  $\gamma$ .

В дальнейшем для краткости изложения (чисто условно) введем для этих двух ситуаций изменения  $\gamma$  при переходе через фронт СУ терминологию: ВК-переход и Д-переход (т.е. “возбуждение колебаний” и “диссоциация”). Переход через СУ без изменения  $\gamma$  будем называть К-переходом (“классический тип”).

Рассмотрим последовательно роль  $\gamma_1$  и  $\gamma_3$  и их различных взаимных комбинаций. На рис. 4 а ( $\gamma = 1.4$ ) представлена ударно-волновая картина, в которой УП  $i_1$  является К-переходом, а все УП  $r_1$  (кривые 1–

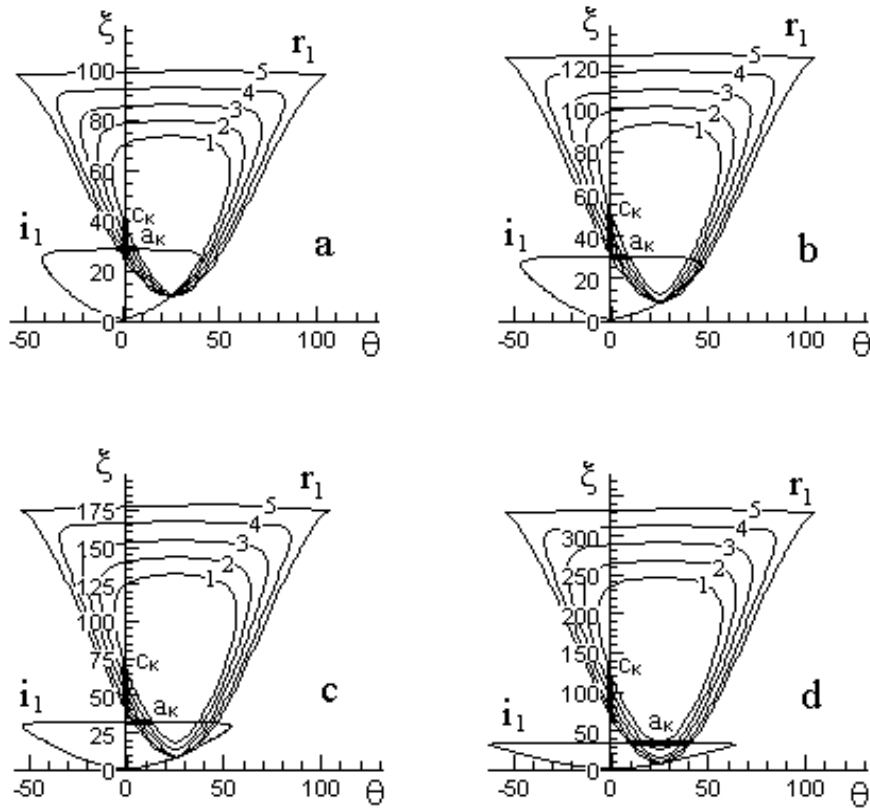


Рис. 4. Поляры падающей  $i_1$  и семейств отраженных  $r_1$  ударных волн при фиксированных значениях  $M_0 = 5$ ;  $\beta_1 = \beta_2 = 25^\circ$ ;  $\gamma_0 = 1.4$ ; вариации  $\gamma_1 = 1.4$  (рис. а); 1.3 (b); 1.2 (c); 1.1 (d) и вариации  $\gamma_3 = 1.4$  (кривые 1); 1.3 (2); 1.2 (3); 1.1 (4); 1.01 (5)

5) — переходом ВК-типа. Анализ расположения точек пересечения поляр показывает следующее. Уменьшение  $\gamma_3$  приводит к уменьшению в  $(\theta, \xi)$ -пространстве области неединственности решения (возможности существования как МО, так и РО) — точки  $a_k$  смещаются влево, а  $c_k$  — вниз при увеличении индекса  $k$ , и при  $\gamma_3 < 1.1$  становится возможным только РО. Подчеркнем, что при этом наборе параметров  $M_0, \gamma_0, \gamma_1$  нет сильных решений ВК-типа, т.е. поляр  $\Pi-i_1$  пересекает только левая ветвь  $\Pi-r_1$  и нет пересечения  $\Pi-i_1$  с правой ветвью  $\Pi-r_1$  в диапазоне  $\gamma_3 < \gamma_3^*$ , где  $\gamma_3^* \approx 1.25$ .

При  $\gamma_1 = 1.3$  (рис. 4b) СУ  $i_1$  является ВК-переходом, а переходы на СУ  $r_1$  имеют: Д-тип при  $\gamma_3 = 1.4$  (кривая 1), К-тип при  $\gamma_3 = 1.3$  (кривая 2) и Д-тип при  $\gamma_3 = 1.2; 1.1; 1.01$  (кривые 3–5). Во всем диапазоне вариации  $\gamma_3$  возможно существование как РО, так и МО. Как и в предыдущем случае (заметим, что это же имеет место и в рассматриваемых далее вариантах), уменьшение  $\gamma_3$  приводит к уменьшению в  $(\theta, \xi)$ -пространстве области неединственности решения. При этом во всем диапазоне вариации  $\gamma_3$  с фиксированными значениями остальных параметров  $\beta_1, M_0, \gamma_0, \gamma_1$  возможно как РО, так и МО. Предельный случай  $\gamma_3 = 1.01$  представляет границу режима неединственности ударно-волновой картины течения — точки  $a_5$  и  $c_5$  совпадают как между собой, так и с точкой пересечения оси ординат с  $\Pi-i_1$ .

При дальнейшем уменьшении  $\gamma_3$  до 1.2 (рис. 4c) и далее до 1.1 (рис. 4d) эта тенденция развивается: соответствующие точки  $a_k$  сдвигаются вправо, а  $c_k$  — вверх (визуально это лучше всего просматривается на точках  $a_5$  и  $c_5$  всех рис. 4 а–4d). Следовательно, вся область решений есть область неединственности с возможностью существования как РО, так и МО. Заметим, что при  $\gamma_1 = 1.2$  СУ  $i_1$  является переходом ВК-типа, а переходы СУ  $r_1$  имеют Д-, К- и ВК-типы (кривые 1–3, 4 и 5 соответственно). При  $\gamma_1 = 1.1$  СУ  $i_1$  также имеет ВК-тип, как и рассмотренные ранее, и является наиболее интенсивным из них. Переходы СУ  $r_1$  также являются Д-, К- и ВК-переходами (кривые 1–3, 4 и 5 соответственно). Следует обратить внимание на кривую 1 рис. 4d, представляющую поляр  $\Pi-r_1$  со значениями  $\gamma$  до и после фронта скачка 1.1 и 1.4, что соответствует сильному Д-переходу. Данная кривая имеет точку касания (не пересечения) с поляр  $\Pi-i_1$ . Это приводит к заключению, что дальнейшее увеличение  $\gamma_3$  (для одноатомного газа с невозбужденными электронными степенями свободы  $\gamma = 1.67$ ) делает невозможным образование волновой

структуры с МО, допуская существование только РО.

Сделаем некоторое замечание относительно решений с образованием отражения маховского типа. Число точек пересечения  $\Pi-i_1$  и  $\Pi-r_1$  для большинства представленных вариантов равно двум (слабое и сильное решение). Однако в некоторых случаях таких точек может быть четыре (слабое, сильное и еще два решения, не имеющих собственного названия). Это, например, точки пересечения поляр  $\Pi-i_1$  и некоторых вариантов  $\Pi-r_1$ : кривая 2 рис. 4а, кривые 3 и 4 рис. 4б, кривые 4 и 5 рис. 4с, кривая 5 рис. 4д. В данном случае вопрос селекции решений, как лежащий вне рамок настоящей работы, сводился к игнорированию всех решений, кроме слабых, однако представляется весьма интересным проведение их специального анализа.

