

УДК 518.5:533.6

УДАРНЫЕ ВОЛНЫ В ГАЗАХ С РАЗЛИЧНЫМИ ПОКАЗАТЕЛЯМИ АДИАБАТЫ ДО И ПОСЛЕ ФРОНТА СКАЧКА

Г. А. Тарнавский¹

Рассмотрена физико-математическая модель ударных волн в реальных газах в приближении бесконечно тонкого разрыва при различных показателях адиабаты до и после фронта скачка. Получены основные соотношения газо- и термодинамических параметров на скачке, переходящие в частном случае неизменности показателя адиабаты в соотношения классической газовой динамики. Определены границы применимости модели в области пространства основных параметров. Приведены результаты численного расчета ряда задач на основе разработанного метода и проанализированы характеристики полученных решений и их особенности в сравнении с известными решениями.

1. Введение. Современное состояние компьютерной техники сделало возможным изучение пространственных высокоскоростных течений газа с ударными волнами в потоке на новом уровне моделирования, учитывающем реальные свойства газовой среды. Сложность задачи (см. [1, 2]) требует создания надежных средств контроля решений, полученных численными методами.

Возможны три основных направления тестирования результатов: 1) сравнение с аналитическими решениями; 2) сравнение с численными решениями других авторов; 3) сравнение с экспериментальными данными. На первом этапе функционирования созданных компьютерных программ безусловно необходимым и оптимальным является первый из перечисленных способов (подробнее см. [3]). Однако, несмотря на хорошо развитую аналитику классической аэродинамики в теории ударных волн в идеальных газах, нет эффективных и удобных в использовании (хотя бы в первом приближении) аналитических средств для расширения моделирования движения ударных волн в случае, когда их распространение в газовых средах меняет физические свойства среды.

Аналитические средства моделирования задач, как непосредственно, так и в целях контроля численных расчетов, крайне важны в случае неединственности решений (подробнее см. [4, 5]), в особенности при изучении ударных волн с граничными факторами и друг с другом с возможным образованием картин отражения двух различных типов: регулярного и маховского.

К настоящему времени проведенные исследования регулярного (РО) и маховского (МО) отражений ударных волн (УВ) позволяют сделать некоторые выводы об областях их существования, в том числе и об области существования двойного решения, т.е. о наличии ряда поддиапазонов изменения определяющих параметров процесса, таких как число Маха, угол отклонения потока и т.п., в которых возможно образование устойчивых картин как РО, так и МО. Схематическое изображение этих двух волновых структур, которые возникают при отражении УВ в установившихся течениях, представлено на рис. 1.

Картина РО (рис. 1, а), образовавшаяся при натекании сверхзвукового потока с числом Маха M_0 на два клина, характеризующихся углами β_1 и β_2 , включает соответственно два косых скачка уплотнения (СУ) i_1 и i_2 , сформированных вблизи поверхности клиньев и падающих внутрь области течения с углами наклона φ_1 и φ_2 (здесь и далее углы определяются по отношению к направлению вектора набегающего потока), и двух отраженных СУ r_1 и r_2 с углами наклона φ_3 и φ_4 . Эти СУ пересекаются в точке R . Спутная струя S с углом наклона δ образуется при прохождении потока через систему скачков с углами отклонения потока $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ и θ_4 на скачках i_1, i_2, r_1 и r_2 соответственно. Для стационарной картины выполняются соотношения

$$\theta_1 = \beta_1, \quad \theta_2 = \beta_2, \quad \theta_1 - \theta_3 = \theta_2 - \theta_4 = \delta.$$

При симметричном отражении ($\beta_1 = \beta_2$), естественно, $\delta = 0$.

