УДК 519.2:541.1

ПОЛУНОРМИРОВАННЫЕ ФАКТОР-ПРОСТРАНСТВА И ТЕОРИЯ СПЛАЙНОВ

В. А. Морозов[1]

В работе устанавливается связь теории А. Н. Тихонова нормальных решений с методом фактор-пространств, широко применяемым в современной вычислительной математике. При этом теория сплайнов развивается как для гильбертовых, так и для некоторых классов нормированных пространств. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 01–01–00398).

А. Н. Тихоновым была развита концепция нормального решения систем линейных алгебраических уравнений [1], обобщенная затем на случай, когда условие минимальной нормы решения заменяется условием минимальности некоторой полунормы [2]. Это позволило применить теорию решения линейных уравнений к теории сплайнов, хотя внешне кажется, что последняя связана исключительно с разработкой специфических подходов в теории приближений [5].

1. L-сплайны. Пусть H — полное гильбертово пространство, $Z \subset H$ — его подпространство. Обозначим через H/Z *фактор-пространство* пространства H по подпространству Z, элементами которого являются классы смежности $X \subset H : X = x + Z$, $x \in H$ — фиксированный элемент. L-нормой элемента $X \in H/Z$ назовем величину $|X|_L = \inf\limits_{y \in X} \|Ly\|_G$, где L — линейный ограниченный оператор, действующий из H в G, а G — также гильбертово пространство.

Определение 1. Элемент $\widehat{s}_x \in X$:

$$\|L\widehat{s}_x\|_G = \inf_{y \in X} \|Ly\|_G \tag{1}$$

называется *L-сплайном*, а элемент $s_x = \widehat{s}_x$ при $L = E$ (тождественному оператору) называется *естественным сплайном*.

Определение 2. Задача (1) называется корректной [3], если L-сплайн существует и единственен для любого $x \in H$, а любая минимизирующая (1) последовательность сходится к $\widehat{s}_x$.

Определение 3. Оператор L и множество Z называются *взаимно дополнительными*, если всякая последовательность $z_k \in Z : \|Lz_k\|_G \to 0,\ k \to \infty$, сходится в H к нулю.

Теорема 1. *Задача* (1) *корректна тогда и только тогда, когда оператор L и множество Z взаимно дополнительны.*

Замечание. Условие $N_L \cap Z = \{0\}$ в общем случае является лишь необходимым для корректности задачи (1). Если H конечномерно, то это условие и достаточно. Здесь N_L — ядро оператора L.

Дадим эквивалентные, но более удобные для дальнейшего формулировки условия взаимной дополнительности L и Z.

Лемма 1. *Для выполнения условия дополнительности L и Z необходимо и достаточно, чтобы для любой последовательности $y_k \in H : \rho(y_k, Z) \to 0,\ \|Ly_k\|_G \to 0,\ k \to \infty$, следовало $y_k \to 0,\ k \to \infty$.*

Пусть $P^\perp$ — ортопроектор на ортогональное дополнение $Z^\perp$ к подпространству Z. Поскольку

$$\rho(y, Z) = \left\|P^\perp y\right\|_H ,$$

то условие взаимной дополнительности L и Z выполнено тогда и только тогда, когда для любой последовательности $y_k \in H : \|Ly_k\|_H^2 + \left\|P^\perp y_k\right\|_H^2 \to 0,\ k \to \infty$, следует $y_k \to 0$. Отсюда, используя известную теорему функционального анализа [6], получаем, что справедлива

Лемма 2. *Для того чтобы выполнялось условие взаимной дополнительности L и Z, необходимо и достаточно существование постоянной $m > 0$, такой, что*

$$m^2 \|y\|_H^2 \leqslant \|Ly\|_G^2 + \left\|P^\perp y\right\|_H^2 , \quad \forall y \in H. \tag{2}$$

[1] Научно-исследовательский вычислительный центр, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, 119992, Москва; e-mail: arush@srcc.msu.su

Далее считаем условие взаимной дополнительности L и Z выполненным. Справедливы следующие утверждения.