Кратко обратим внимание на топологию некоторых кривых. Поляры, представляющие переходы Д-типа на СУ  $r_1$ , “отрываются” от базовой точки поляр  $\Pi-i_1$  ( $\theta = 25^\circ, \xi = 9$ ). Это кривые 1 рис. 4а, 2 и 3 рис. 4б, 3 и 4 рис. 4с, 4 и 5 рис. 4д. Поляры  $\Pi-i_1$ , представляющие К- или ВК-переходы, исходят (касаются или пересекают) из этой базовой точки. Данный вопрос подробно обсужден в [10].

Подведем итоги этого аспекта исследований. Вариация  $\gamma_1$  и  $\gamma_3$  при фиксированных значениях  $\beta_1, M_0, \gamma_0$  показывает следующее. Если в случае классической аэродинамики  $\gamma = \text{const}$  ( $= 1.4$ ) во всей области течения, возможно (см. расположение точек  $a, b, c$  на рис. 3с) существование области неединственности, где допустимы ударно-волновые структуры и маховского, и регулярного типа отражения, то уменьшение  $\gamma_1$  и  $\gamma_3$  приводит к появлению особых диапазонов их значений: для  $\gamma_0 = 1.4$  поддиапазоны ( $\gamma_1 = 1.4, \gamma_3 \leq 1.1$ ) и ( $\gamma_1 = 1.1, \gamma_3 \geq 1.4$ ) есть подобласти единственности решения, где возможно существование только регулярного отражения УВ. Говоря другими словами, в “трехмерной” области  $\{R\} = \gamma_0 \otimes \gamma_1 \otimes \gamma_3$  с физически реальным диапазоном изменения  $\gamma \in (1, 5/3]$  при фиксированных  $\beta_1$  и  $M_0$  (в данном случае  $\beta_1 = 25^\circ$  и  $M_0 = 5$ ) имеются подобласти, где невозможно образование трехскачковых структур с отражением маховского типа (рис. 1б).

**6. Неединственность решений: влияние геометрии задачи на ударно-волновую структуру ВК-типа.** Исследуем зависимость положения в многопараметрическом пространстве (22) точек бифуркации решения (маховское и/или регулярное отражение) от геометрических параметров задачи ( $\beta_1, \beta_2$ ) при использовании физической модели эффективного показателя адиабаты со скачкообразным изменением  $\gamma$  на ударно-волновых переходах (математически бесконечно тонкие фронты СУ). Описание, область применимости и основные соотношения модели приведены в [10]. Этот анализ удобно провести на задаче, допускающей адекватные сравнения с решениями задачи классической аэродинамики с неизменностью физических свойств газовой среды (постоянством показателя адиабаты  $\gamma$ ) при переходе газа через фронты СУ. Рассмотрим ударно-волновые структуры течения, возникающие при набегании сверхзвукового потока с  $M_0 = 5$  на два клина с фиксированным значением угла  $\beta_1 = 25^\circ$  и вариацией  $\beta_2 = 35^\circ, 30^\circ, 25^\circ, 20^\circ, 15^\circ$  и  $10^\circ$ . Соответствующие ударные поляры  $\Pi-i_1, \Pi-r_1$  и  $\Pi-r_2$  приведены на рис. 5а–5ф (варьируется только поляр  $\Pi-r_2$ ). Подобная задача с такой геометрией рассматривалась выше (рис. 3а–3ф).

Различие между задачами, представленными на рис. 3 и рис. 5, заключается в следующем. Ранее (рис. 3) рассматривалось течение с постоянным значением  $\gamma$  во всех зонах течения:  $\gamma_0 = \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \gamma_4 = 1.4$ . Теперь изучается течение со значениями  $\gamma_0 = 1.4; \gamma_1 = \gamma_3 = 1.3; \gamma_2 = \gamma_4 = 1.2$ , т.е. возникающие СУ предполагаются ударно-волновыми переходами ВК-типа. Такая постановка вычислительного эксперимента допускает непосредственное сравнение результатов (рис. 3а — рис. 5а и т.п.) и их совместный анализ. Заметим, что подобная задача приближенно моделирует реальные условия полета в земной атмосфере на высоте 50 км со скоростью 1.7 км/сек.

Кардинальное отличие имеет место уже при сравнении рис. 3а и рис. 5а, представляющих вариант расчета с  $\beta_2 = 35^\circ$ . Если при  $\gamma = 1.4$  поляры  $\Pi-r_1$  и  $\Pi-r_2$  не пересекались, что означало единственность решения при  $\beta_2 = 35^\circ$  (невозможно РО, возможно только МО), то при учете реальных процессов это значение  $\beta_2$  лежит в параметрическом диапазоне неединственности решений с возможностью существования как МО, так и РО. Обратим внимание также на число точек пересечения поляр ( $\Pi-r_1 \times \Pi-i_1$ ) и ( $\Pi-r_2 \times \Pi-i_2$ ). Напомним, что в случае  $\gamma_1 = \gamma_2$  поляры  $\Pi-i_1$  и  $\Pi-i_2$  совпадают, и на всех рис. 5 поляр  $\Pi-i_2$  не маркируется. На рис. 5а поляр  $\Pi-i_1$  пересекается поляр  $\Pi-r_1$  в четырех, а поляр  $\Pi-i_2$  поляр  $\Pi-r_2$  — всего в двух точках; в классическом случае точек пересечения всегда три (см. рис. 3) и одна из них является точкой касания.

Далее, если значение  $\beta_2 = 30^\circ$  в модели  $\gamma = \text{const}$  (рис. 3б) есть верхняя точка бифуркации решения  $\beta_2^{**}$  (условие (15)), т.е. это значение  $\beta_2$  является границей области неединственности, за которой при  $\beta_2 > \beta_2^{**}$  (условие (16)) невозможно РО, то теперь, при таких  $\gamma_i$ , для этого значения  $\beta_2$  уже могут иметь место картины развитых волновых структур как МО-, так и РО-типа.