¹ Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, ул. Институтская, 4/1, 630090, г. Новосибирск; e-mail: tarnav@itam.nsc.ru

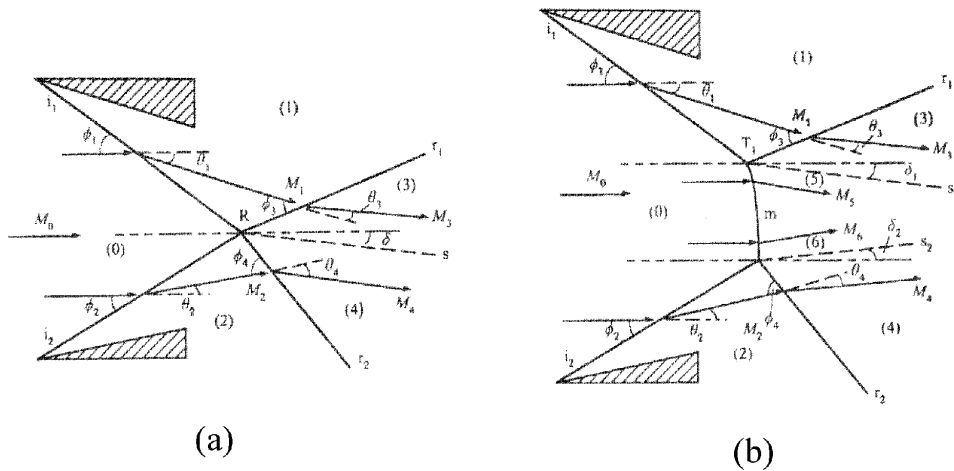


Рис. 1. Картины волновых структур при взаимодействии ударных волн: регулярное (а) и маховское (b) отражения

При возникновении волновой структуры с МО (рис. 1, b) в дополнение к падающим и отраженным СУ i_1, i_2, r_1 и r_2 появляется скачок T , фронт которого соединяет две тройные точки T_1 и T_2 , а также возникают две спутные струи S_1 и S_2 с углами наклона δ_1 и δ_2 . Для стационарной картины выполняются соотношения

$$\theta_1 = \beta_1, \quad \theta_2 = \beta_2, \quad \theta_1 - \theta_3 = \delta_1, \quad \theta_2 - \theta_4 = \delta_2.$$

В случае симметрии ($\beta_1 = \beta_2$), очевидно, $\theta_1 = \theta_2, \delta_1 = \delta_2 = 0$.

Ниже в основном будет рассматриваться симметричный случай, однако результаты легко обобщаются и на несимметричную картину.

Обычно исследование волновых структур этих двух типов (РО и МО) проводится в предположении неизменности физических свойств газового потока при его прохождении через всю систему СУ, т.е. используется модель идеального политропного газа с постоянным значением показателя адиабаты (политропы) во всей области течения (см., например, статью [6] и библиографию в ней). Однако реальные процессы, изучение которых связано с интенсификацией разработки гиперзвуковых летательных аппаратов, настоятельно требуют расширения этой физической модели. Заметим, что задача, схематически изображенная на рис. 1, моделирует течение на входе в воздухозаборник ГПВРД; уровень знания режимов этого течения, предсказание переходов от РО к МО и обратно, а также ответ на вопрос, какой из двух типов волновых структур реализуется в области неединственности решения и какие факторы влияют на это, весьма важны при создании системы управления режимом горения для устойчивого функционирования двигательной установки в целом.

В настоящей работе для моделирования газо- и термодинамики физического процесса может быть использован метод эффективного показателя адиабаты [7, 8], позволяющий моделировать течение газа с учетом его реальных свойств при помощи вариации показателя адиабаты γ , изменяющегося во всем поле течения в зависимости от локальных значений давления и температуры. Иллюстрацией к вопросу о необходимости учета изменения термодинамических свойств газа в гиперзвуковых потоках с зонами высоких температур является рис. 2, на котором приведена зависимость отношения теплоемкостей c_p/c_v для воздуха (классический показатель адиабаты для уравнения состояния идеального газа $\gamma = c_p/c_v$) от температуры T в диапазоне до 6000°K в параметрическом виде (где параметром является давление p) со значениями от 10^{-3} до 10^3 атм. Данные взяты из таблиц [9, 10]. Волнообразное поведение кривых связано с такими физическими процессами, последовательно протекающими при увеличении T , как возбуждение колебательных степеней свободы молекул кислорода и их диссоциация, возбуждение колебаний в молекулах азота и их диссоциация, возбуждение электронных оболочек атомов и их ионизация. Один из методов учета этих процессов, предложенный в [8], опирается на введение уравнения $\gamma_*(p, T) = c_p/c_v(p, T)$, что позволяет модифицировать и распространить алгоритмы и реализующие их комплексы основных и поддерживающих компьютерных программ расчета сверхзвуковых течений сжимаемого вязкого теплопровод-