Теорема 2. *Задача* (1) *обобщенно корректна в том смысле, что любая последовательность элементов* $y_k \in H : \rho(y_k, X) \to 0$, $\|Ly_k\|_G \to |X|_L$, $k \to \infty$, *сходится к* L*-сплайну* $\widehat{s}_x$.

Теорема 3. *Для того чтобы элемент* $\widehat{s}_x \in X$ *был* L*-сплайном, необходимо и достаточно, чтобы* $(L\widehat{s}_x, Lz)_G = 0$, $\forall z \in Z$. *При этом имеет место обобщенное равенство Пифагора*

$$\|Lx\|_G^2 = \|L\widehat{s}_x\|_G^2 + \|Lx - L\widehat{s}_x\|_G^2, \quad \forall x \in H. \tag{3}$$

Из теоремы 3 вытекает, что множество $\widehat{S}$ всех L-сплайнов является подпространством в H.

2. Сплайн-аппроксимация. Говорят, что семейство подпространств $Q_n \subset H$, $n = 1, 2, \ldots$, аппроксимирует H, если

$$\lim_{n\to\infty} \inf_{y \in Q_n} \|y - x\|_H = 0, \quad \forall x \in H.$$

Рассмотрим случай, когда имеется последовательность подпространств Z_n, $n = 1, 2, \ldots$, и соответствующих им подпространств L-сплайнов $\widehat{S}_n$. Поставим задачу: найти условия, обеспечивающие аппроксимацию подпространствами $\widehat{S}_n$ пространства H.

Пусть $P_n^\perp$ и m_n соответственно ортопроектор на $Z_n^\perp$ и константа в соотношении (2).

Определение 4. Будем говорить, что выполнено *условие* (M), если

$$\varliminf_{n\to\infty} m_n = m_0 > 0.$$

Определение 5. Говорят, что выполнено *условие* L*-согласования*, если

$$\lim_{n\to\infty} |X_n|_L = |x|_L, \quad \forall x \in H, \tag{4}$$

где $|x|_L = \|Lx\|_G$ и $X_n = x + Z_n$.

Справедлива следующая

Теорема 4. *Пусть выполнено условие* (M). *Тогда для того чтобы подпространства* L*-сплайнов* $\widehat{S}_n$ *аппроксимировали* H, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие* L*-согласования* (4).

Наряду с подпространством L-сплайнов $\widehat{S}_n$ рассмотрим подпространство S_n естественных сплайнов. Заметим, что в этом случае $L = E$ и условие (M) выполнено автоматически. Верна

Теорема 5. *Пусть выполнено условие* (M). *Тогда подпространства* $\widehat{S}_n$ *и* S_n *аппроксимируют* H *одновременно.*

Определение 6. Семейство подпространств Z_n будем называть *аннулирующим*, если для любого $y \in H : y \in Z_n$, $n = 1, 2, \ldots$, вытекает, что $y = 0$.

Теорема 6. *Пусть выполнено условие* (M). *Для того чтобы подпространства* L*-сплайнов* $\widehat{S}_n$ *аппроксимировали* H, *необходимо и достаточно, чтобы подпространства* Z_n *были аннулирующими.*

Теоремы 5 и 6 существенно облегчают процесс исследования вопроса о сходимости сплайнов.

3. Далее остановимся на некоторых достаточных условиях сходимости L-сплайнов. Будем предполагать, что указаны линейные операторы A_n, $n = 1, 2, \ldots$, действующие из H в банаховы пространства F_n, такие, что выполняются условия:

а) $\|A_n\| \leqslant K < +\infty$, где K не зависит от n;

б) $A_n z = 0 \iff z \in Z_n$;

в) можно указать линейный оператор $A : H \to F$ (F — банахово пространство), такой, что

$$Ay = 0 \iff y = 0; \quad \gamma^2 \|y\|_H^2 \leqslant \|Ly\|_G^2 + \|Ay\|_F^2 \quad \forall y \in H,$$

где $\gamma > 0$ не зависит от выбора y;

г) выполняется следующее неравенство:

$$\|Ay\|_F^2 - \|A_n y\|_{F_n}^2 \leqslant r_n^2 \|Ly\|_G^2 \quad \forall y \in H,$$

где r_n не зависят от выбора y и стремятся к нулю при $n \to \infty$.