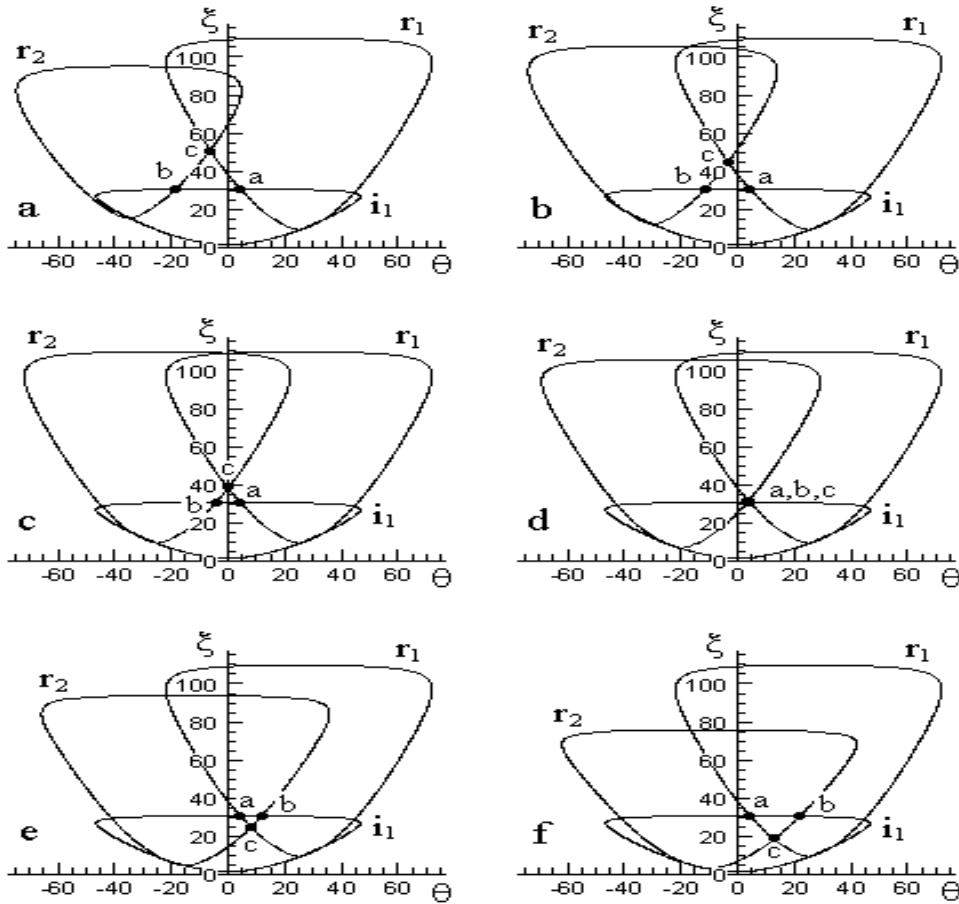


Рис. 5. Поляры падающей  $i_1$  и двух отраженных  $r_1$  и  $r_2$  ударных волн при фиксированных значениях  $M_0 = 5$ ;  $\gamma_0 = 1.4$ ;  $\gamma_1 = \gamma_3 = 1.3$ ;  $\gamma_2 = \gamma_4 = 1.2$ ;  $\beta_1 = 25^\circ$  и вариации  $\beta_2 = 35^\circ$  (рис. а),  $30^\circ$  (б),  $25^\circ$  (с),  $20^\circ$  (д),  $15^\circ$  (е),  $10^\circ$  (ф)

Для симметричной картины течения с  $\beta_1 = \beta_2 = 25^\circ$  (рис. 3 с и рис. 5 с) обе модели допускают существование и РО, и МО.

В модели реального газа  $\gamma_1 \neq \gamma_0$  значение  $\beta_2 = 20^\circ$  есть нижняя точка бифуркации решения  $\beta_2^*$  (18), т.е. это граница области неединственности, за которой при  $\beta_2 > \beta_2^*$  возможно только РО и невозможно МО: на рис. 5 d точки пересечения поляр  $a, b, c$  совпадают. В классической модели (рис. 3 d) нижняя точка бифуркации имеет значение  $\beta_2^* = 17^\circ$  и при  $\beta_2 = 20^\circ$  возможны как РО, так и МО.

При дальнейшем уменьшении  $\beta_2$  до  $15^\circ$  (рис. 3 е и рис. 5 е) и далее до  $10^\circ$  (рис. 3 ф и рис. 5 ф) становится возможным только РО как в классической модели, так и в модели реального газа. Разумеется, значения газодинамических параметров, полученных при использовании этих моделей (отношение давлений  $\xi$  и отклонение потоков на  $SU$ ), существенно различны.

Таким образом, учет реальных свойств газа приводит к изменению положения в параметрическом пространстве положения нижней  $\beta_2^*$  (18) и верхней  $\beta_2^{**}$  (15) точек бифуркации, ограничивающих область неединственности решения (20) от областей существования только единственного решения. При этом область неединственности смещается по параметру  $\beta_2$  от диапазона  $(17^\circ, 30^\circ)$  в классическом случае к диапазону  $(20^\circ, 38^\circ)$  в модели изменяющегося эффективного показателя адиабаты.

**7. Методология демаркации области ударно-волновых структур и определения границ двойного решения в реальных задачах.** В прикладных задачах аэродинамики о движении какого-либо объекта в земной атмосфере, в рассматриваемой работе — задача о течении в воздухозаборнике ГПВРД, как правило, задаются следующие основные параметры: геометрия входа (углы  $\beta_1$  и  $\beta_2$  на рис. 1), высота  $H$  и скорость  $V$  полета. При этом непосредственно неизвестны ни значение числа Маха  $M_0$ , ни значения эффективного показателя адиабаты не только в области возмущенного течения, но и в зоне набегающего невозмущенного потока, которые определяют всю ударно-волновую картину. В некотором

аспекте это является положительным фактором, поскольку список определяющих параметров (22) не только существенно укорачивается:

$$F_c = (\beta_1, \beta_2, H, V), \quad (24)$$

но и его компоненты имеют более “прозрачный” смысл, не допускающий неоднозначной трактовки — геометрические углы, отклоняющие поток, высота и скорость полета гиперзвукового летательного аппарата.

В комплексе программ, обеспечивающей решение рассматриваемой задачи, используется следующая схема проведения расчета. Предусмотрен специализированный режим запуска прикладной задачи с вводом параметров  $H$  и  $V$ , дополняющий исследовательский режим с возможностью непосредственного ввода  $M_0$  и  $\gamma_i$ , где  $i$  — номер зоны течения ( $i = 0, 1, 2, 3, 4$ ). На первом этапе вычислительного конвейера по значению  $H$  база данных программного комплекса определяет по [8] все значения газодинамических параметров в зоне 0 невозмущенного потока (давление  $p_0$ , температуру  $T_0$ , показатель адиабаты  $\gamma_0$ , скорость звука  $a_0$ ). По этим значениям и значению входного параметра  $V$  определяется  $M_0$ . Далее решение переходит на второй, существенно более сложный этап вычисления ударной поляры  $\Pi-i_1$ . Этот этап является итерационным, с априори неизвестным необходимым числом итераций. На первой итерации как начальное приближение полагается  $\gamma_1^0 = \gamma_0$  и по списку параметров  $M_0, \gamma_0, \gamma_1$  приводится расчет поляры (1) со значением итерационного индекса  $n = 1$ :

$$f_1^n(\theta, \xi, M_0, \gamma_0, \gamma_1^{n-1}) = 0. \quad (25)$$

По значению угла  $\beta_1$  и условию отклонения потока вдоль поверхности клина

$$\theta_1 = \beta_1 \quad (26)$$

на поляре (25) определяется точка  $(\theta_1, \xi_1)$ , где

$$\xi_1^n = \xi_1^n(\theta, M_0, \gamma_0, \gamma_1^{n-1}). \quad (27)$$

Поскольку поляра в области своего определения является двузначной зависимостью (5), таких точек, как правило, две: с ординатами  $\xi_{1,w}^n$  и  $\xi_{1,s}^n$  (эти точки совпадают только при  $\theta = \theta_{\min}$  или  $\theta = \theta_{\max}$ ). Из них выбирается слабое решение:

$$\xi_{1,w}^n \leq \xi_{1,s}^n, \quad \xi_1^n = \xi_{1,w}^n. \quad (28)$$

По значениям  $\theta_1, \xi_1^n, T_0, p_0$  вычисляются размерные значения температуры и давления за фронтом СУ  $i_1$  (в зоне 1):

$$T_1^n = T_1^n(\theta_1, \xi_1^n, T_0, p_0, \gamma_0, \gamma_1^{n-1}), \quad p_1^n = p_1^n(\theta_1, \xi_1^n, T_0, p_0, \gamma_0, \gamma_1^{n-1}). \quad (29)$$

Конкретный вид (29) приведен в [10].