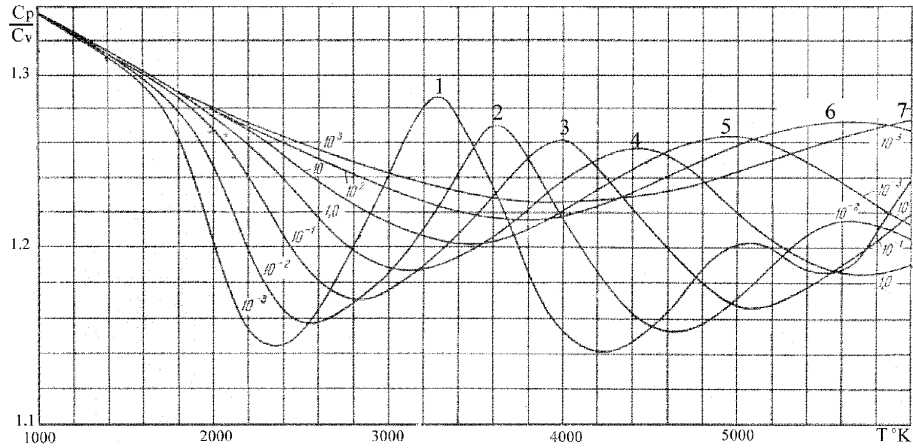


Рис. 2. Зависимость отношения C_p/C_v (для воздуха) от температуры при вариации давления 10^{-3} (1), 10^{-2} (2), 10^{-1} (3), 1 (4), 10 (5), 10^2 (6), 10^3 (7) атм

ного газа и термодинамики идеального совершенного газа в область гиперзвуковых термодинамически равновесных течений реального газа.

Для исследования высокоскоростных течений в данной работе предлагается физико-математическая модель УВ с различными показателями адиабаты до и после фронта скачка, который предполагается бесконечно тонким разрывом. Заметим, что данная модель, как весьма естественный шаг к приближенному моделированию физики УВ, предлагалась и ранее (см., например, с. 252 в [1]), однако необходимость проведения чрезвычайно громоздких выкладок не позволила развить данную модель до получения конечных аналитических формул. Ниже получены аналитические формулы, удобные для практического использования, в том числе, при тестировании компьютерных программ решения уравнений Эйлера, Навье–Стокса и Барнетта, дополненных уравнениями термодинамики с неидеальным уравнением состояния, проведен анализ полученных аналитических формул и их сравнение с аналитическими формулами классической газовой динамики.

2. Физико-математическая модель. Рассмотрим бесконечно тонкий косой скачок уплотнения с углом наклона φ к вектору набегающего потока (см., например, СУ i_1 на рис. 1, а). В системе координат фронта УВ параметры перед и за фронтом СУ связаны соотношениями

$$u_{1\tau} = u_{2\tau}, \quad (1)$$

$$\rho_1 u_{1n} = \rho_2 u_{2n}, \quad (2)$$

$$p_1 + \rho_1 u_{1n}^2 = p_2 + \rho_2 u_{2n}^2, \quad (3)$$

$$\frac{u_{1n}^2}{2} + h_1 = \frac{u_{2n}^2}{2} + h_2, \quad (4)$$

где u_τ , u_n , ρ , p и h — касательная и нормальная к фронту проекции вектора скорости, плотность, давление и энтальпия соответственно, а индексы 1 и 2 отмечают параметры перед и за СУ.

Энтальпия связана с другими термодинамическими параметрами соотношением

$$h = e + p/\rho. \quad (5)$$

В общем случае внутренняя энергия

$$\epsilon = \int c_v(V, T) dT + \int \left[T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v - p \right] dV, \quad (6)$$

где c_v — удельная теплоемкость при постоянном объеме, T — температура, $V = 1/\rho$ — удельный объем.
В случае идеального

$$p = \frac{R}{\mu} \rho T \quad (7)$$

совершенного

$$c_v(V, T) = c_v(V) \quad (8)$$

политропного газа

$$pV^\gamma = \text{const} \quad (9)$$

с учетом

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v}, \quad c_p - c_v = \frac{R}{\mu}, \quad (10)$$