Теорема 7 (ср. [4]). *При указанных условиях задача* (1) *корректна при любом фиксированном* n*; при этом подпространства* L*-сплайнов* $\widehat{S}_n$ *аппроксимируют* H *при* $n \to \infty$.

4. Пример. Пусть $H = W_2^{(r)}[a,b]$, $r \geqslant 1$ [6]. Зададим на $[a,b]$ сетку узлов

$$a = t_1 < t_2 < \ldots < t_{n+1} = b, \quad t_i = t_i^{(n)},$$

и пусть определены функционалы

$$l_i^{(n)}(x) = h_i^{-1} \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} x(\xi)\, d\xi, \quad h_i = t_{i+1} - t_i.$$

Положим $Z_n = \bigl\{ z \in W_2^{(r)} : l_i^{(n)}(z) = 0,\ i = \overline{1,n} \bigr\}$. Тогда

$$X_n = x + Z_n = \bigl\{ y \in W_2^{(r)} : l_i^{(n)}(y) = l_i^{(n)}(x) = \widehat{x}_i, \quad i = 1,2,\ldots,n \bigr\}.$$

Пусть оператор $L = \dfrac{d^r}{dt^r}$.

Задача нахождения L-сплайна заключается в определении функции $\widehat{s}_x^{\,n} = \widehat{s}_x(t) \in W_2^{(r)}$, такой, что

$$\left\| \frac{d^r\, \widehat{s}_x}{dt^r} \right\|_{L_2} = \inf_y \left\| \frac{d^r y}{dt^r} \right\|_{L_2}, \quad y \in X_n. \tag{5}$$

Используя интегральное представление функций $x(t) \in W_2^{(r)}$

$$x(t) = c_0 + c_1 t + \cdots + c_{r-1} t^{r-1} + \int\limits_a^t \frac{(t-\xi)^{r-1}}{(r-1)!}\, x^{(r)}(\xi)\, d\xi\,,$$

легко показать, что оператор L и множества Z_n взаимно дополнительны при всех $n \geqslant r$. Итак, справедлива

Теорема 8. *При любом $n \geqslant r$ задача* (5) *корректна* (*и обобщенно корректна*).

Полагая

$$d(y) = \int\limits_a^b y^2(\xi)\, d\xi - \sum_{i=1}^n \kappa_i l_i^2(y), \quad y \in W_2^{(r)},$$

нетрудно показать, что существуют такие коэффициенты $\kappa_i > 0$, что $d(y) \leqslant C \hbar_n^{2r} \bigl\| y^{(r)} \bigr\|_{L_2}$ $\forall y \in W_2^{(r)}$, где $C = \mathrm{const}$, $\hbar_n = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} h_i$. Полагая $A_n y = \bigl(l_1(y), l_2(y), \ldots, l_n(y) \bigr)$, убеждаемся в выполнении условий а)–г) теоремы 7, если взять в качестве оператора A оператор вложения из $W_2^{(r)}$ в L_2. Отсюда вытекает

Теорема 9. *Если $\hbar_n \to 0$, $n \to \infty$, то для любого $x \in W_2^{(r)}$ имеем* $\lim\limits_{n\to\infty} \bigl\| \widehat{s}_x^{\,n} - x \bigr\|_{W_2^{(r)}} = 0$.

Замечание. Справедливость данной теоремы можно также установить, заметив, что подпространства Z_n являются аннулирующими. При этом очевидно, что условие $\hbar_n \to 0$, $n \to \infty$, является не только достаточным, но и необходимым для выполнения этого свойства.

5. Нелинейные сплайны. Пусть E — банахово пространство, на котором задан выпуклый вещественный функционал $p(x)$, такой, что

$$\gamma\bigl(\| Ly - Lx \|_G \bigr) \leqslant \frac{1}{2}\, p(x) + \frac{1}{2}\, p(y) - p\Bigl(\frac{x+y}{2} \Bigr), \quad x, y \in E, \tag{6}$$

где функция $\gamma(t) > 0$ строго возрастает при $t > 0$ ($\gamma(0) = 0$) и непрерывна в нуле, а L — некоторый линейный оператор, действующий из E в банахово пространство G.