Это позволяет вычислить новое значение эффективного показателя адиабаты (см. [7, 9]):

$$\gamma_1^n = \gamma_1^n(p_1^n, T_1^n) \quad (30)$$

и перейти на новый  $(n + 1)$ -й итерационный слой в (25). Итерационная процедура (25) – (30) повторяется до установления самосогласованного решения во всех точках ударной поляры (24):

$$\|f_1^N - f_1^{N-1}\| < \varepsilon. \quad (31)$$

Вычислительные эксперименты, проведенные в широком диапазоне определяющих параметров, показали практически безотказную работу итерационного алгоритма (25) – (31) с минимальным ( $N < 7$  при  $\varepsilon = 10^{-3}$ ) числом требуемых итераций.

Аналогичную конструкцию имеет и третий этап вычислительного комплекса, обеспечивающий расчет параметров в зоне 2. При этом необходимо изменение расчетного шага (26) на

$$\theta_2 = \beta_2 \quad (32)$$

и всех нижних индексов “1” в (25–31) на индекс “2”.

Более сложным является четвертый этап определения положения СУ  $r_1$  и параметров за ним в зоне 3 при отражении маховского типа. Алгоритм этого этапа принципиально аналогичен итерационному алгоритму (25) – (31) второго этапа. Поскольку параметры течения в зоне 1 уже известны, то, полагая

на первой итерации как начальное приближение  $\gamma_3^0 = \gamma_1$ , можно провести расчет поляры (1)  $\Pi-r_1$  со значением итерационного индекса  $n = 1$ :

$$f_3^n(\theta, \xi, M_1, \gamma_1, \gamma_3^{n-1}) = 0. \tag{33}$$

После этого отыскиваются все точки пересечения поляр  $\Pi-r_1$  и  $\Pi-i_1$ :

$$(\theta_{3,k}^n, \xi_{3,k}^n) = \{(\Pi - r_1) \times (\Pi - i_1)\}_k, \quad k = 1, 2, \dots, K. \tag{34}$$

Число  $K$  точек пересечения, в зависимости от параметров задачи, может варьироваться от 1 до 4, включая точку “опоры” поляры  $\Pi-r_1$  на  $\Pi-i_1$  (см. п. 2). Из них выбирается слабое решение — точка  $(\theta_3^n, \xi_3^n)$  пересечения левой ветви  $\Pi-r_1$  с верхней ветвью  $\Pi-i_1$ :

$$\theta_3^n = \min \{\theta_{3,k}^n\}, \quad k = 1, 2, \dots, K. \tag{35}$$

Затем, вследствие двузначности поляры, выбирается

$$\xi_3^n = \max \{\xi_{3,1}^n(\theta_3^n), \xi_{3,2}^n(\theta_3^n)\}. \tag{36}$$

По известным значениям размерных параметров в зоне 1 вычисляются размерные значения температуры и давления за фронтом  $СУ r_1$  в зоне 3:

$$T_3^n = T_3^n(\theta_3^n, \xi_3^n, T_1, p_1, \gamma_1, \gamma_3^{n-1}), \quad p_3^n = p_3^n(\theta_3^n, \xi_3^n, T_1, p_1, \gamma_1, \gamma_3^{n-1}). \tag{37}$$

Конкретный вид (37) приведен в [10]. Это позволяет вычислить новое значение эффективного показателя адиабаты

$$\gamma_3^n = \gamma_3^n(p_1^n, T_1^n) \tag{38}$$

и перейти на следующую итерацию алгоритма (33)–(38). Итерационная процедура повторяется до установления самосогласованного решения — конфигурации ударной поляры (33):

$$\|f_3^N - f_3^{N-1}\| < \varepsilon. \tag{39}$$

Алгоритм (33)–(39) также обеспечивает высокую скорость сходимости решения ( $N < 7$  при  $\varepsilon = 10^{-3}$ ) практически во всем диапазоне определяющих параметров.

Аналогичную конструкцию имеет пятый этап вычислительного конвейера программного комплекса, обеспечивающий расчет параметров в зоне 4 для маховского типа отражения  $СУ$ . При этом в алгоритме (33)–(39) изменяются нижние индексы: “1” на “2” и “3” на “4”. Кроме того, в качестве нужной точки пересечения выбирается точка пересечения правой ветви поляры  $\Pi-r_2$  с верхней ветвью поляры  $\Pi-i_2$ , т.е. шаг алгоритма (35) заменяется на операцию

$$\theta_4^n = \max \{\theta_{4,k}^n\}, \quad k = 1, 2, \dots, K. \tag{40}$$

Заметим, что вторая и третья, четвертая и пятая ступени программного конвейера являются парно независимыми друг от друга и могут быть выполнены параллельно на двухпроцессорных ПК или кластере мультипроцессорной системы. Это позволяет существенно снизить астрономическое время решения задачи, что особенно сказывается при проведении циклов расчетов с подробной мелкошаговой вариацией параметров, например высоты и скорости полета, двух углов конфигурации входа в воздухозаборник и т.п. Такие типы параллелизации задачи (по глобальным входным параметрам и внутренней структуре вычислительного алгоритма) рассматривались в работах [16, 17], а также монографии [18].

Шестой этап программного комплекса обеспечивает расчет положения  $СУ r_1$  и  $СУ r_2$  и параметров за ними в зонах 3 и 4 при отражении регулярного типа. В отличие от четвертого и пятого этапов, которые являются вычислительно независимыми, поскольку в случае маховского отражения зоны 3 и 4 разделены зонами 5 и 6 (в случае  $МО СУ r_1$  и  $r_2$  не пересекаются), данный этап требует совместного расчета соотношений Гюгонио на двух ударных волнах, так как зоны течения 3 и 4 прилегают друг к другу (в случае  $РО СУ r_1$  и  $r_2$  выходят из одной точки) и разделены лишь границей контактного разрыва. Это существенно усложняет алгоритм шестой ступени вычислительного конвейера по сравнению с предыдущими. Используется следующая итерационная методика. Поскольку параметры в зонах 1 и 2 уже известны, то, полагая на первой итерации как начальное приближение

$$\gamma_3^0 = \gamma_1, \quad \gamma_4^0 = \gamma_2, \tag{41}$$

можно провести расчет поляр (1)  $\Pi-r_1$  и  $\Pi-r_2$  со значением итерационного индекса  $n - 1$  на общей плоскости  $\theta, \xi$ :

$$f_3^n(\theta, \xi, M_1, \gamma_1, \gamma_3^{n-1}) = 0, \quad f_4^n(\theta, \xi, M_2, \gamma_2, \gamma_4^{n-1}) = 0. \quad (42)$$

По конфигурации поляр (42) отыскиваются все точки их пересечения:

$$(\theta_{34,k}^n, \xi_{34,k}^n) = \{(\Pi - r_1) \times (\Pi - r_2)\}_k, \quad k = 1, K. \quad (43)$$