где μ — молекулярный вес, R — абсолютная газовая постоянная, γ — показатель адиабаты (политропы), c_p — удельная теплоемкость при постоянном давлении, получаем из (4) и (7)–(10) связь параметров в виде

$$\frac{u_{1n}^2}{2} + \frac{\gamma_1}{\gamma_1 - 1} \frac{p_1}{\rho_1} = \frac{u_{2n}^2}{2} + \frac{\gamma_2}{\gamma_2 - 1} \frac{p_2}{\rho_2}. \quad (11)$$

Ниже, на первом этапе исследования проблемы, будем полагать показатели адиабаты перед и за СУ постоянными:

$$\gamma_1 = \text{const}_1, \quad \gamma_2 = \text{const}_2.$$

Это приближение означает использование модели, не учитывающей структуру УВ. В дальнейшем, на втором этапе, данная модель будет расширена:

$$\gamma_i^* = \gamma_i^*(p_i, T_i), \quad \gamma_2^* = \gamma_2^*(p_2, T_2),$$

Математический аппарат, примененный для формулирования понятия эффективного показателя адиабаты γ^* в термодинамических соотношениях типа (5)–(10) для случая неидеальности уравнения состояния, подробно рассмотрен в [7, 8].

Из (1)–(3) и (11) после идейно несложных, но в некоторых случаях весьма громоздких выкладок получены соотношения, анализу которых посвящена настоящая работа.

3. Ударная адиабата. Связи между величинами ρ , p и T до и после СУ имеют следующий вид:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{\alpha_1 \rho_2 / \rho_1 - 1}{\alpha_2 - \rho_2 / \rho_1}, \quad (12)$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\alpha_2 p_2 / p_1 + 1}{\alpha_1 + p_2 / p_1}, \quad (13)$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{\alpha_2 p_2 / p_1 + 1}{\alpha_1 p_1 / p_2 + 1}, \quad (14)$$

где

$$\alpha_i = \frac{\gamma_i + 1}{\gamma_i - 1}, \quad i = 1, 2. \quad (15)$$

Ударная адиабата (13) имеет асимптоту

$$\rho_2/\rho_1 \rightarrow \alpha_2 \quad \text{при} \quad p_2/p_1 \rightarrow \infty, \quad (16)$$

которая определяется только параметром γ_2 среды за СУ и не зависит от состояния среды перед СУ.

Для воздуха в обычно изучаемом диапазоне p и T величина $\gamma_2 = 1.4$ и, как это следует из формул (15) – (16), асимптота $\rho_2/\rho_1 \rightarrow 6$. Однако следует учитывать, что в гиперзвуковых течениях в области высоких T значение γ_2 может уменьшиться до, например, 1.14; в этом случае асимптота $\rho_2/\rho_1 \rightarrow 15.3$, т.е. степень ударного сжатия газа повышается более чем в 2.5 раза даже без учета фактора сжимаемости в уравнении состояния (см., например, [7, 8]). Для высокомолекулярных газов типа метана CH_4 или углекислого газа CO_2 , составляющих оболочки планет, таких, как Юпитер, Марс и Венера, при значительном возбуждении колебательных степеней свободы возможность ударного сжатия еще выше: для $\gamma_2 = 1.01$ асимптота $\rho_2/\rho_1 \rightarrow 201$.

4. Углы наклона скачка и отклонения потока за его фронтом. Компоненты векторов скорости $u_{1\tau}$, u_{1n} , $u_{2\tau}$ и u_{2n} могут быть выражены через углы наклона скачка φ к вектору набегающего потока и углу отклонения потока θ за его фронтом (см. рис. 1):

$$\begin{aligned} u_{1n} &= u_1 \sin \varphi, & u_{1\tau} &= u_1 \cos \varphi, & u_{2n} &= u_2 \sin(\varphi - \theta), & u_{2\tau} &= u_2 \cos(\varphi - \theta), \\ u_1 &= \sqrt{u_{1n}^2 + u_{1\tau}^2}, & u_2 &= \sqrt{u_{2n}^2 + u_{2\tau}^2}. \end{aligned} \quad (17)$$