Пусть Z — некоторое подпространство E и пусть E/Z — фактор-пространство E по подпространству Z. Рассмотрим задачу: найти элемент $\widehat{s}_x \in X = \varphi(x)$, где φ — естественный гомоморфизм, из условия

$$\inf_{y \in X} p(y) = p(\widehat{s}_x). \tag{7}$$

Определение 7. Решение задачи (7) называем *p-сплайном.*

Предположим, что функционал $p(x)$ полунепрерывен снизу на E, а оператор L и множество Z взаимно дополнительны, т.е. для всякой последовательности $y_n \in Z : \|Ly_n\|_G \to 0,\ n \to \infty$, имеет место соотношение $y_n \to 0,\ n \to \infty$.

Теорема 10. *При указанных условиях p-сплайн однозначно определен при любом $X \subset E/Z$, $X = \varphi(x)$.*

Доказательство. Положим $p^* = \inf\limits_{y\in X} p(y)$. Определим элементы $x_n \in X : p(x_n) \leqslant p^* + \varepsilon_n$, $\varepsilon_n \to 0+$, $n \to \infty$. Используя (6), получим

$$\gamma\big(\|Lx_{n+k} - Lx_n\|_G\big) \leqslant \frac{1}{2}\,(p^* + \varepsilon_{n+k}) + \frac{1}{2}\,(p^* + \varepsilon_n) - p^* \to 0, \quad n \to \infty,$$

независимо от натурального k. Поэтому $\|Lx_{n+k} - Lx_n\|_G \to 0$, $n \to \infty$, независимо от k. Очевидно, что $x_{n+k} - x_n \in Z$; следовательно, $x_{n+k} - x_n \to 0$, $n \to \infty$, независимо от k (по условию дополнительности L и Z). Так как E — полное пространство, то существует $\lim\limits_{n\to\infty} = x_0$. Используя полунепрерывность снизу функционала $p(x)$, имеем $p(x_0) \leqslant p^*$. Из замкнутости X вытекает, что $x_0 \in X$, т.е. x_0 — искомое решение. Если x_0 и x_1 два решения задачи (7), то получаем $x_0 - x_1 \in Z$ и

$$\gamma\big(\|Lx_0 - Lx_1\|_G\big) \leqslant \frac{1}{2}\,p(x_0) + \frac{1}{2}\,p(x_1) - p\Big(\frac{x_0 + x_1}{2}\Big) \leqslant \frac{1}{2}\,p^* + \frac{1}{2}\,p^* - p^* = 0.$$

Из условия дополнительности L и Z следует $x_1 = x_0$.

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тихонов А.Н.* О некорректных задачах линейной алгебры и устойчивом методе их решения // Докл. АН СССР. 1965. **163**, № 3. 591–594.
2. *Морозов В.А.* Метод регуляризации и решение систем линейных алгебраических уравнений // Тр. Всесоюзного семинара “Вычисл. методы лин. алгебры”. Новосибирск: Изд-во ВЦ СО АН СССР, 1971.
3. *Тихонов А.Н.* Об устойчивости задачи оптимизации функционалов // Ж. вычислит. матем. и матем. физики. 1966. **6**, № 1. 631–634.
4. *Морозов В.А.* О приближенном решении операторных уравнений методом сплайнов // Докл. АН СССР. 1971. **200**, № 1. 35–38.
5. *Morozov V.A.* Theory of splines and the problem of stable calculation of values of unbounded operators // J. Comp. Math. and Math. Phys. 1971. **11**, N 3. 545–558.
6. *Люстерник Л.А., Соболев В.И.* Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1965.
7. *Васильев Ф.П.* Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1988.
8. *Вайникко Г.М.* Анализ дискретизационных методов. Тарту: Изд-во Тартуского ун-та, 1976.
9. *Вайнберг М.М.* Вариационный метод и метод монотонных операторов. М.: Наука, 1972.
10. *Алберг Д., Нильсон Э., Уолш Д.* Теория сплайнов и ее приложения. М.: Наука, 1972.

Поступила в редакцию
03.03.2003