Число  $K$  точек пересечения, в зависимости от параметров задачи, может быть равно 0 (нет пересечения), 1 (касание) или 2. Первый случай требует дополнительной проверки и будет особо рассмотрен ниже. Случай  $K = 1$  безальтернативен, а в общем случае выбирается слабое решение — точка с ординатой

$$\xi_{34}^n = \min \{\xi_{34,1}^n, \xi_{34,2}^n\} \quad (44)$$

и соответствующей ей абсциссой (6)

$$\theta_{34}^n = \theta_{34}^n(\xi_{34}^n). \quad (45)$$

По известным значениям размерных параметров в зонах 0, 1, 2 и вычисленным в (44)–(45) относительному давлению  $\xi_{34}^n$  и углу отклонения потока  $\theta_{34}^n$  можно определить размерные значения температуры и давления за фронтами СУ  $\Pi-r_1$  и  $\Pi-r_2$  (заметим, что давление в зонах 3 и 4 одинаково):

$$\begin{aligned} p_3^n &= p_3^n(\theta_{34}^n, \xi_{34}^n, T_1, p_1, \gamma_1, \gamma_3^{n-1}), & p_4^n &= p_3^n, \\ T_3^n &= T_3^n(\theta_{34}^n, \xi_{34}^n, T_1, p_1, \gamma_1, \gamma_3^{n-1}), & T_4^n &= T_4^n(\theta_{34}^n, \xi_{34}^n, T_2, p_2, \gamma_2, \gamma_4^{n-1}). \end{aligned} \quad (46)$$

Конкретный вид (46) см. в [10].

Далее определяются новые значения эффективных показателей адиабаты:

$$\gamma_3^n = \gamma_3^n(p_3^n, T_3^n), \quad \gamma_4^n = \gamma_4^n(p_4^n, T_4^n) \quad (47)$$

с которыми осуществляется переход на следующий  $(n + 1)$ -й итерационный шаг алгоритма (41)–(47). Так же, как и для ранее описанных алгоритмов, итерационная процедура повторяется до установления самосогласованного решения — конфигурации ударных поляр (42):

$$\|f_3^N - f_3^{N-1}\| < \varepsilon, \quad \|f_4^N - f_4^{N-1}\| < \varepsilon. \quad (48)$$

Алгоритм (41)–(48) также обеспечивает быструю сходимость решения ( $N < 10$  при  $\varepsilon = 10^{-3}$ ) в широком диапазоне определяющих параметров.

Однако следует иметь в виду, что в окрестности верхней (по (15)) точки бифуркации решения при недостаточном осторожном применении алгоритма (41)–(48) возможна потеря точки пересечения. Эту проблему следует обсудить более подробно. Допустим, окончательные конфигурации поляр  $\Pi-r_1$  и  $\Pi-r_2$  (априори пока неизвестные) таковы, что имеется всего одна точка их пересечения — точка касания. Поскольку топология поляр достаточно заметно зависит от  $\gamma_3$  и  $\gamma_4$ , то выбор начального приближения (41) может привести к тому, что на первой итерации поляры (42) будут непересекающимися кривыми. В стандартном режиме расчета это приведет к остановке алгоритма (41)–(48) и выдаче сообщения, что “регулярное отражение ударных волн невозможно”. Поэтому для такой ситуации предусмотрен более надежный, но и существенно более затратный по вычислительным ресурсам режим. Главный контрапункт этого режима заключается в следующем. Начальное приближение (41) “сканируется” в области своего изменения (23), т.е. проводится цикл расчетов с различными начальными приближениями

$$\gamma_{3,k}^0 = \text{variation}(1, 5/3, \delta_3), \quad k = 1, 2, \dots, K_3, \quad (49)$$

$$\gamma_{4,k}^0 = \text{variation}(1, 5/3, \delta_4), \quad k = 1, 2, \dots, K_4, \quad (50)$$

где символическая запись (49)–(50) означает, что производится перебор всех возможных значений эффективного показателя адиабаты в качестве начального приближения с интервалами  $\delta_3$  и  $\delta_4$ . Эти значения, естественно, определяют число вариантов перебора  $K_3$  и  $K_4$ . Применение алгоритма (41)–(50) с общим числом исполнения  $K_3 \times K_4$  при достаточно малых  $\delta_3$  и  $\delta_4$  обеспечивает надежный поиск точек пересечения поляр даже в параметрической области бифуркации решения (касания поляр). Заметим, что этот алгоритм приводит к получению одного и того же решения при различных начальных приближениях (49)–(50), т.е. аттракторы алгоритма имеют широкий бассейн притяжения; странных аттракторов

в многочисленных вычислительных экспериментах обнаружено не было (несмотря на все усилия), хотя утверждать, что алгоритм (41) – (50) их не имеет, было бы неоправданным оптимизмом.

Заключительная, восьмая стадия вычислительного конвейера заключается в совместном анализе полученных решений, т.е. анализе координат точек пересечения поляр  $\Pi-i_1$ ,  $\Pi-i_2$ ,  $\Pi-r_1$  и  $\Pi-r_2$  в случае маховского и регулярного типа отражений.

На основании описанной выше методологии делается вывод о том, какому диапазону решений (20) соответствует задача с данным набором параметров (24).

**8. Неединственность решений: влияние высоты и скорости полета.** Рассмотрим ударно-волновые структуры, возникающие в регулируемом (изменяемые углы  $\beta_1$  и  $\beta_2$ ) воздухозаборнике ГПВРД при различных значениях высоты  $H$  и скорости  $V$  полета. Применим описанную выше методологию для определения границ области неединственности, где возможны и маховское, и регулярное отражение скачков уплотнения. В параметрическом пространстве (24) определим положение нижней и верхней (20) бифуркационных точек

$$\beta_2^* = \beta_2^*(\beta_1, H, V), \tag{51}$$

$$\beta_2^{**} = \beta_2^{**}(\beta_1, H, V). \tag{52}$$

На рис. 6–7 приводятся поляры падающих ( $i_1$  и  $i_2$ ) и отраженных ( $r_1$  и  $r_2$ ) УВ. В области двойного решения применяются следующие обозначения поляр: для регулярного отражения — ( $r_{1R}$  и  $r_{2R}$ ), для маховского отражения — ( $r_{1M}$  и  $r_{2M}$ ). Значения параметров следующие:  $\beta_1 = 25^\circ$  (для всех этих рисунков),  $V = 2$  км/сек (все рис. 6),  $V = 4$  км/сек (все рис. 7),  $H = 30$  км (левые колонки рисунков — рис. 6 а, с, е и рис. 7 а, с, е),  $H = 50$  км (правые колонки рисунков — рис. 6 б, d, f и рис. 7 б, d, f).