Из (17), (1) – (3) и (11) можно получить связь углов φ и θ :

$$\frac{2}{\gamma_1 - 1} \left[1 - \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \frac{\gamma_1 - 1}{\gamma_2 - 1} \frac{\text{tg}(\varphi - \theta)}{\text{tg} \varphi} \right] = M_1^2 \sin^2 \varphi \left[1 - \frac{\text{tg}(\varphi - \theta)}{\text{tg} \varphi} \right], \quad (18)$$

$$\frac{\gamma_2 + 1}{\gamma_2 - 1} \frac{\text{tg}(\varphi - \theta)}{\text{tg} \varphi} - 1$$

где M_1 — число Маха набегающего потока:

$$M_1^2 = u_1^2/a_1^2, \quad a_1^2 = \gamma_1 p_1/\rho_1. \quad (19)$$

В частном случае однородности газа до и после СУ при $\gamma_2 = \gamma_1 = \gamma$ формула (18) записывается в известном виде (см., например, [1]):

$$M_1^2 \sin^2 \varphi \left[\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \frac{\text{tg}(\varphi - \theta)}{\text{tg} \varphi} - 1 \right] = \frac{2}{\gamma - 1}. \quad (20)$$

При обтекании сверхзвуковым потоком M_1 клина с углом β течение с присоединенным СУ возникает для определенного соотношения M_1 и β (в случае стационарного режима $\theta = \beta$ существует критическое значение θ_* , при котором скачкообразно меняется режим обтекания: если $\theta < \theta_*$, то возникает картина с присоединенным СУ, а при $\theta > \theta_*$ — с отошедшим СУ). В связи с этим вопрос о нахождении θ_* представляет значительный интерес.

Из формулы (18) после громоздких выкладок можно получить уравнение для определения угла наклона скачка φ по известным другим параметрам задачи. При этом возникает уравнение пятой степени относительно $\text{tg} \varphi$:

$$a_5 y^5 + a_4 y^4 + a_3 y^3 + a_2 y^2 + a_1 y + a_0 = 0, \quad (21)$$

где

$$\begin{aligned} y &= \text{tg} \varphi, \\ a_5 &= 1 + \frac{M_1^2}{\mu}, & a_4 &= \frac{1}{\tau} \left(\nu + 1 + \frac{M_1^2}{\mu} \kappa \right), & a_3 &= \lambda + \frac{\nu}{\tau^2} + 1 + \frac{M_1^2}{\mu} (1 + \alpha_2), \\ a_2 &= \frac{1}{\tau} \left(\lambda + \nu + 1 + \frac{M_1^2}{\mu} \kappa \right), & a_1 &= \lambda + \frac{\nu}{\tau^2} + \frac{M_1^2}{\mu} \alpha_2, & a_0 &= \frac{\lambda}{\tau}, & \tau &= \text{tg} \theta, \\ \mu &= \frac{2}{\gamma_1 - 1}, & \lambda &= \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \frac{\gamma_1 - 1}{\gamma_2 - 1}, & \nu &= \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{\gamma_1(\gamma_2 - 1)}, & \alpha_2 &= \frac{\gamma_2 + 1}{\gamma_2 - 1}, & \kappa &= -\frac{2}{\gamma_2 - 1}. \end{aligned}$$

В частном случае термодинамической однородности потока до и после СУ при $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$ уравнение пятой степени (21) факторизуется, т.е. может быть записано в виде

$$\operatorname{tg} \theta (y^2 + 1)(b_3 y^3 + b_2 y^2 + b_1 y + b_0) = 0, \quad (22)$$

где $b_3 = a_5, b_2 = a_4, b_1 = a_1, b_0 = a_0$.

Таким образом, уравнение (21) распадается на два, первое из которых $y^2 + 1 = 0$ физически бессмысленно и может быть отброшено, а второе, после соответствующих подстановок $\gamma_1 = \gamma$ и $\gamma_2 = \gamma$ в коэффициенты (21) и ряда преобразований, может быть приведено к виду, достаточно известному в классической аэродинамике (см., например, [1]):

$$\operatorname{tg} \theta \left(\frac{\gamma - 1}{2} M_1^2 + 1 \right) y^3 - (M_1^2 - 1) y^2 + \operatorname{tg} \theta \left(\frac{\gamma + 1}{2} M_1^2 + 1 \right) y + 1 = 0. \quad (23)$$

(Напомним обозначение $y = \operatorname{tg} \varphi$.)