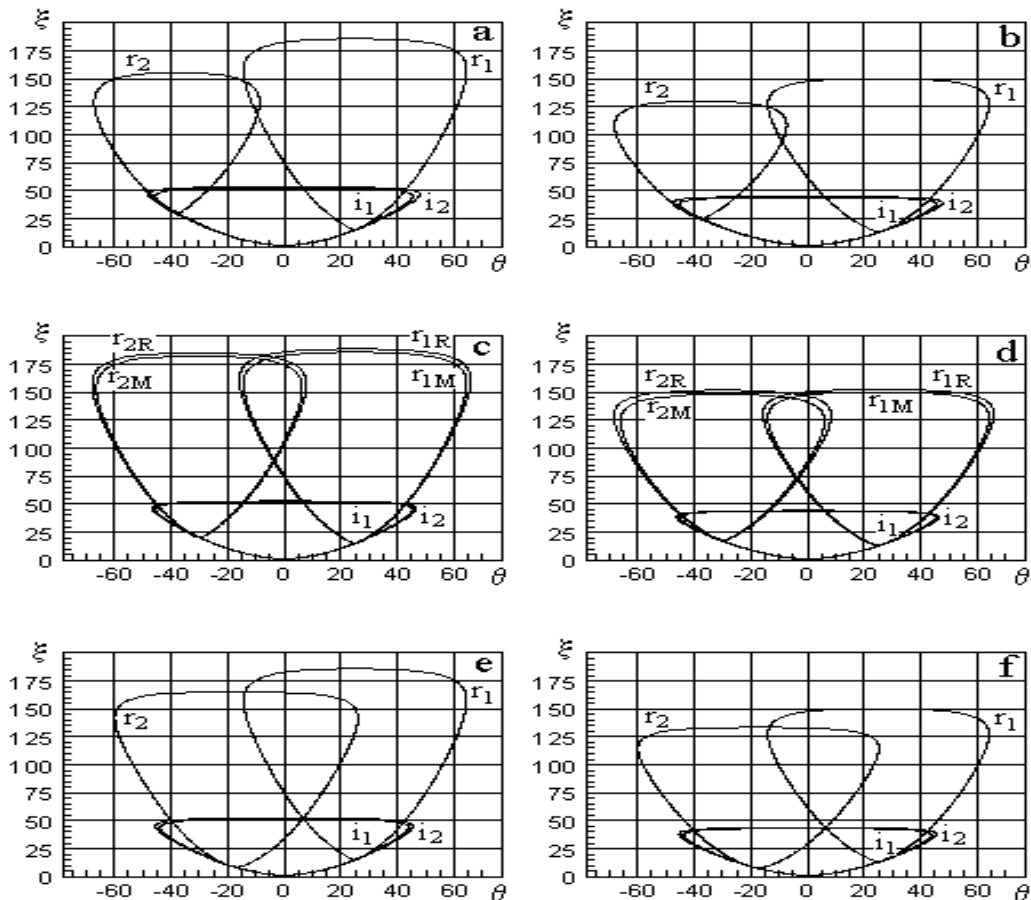


Рис. 6. Поляры падающих  $i_1$  и  $i_2$  и отраженных  $r_1$  и  $r_2$  ударных волн при полете в земной атмосфере со скоростью 2 км/сек на высоте 30 км (рис. а, с, е) и 50 км (рис. б, d, f) при фиксированном  $\beta_1 = 25^\circ$  и вариации  $\beta_2 = 37.9^\circ$  (рис. а),  $37.7^\circ$  (b),  $30^\circ$  (с, d),  $16.9^\circ$  (е),  $17.3^\circ$  (f). На рис. с и d показаны варианты поляр при маховском ( $r_{1M}$  и  $r_{2M}$ ) и регулярном ( $r_{1R}$  и  $r_{2R}$ ) отражении



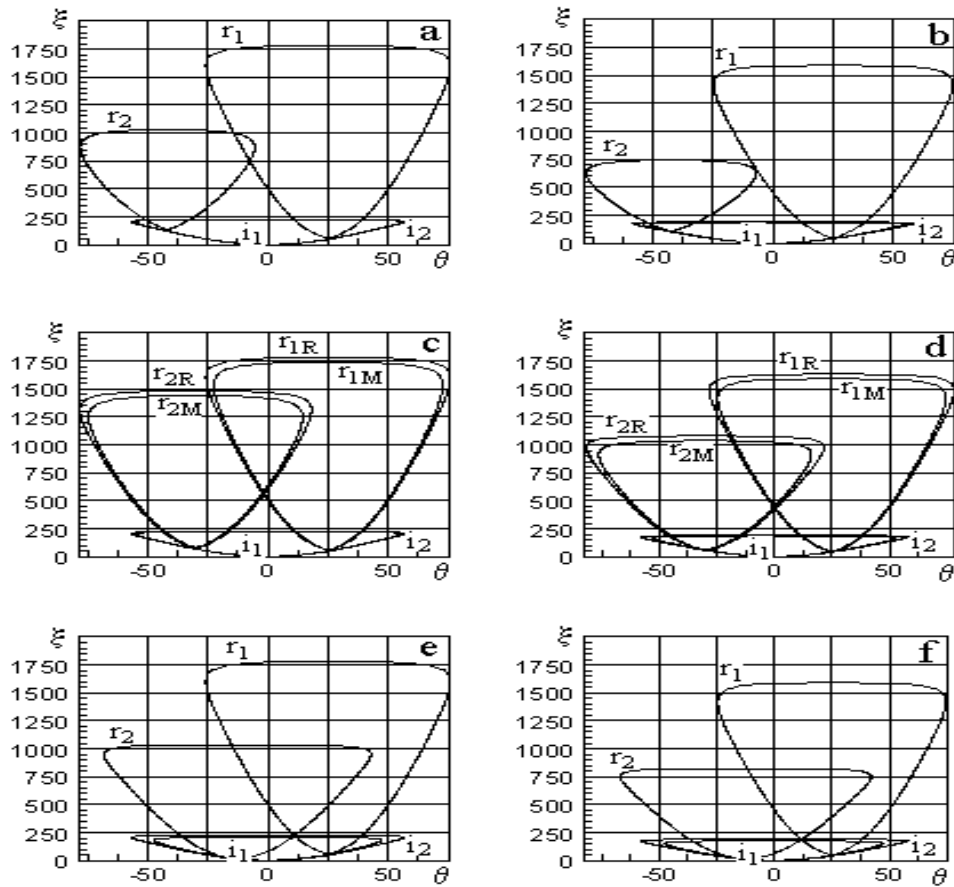


Рис. 7. Поляры падающих  $i_1$  и  $i_2$  и отраженных  $r_1$  и  $r_2$  ударных волн при полете в земной атмосфере со скоростью 4 км/сек на высоте 30 км (рис. а, с, е) и 50 км (рис. б, д, ф) при фиксированном  $\beta_1 = 25^\circ$  и вариации  $\beta_2 = 41.7^\circ$  (рис. а),  $42.2^\circ$  (б),  $30^\circ$  (с, д),  $12.6^\circ$  (е),  $12.3^\circ$  (ф). На рис. с и д показаны варианты поляр при маховском ( $r_{1M}$  и  $r_{2M}$ ) и регулярном ( $r_{1R}$  и  $r_{2R}$ ) отражении

В результате работы программного комплекса определены значения:

$$\begin{aligned} \beta_2^* &= (25, 30, 2) = 16.9; & \beta_2^{**} &= (25, 30, 2) = 37.9; \\ \beta_2^* &= (25, 50, 2) = 17.3; & \beta_2^{**} &= (25, 50, 2) = 37.7; \\ \beta_2^* &= (25, 30, 4) = 12.6; & \beta_2^{**} &= (25, 30, 4) = 41.7; \\ \beta_2^* &= (25, 50, 4) = 12.3; & \beta_2^{**} &= (25, 50, 4) = 42.2. \end{aligned}$$

Обратим внимание на немонотонную зависимость  $\beta_2^*$  и  $\beta_2^{**}$  от  $H$  и  $V$  в общем смысле. Так, при  $V = 2$  имеет место  $\beta_2^*(30^\circ) < \beta_2^*(50^\circ)$ , и  $\beta_2^{**}(30^\circ) > \beta_2^{**}(50^\circ)$ , а при  $V = 4$  уже  $\beta_2^*(30^\circ) > \beta_2^*(50^\circ)$  и  $\beta_2^{**}(30^\circ) < \beta_2^{**}(50^\circ)$ . Говоря другими словами, в первом случае с увеличением высоты полета область неединственности решения уменьшается, а во втором — увеличивается. Однако при фиксированной высоте полета как для  $H = 30$ , так и для  $H = 50$  область неединственности решения монотонно увеличивается с увеличением скорости полета (в данном диапазоне  $H$  и  $V$ ). Это связано как с резким падением давления с ростом высоты, так и с немонотонной зависимостью температуры от высоты в земной атмосфере.

Верхние рис. 6 а, б и 7 а, б представляют расчеты с  $\beta_2 = \beta_2^{**}$  и показывают граничную ситуацию перехода области единственности (возможно только МО) в область двойного решения. Поляры  $r_1$  и  $r_2$  касаются (рис. 7 б) или почти касаются (рис. 6 а, б и 7 а), поскольку расчет проводился с точностью только  $0.1^\circ$ , а для хорошей визуализации касания точность должна быть не менее  $0.01^\circ$ . Нижние рис. 6 е, ф и 7 е, ф представляют расчеты с  $\beta_2 = \beta_2^*$  и показывают граничную ситуацию (поляры  $\Pi-i_1$ ,  $\Pi-i_2$ ,  $\Pi-r_1$ ,  $\Pi-r_2$  пересекаются в одной точке) перехода области единственности (возможно только РО) в область двойного решения. Средние рис. 6 с, д и 7 с, д представляют расчеты с  $\beta_2^* < \beta_2 < \beta_2^{**}$  (конкретные значения  $\beta_2$

особого значения не имеют; в данном случае  $\beta_2 = 30^\circ$  для всех рисунков) и показывают ситуацию в области двойного решения, когда возможны и МО (поляры  $r_{1M}$  и  $r_{2M}$ ), и РО (поляры  $r_{1R}$  и  $r_{2R}$ ).

Интересно сравнить значения термодинамических параметров в различных зонах течения. В таблице приводятся значения эффективного показателя адиабаты  $\gamma$ , давление  $p$  в атмосферах и температура  $T$  в градусах Кельвина для иллюстрируемых на рис. 6е, f и рис. 7е, f задач с  $\beta_2 = \beta_2^*$ , т. е. в нижней точке бифуркации решения.

Вариант ( $H, V$ )	$\gamma, p, T$ в зоне $N$				
	0	1	2	3	4
1. (30,2)	1.401	1.350	1.397	1.318	1.327
	$0.118 \cdot 10^{-1}$	0.178	0.097	0.615	0.615
	226	837	540	1268	1134
2. (50,2)	1.401	1.344	1.375	1.313	1.320
	$0.788 \cdot 10^{-3}$	0.010	0.006	0.034	0.034
	271	900	611	1344	1227
3. (30,4)	1.401	1.190	1.347	1.207	1.192
	$0.118 \cdot 10^{-1}$	0.589	0.186	2.653	2.653
	226	2720	866	3629	3243
4. (50,4)	1.401	1.172	1.344	1.221	1.202
	$0.788 \cdot 10^{-3}$	0.033	0.010	0.149	0.149
	271	2830	901	3542	3353

Напомним, что фронты падающих УВ  $i_1$  и  $i_2$  разграничивают зоны 0–1 и 0–2, а фронты отраженных УВ  $r_1$  и  $r_2$  — соответственно зоны 1–3 и 2–4. Кратко проанализируем изменения  $\gamma, p$  и  $T$  при переходе через эти фронты.

**УВ  $i_1$ .** Этот СУ является переходом ВК-типа для всех рассматриваемых сочетаний высот и скоростей полета. Значение  $\gamma$  уменьшается, и уменьшение является весьма существенным при  $H = 50$  км и  $V = 4$  км/сек — от 1.401 до 1.172. Это связано с тем, что значение  $T$  возрастает от  $226^\circ$  К по  $2830^\circ$  К, при котором весьма интенсивен процесс возбуждения молекул кислорода. В случае же  $H = 30$  км и  $V = 2$  км/сек температура на этом СУ возрастает всего до  $837^\circ$  К, колебательные степени свободы  $O_2$  активированы еще незначительно и  $\gamma$  уменьшается лишь до 1.350.

**УВ  $i_2$ .** Этот СУ также является переходом ВК-типа для всех представленных вариантов, но значительно более слабым, чем СУ  $i_1$ , поскольку температура возрастает не так существенно и “не дотягивает” до области интенсивного возбуждения колебаний в молекулах газовой среды.

**УВ  $r_1$ .** Этот ударный переход может быть как переходом ВК-типа (варианты 1 и 2), так и переходом Д-типа (варианты 3 и 4). Определяющим фактором является скорость полета, доминирующая над варьируемыми значениями других параметров. Для вариантов 1 и 2 ( $V = 2$  км/сек) рост  $T$  на СУ  $r_1$  таков, что температура за его фронтом относительно невысока, около  $1300^\circ$  К, и лежит в области начала возбуждения интенсивных колебаний атомов в молекуле  $O_2$ . Для вариантов 3 и 4 конечная температура имеет значение около  $3600^\circ$  К, и здесь преобладают уже процессы диссоциации молекул  $O_2$  при еще недостаточно заметной активации колебаний атомов в молекулах азота  $N_2$ . Интегрированным результатом этих процессов является рост значения  $\gamma$  от 1.190 до 1.207 (для  $H = 30$  км) и от 1.172 до 1.221 (для  $H = 50$  км). Заметим, что интенсивность этого отраженного скачка существенно меньше, чем падающего СУ  $i_1$ : отношение давлений за и перед фронтом СУ  $r_1$  около 3–4, в зависимости от варианта задачи, тогда как на фронте СУ  $i_1$  оно лежит в пределах от 15 до 50.

**УВ  $r_2$ .** Этот СУ является переходом только ВК-типа для всех вариантов значений  $H$  и  $V$ . Перед его фронтом температура относительно невысока, от  $540^\circ$  К до  $901^\circ$  К, и, соответственно, температура за фронтом попадает в температурный диапазон возбуждения колебаний в молекулах  $O_2$ . При скоростях полета  $V = 2$  км/сек этот процесс значительно слабее (значение  $T$  около  $1200^\circ$  К и  $\gamma$  уменьшается лишь до значений 1.32), а при  $V = 4$  км/сек колебательные степени свободы  $O_2$  существенно возбуждены (температура около  $3300^\circ$  К, и значение  $\gamma$  существенно снижается до 1.192 при высоте 30 км и до 1.202 при высоте 50 км).

Заметим, что поскольку анализируется точка бифуркации  $\beta_2 = \beta_2^*$ , то давления в зонах течения 3 и 4 одинаковы, как и в случае маховского, так и регулярного отражения (для РО это справедливо во всем диапазоне его существования). В области неединственности решения поляры отраженных УВ маховского и регулярного типов не совпадают. Происходит расщепление поляр УВ  $r_1$  и  $r_2$  на поляры  $r_{1M} - r_{1R}$  и

$r_{2M} - r_{2R}$  (рис. 6 с, d и рис. 7 с, d), что приводит и к дуализму значений давления в этих зонах:  $p_{3M} \neq p_{3R}$ ,  $p_{4M} \neq p_{4R}$ . Заметим, что, естественно, выполняется  $p_{3R} = p_{4R}$ , но  $p_{3M} = p_{4M}$  только в случае симметричности течения при  $\beta_1 = \beta_2$ .

Расщепление поляр связано с тем, что конфигурация любой поляры (см. (1)) параметрически зависит от показателя адиабаты  $\gamma_+$  за фронтом СУ, который, в свою очередь, зависит от давления  $p_+$  за фронтом СУ, или, говоря другими словами, от значения  $\xi_+$ , т.е. некоторой точки, принадлежащей этой же поляре (1). Далее, в свою очередь,  $\xi_+$  зависит (см. (5)) от угла разворота потока  $\theta_+$  за фронтом СУ.

Таким образом,  $\gamma_+$  определяется точкой  $(\xi_+, \theta_+)$  в пространстве (2), а положение этой точки различно в случае РО или МО. Для МО точка  $(\xi_+, \theta_+)$  есть точка пересечения поляр  $\Pi-i_1$  и  $\Pi-r_1$  (точки  $a$  на рис. 3–5), а для РО — точка пересечения поляр  $\Pi-r_1$  и  $\Pi-r_2$  (точки  $c$  на рис. 3–5). В точке бифуркации решения  $\beta_2 = \beta_2^*$  точки  $a$  и  $c$  совпадают (заметим, в скобках, что несмотря на сходную лингвистическую терминологию, не следует путать точки в пространстве (24) от точек в пространстве (2)). Соответственно совпадают и поляры  $r_{1M}$  и  $r_{1R}$ . При увеличении  $\beta_2$  от  $\beta_2^*$  к  $\beta_2^{**}$  расстояние между точками  $a$  и  $c$  в (2) увеличивается, соответственно, увеличивается и степень расщепления поляры  $r$  на  $r_M$  и  $r_R$ . Вследствие большого “размаха” поляр  $\Pi-i$  и  $\Pi-r$  визуально это расщепление не слишком заметно (см. рис. 6 с, d и рис. 7 с, d) и для задач с данными значениями параметров  $H$  и  $V$  отклонение поляр  $\Pi-r_M$  и  $\Pi-r_R$  друг от друга не превосходит 2%.

В диапазоне  $\beta_2 < \beta_2^{**}$  расщепления поляр нет, поскольку  $\Pi-r_R$  не может существовать (поляры  $\Pi-r_1$  и  $\Pi-r_2$  не пересекаются).

Аналогично и поляры падающих волн  $\Pi-i_1$  и  $\Pi-i_2$  также различны. В отличие от модельных задач, где в (1) равны все параметры ( $M_-$ ,  $\gamma_-$  и  $\gamma_+$ ) потока, набегающего на верхний и нижний углы входа в воздухозаборник (см. рис. 1), и, соответственно, поляры для них совпадают, для реальных задач полета в атмосфере ситуация несколько иная. Параметры ( $M_-$  и  $\gamma_-$ ) набегающего потока, естественно, одинаковы для верхнего и нижнего углов, однако значения эффективного показателя адиабаты  $\gamma_+$  за фронтом сходящего с вершин углов скачка уплотнения различны и определяются конкретными значениями углов  $\beta_1$  и  $\beta_2$ , а также  $H$  и  $V$ . Эти параметры определяют значения температуры  $T_+$  и  $p_+$  за фронтом СУ, которые, в свою очередь, и определяют  $\gamma_+$ . Итерационный алгоритм расчета ударных поляр описан выше, а используемые конкретные формулы приведены в [10]. Заметим, что “вложенность” поляр  $\Pi-i_1$  и  $\Pi-i_2$  (какая из них является внешней, а какая — внутренней) зависит не только от соотношения  $\beta_1$  и  $\beta_2$ , но и соотношения значений всех параметров определяющего списка (24). Их конкретные сочетания определяют тип возникающей ударной волны: ВК-, Д- или К-тип (см. п. 5 данной работы), соответствующий уменьшению или увеличению  $\lambda$  при переходе потока через фронт СУ.

В приводимых на рис. 6–7 полярах  $\Pi-i_1$  “вложена” в  $\Pi-i_2$ , но их отклонение не слишком велико (до 4%) и визуально плохо просматривается. Однако для задачи в целом эта разница имеет существенное значение, поскольку вниз по потоку отличия накапливаются, и в зонах течения 3 и 4 отличия, например, в значениях  $T$  достигают сотен градусов (см. таблицу).

Все это весьма существенно для оптимальной организации газового потока в тракте ГПВРД и систем обеспечения устойчивого функционирования двигательной установки гиперзвукового летательного аппарата.

В заключение автор считает своим приятным долгом выразить благодарность С. Н. Коробейникову и П. И. Гешеву за полезные обсуждения и О. Л. Бобренюк за помощь в оформлении работы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 02-01-00097 и 01-01-00781).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Neumann J. von. Collected works (ed. A. Taub). V. 6. Oxford: Pergamon, 1963.
2. Li H., Ben-Dor G. Analytical and experimental investigations of the reflection of asymmetric shock waves in steady flows // J. Fluid Mech. 1999. **390**. 25–43.
3. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М.: Наука, 1966.
4. Кларк Дж., Макчесни М. Динамика реальных газов. М.: Мир, 1967.
5. Пригожин И., Конденуди Д. Современная термодинамика. От тепловых двигателей до диссипативных структур. М.: Мир, 2002.
6. Tarnavsky G. A., Shpak S. I. Effective specific heat ratio for problems of real gas hypersonic flows at bodies // Thermophysics and Aeromechanics. 2001. **8**, N 1. 39–53.
7. Тарнавский Г. А., Шпак С. И. Способы расчета эффективного показателя адиабаты при компьютерном моделировании гиперзвуковых течений // Сибирский журн. индустриальной математики. 2001. **4**, № 1(7). 177–197.

8. Tables of thermal properties of gases. USA. N. Y. Nat. Bureau of Standards. Circular 564 (1955).
9. *Варгафтик Н.Б.* Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей. М.: Физматгиз, 1963.
10. *Тарнавский Г.А.* Ударные волны в газах с различными показателями адиабаты до и после фронта скачка // Вычислительные методы и программирование. 2002. **3**, № 2. 129–143.
11. *Ben-Dor G.* Shock wave reflection phenomena. Berlin: Springer, 1991.
12. *Тарнавский Г.А., Шнак С.И.* Некоторые аспекты компьютерного моделирования гиперзвуковых течений: устойчивость, неединственность и бифуркации численных решений уравнений Навье–Стокса // Инженерно-физич. журн. 2001. **74**, № 3, 125–132.
13. *Волков В.Ф., Тарнавский Г.А.* Нарушение симметрии и гистерезис стационарных и квазистационарных решений уравнений Эйлера и Навье–Стокса // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 2001. **41**, № 11. 1742–1750.
14. *Pandolfi M., D'Ambrosio D.* Numerical instabilities in upwind methods: analysis and cures for the “carbuncle” phenomena // J. Comput. Phys. 2001. **166**, N 2. 271–301.
15. *Shi J., Zhang Y.-T., Shu C.-W.* Resolution of high order WENO schemes for complicated flow structures // J. Comput. Phys. 2003. **186**, N 2. 690–696.
16. *Тарнавский Г.А., Шнак С.И.* Декомпозиция методов и распараллеливание алгоритмов решения задач аэродинамики и физической газовой динамики // Программирование. 2000. № 6. 45–57.
17. *Тарнавский Г.А., Корнеев В.Д., Вайнер Д.А., Покрышкина Н.М., Слюняев А.Ю., Танасейчук А.В., Тарнавский А.Г.* Вычислительная система “Поток - 3”: опыт параллелизации вычислительного комплекса. Часть 1. Идеология распараллеливания // Вычислительные методы и программирование. 2003. **4**, № 1. 37–48.
18. *Воеводин В.В., Воеводин Вл.В.* Параллельные вычисления. СПб: БХВ–Петербург, 2002.

Поступила в редакцию  
02.09.2003

---