Даже в виде (23) уравнение связи между φ и θ при заданных γ и M_1 весьма сложно для анализа, поэтому обычно рассматривают гиперзвуковое приближение $M_1^2 \gg 1$, что позволяет, отбросив часть членов, свести кубическое уравнение к квадратному:

$$y^2 - \frac{2y}{(\gamma - 1) \operatorname{tg} \theta} + \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} = 0. \quad (24)$$

Именно уравнение (24), широко известное в классической аэродинамике, используется для определения критического значения θ_* : положительный детерминант (24) определяет режим присоединенного СУ, отрицательный — режим отошедшего СУ. Этот анализ, как хорошо разработанный, здесь не приводится (см. широко известные таблицы по аэродинамике). Однако следует подчеркнуть, что решение уравнения пятой степени, естественно, весьма отличается от решения квадратного. При этом анализ числа действительных и комплексных корней, их динамики, фазового портрета решения и т.п. в параметрическом пространстве $(M_1, \gamma_1, \gamma_2)$ достаточно затруднителен даже при использовании мощных компьютерных средств поддержки типа пакета Maple. В связи с этим анализ математической модели УВ в газах с различными показателями адиабаты до и после фронта скачка будет проведен ниже на основании соотношений других параметров.

5. Поляра ударной волны. Под полярной УВ понимается соотношение, связывающее угол отклонения потока θ и относительное давление на фронте скачка $\xi = p_2/p_1$ при параметрической зависимости от числа Маха M_1 и показателей адиабаты γ_1 и γ_2 :

$$\theta = \pm f(\xi, M_1, \gamma_1, \gamma_2). \quad (25)$$

Знак \pm означает возможность отклонения потока за фронтом УВ от направления вектора набегающего потока как против, так и по часовой стрелке, в зависимости от параметров конкретной задачи. Для исследуемой математической модели поляра УВ (25) имеет вид

$$\theta = \pm \operatorname{arctg} \left[\frac{(a_2 - a_1) \operatorname{tg} \varphi}{a_2 + a_1 \operatorname{tg}^2 \varphi} \right], \quad (26)$$

где φ (угол наклона УВ) определяется соотношением

$$\operatorname{tg}^2 \varphi = \frac{(\xi - 1) a_2}{2\gamma_1 M_1^2 \left(\frac{\xi}{\gamma_2 - 1} - \frac{1}{\gamma_1 - 1} \right) - (\xi - 1) a_2} \quad (27)$$

и приняты для краткости записи (26)–(27) обозначения:

$$\begin{aligned} a_1 &= \alpha_1 + \xi, & a_2 &= \alpha_2 \xi + 1, \\ \alpha_1 &= \frac{\gamma_1 + 1}{\gamma_1 - 1}, & \alpha_2 &= \frac{\gamma_2 + 1}{\gamma_2 - 1}. \end{aligned} \quad (28)$$

Заметим, что расписанная с помощью пакета Maple в явном относительно γ_1, γ_2, M_1 и ξ виде, без промежуточных обозначений (27)–(28), формула (26) имеет совершенно “необозримый” вид.

В частном случае неизменности физических свойств газа при прохождении через фронт УВ имеем $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma \implies \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ и

$$a_1 = \frac{(\gamma + 1) + (\gamma - 1)\xi}{\gamma - 1}, \quad a_2 = \frac{(\gamma + 1)\xi + (\gamma - 1)}{\gamma - 1}. \quad (29)$$

Соотношение (27) имеет вид

$$\operatorname{tg}^2 \varphi = \frac{(\gamma + 1)\xi + (\gamma - 1)}{2\gamma M_1^2 - (\gamma + 1)\xi - (\gamma - 1)}. \quad (30)$$

Для контроля правильности выкладок, сделанных как вручную, так и с помощью пакета Maple, запись поляры УВ (26) с учетом (29)–(30) может быть приведена к записи, полученной в [6]:

$$\theta = \pm \operatorname{arctg} \left\{ \frac{(\xi - 1)^2 [2\gamma(M_1^2 - 1) - (\gamma + 1)(\xi - 1)]}{[\gamma M_1^2 - (\xi - 1)]^2 [2\gamma + (\gamma + 1)(\xi - 1)]} \right\}^{1/2}. \quad (31)$$

Обратим внимание на следующее важное отличие формулы общей модели (27) от ее частного (30) случая: в определении $\operatorname{tg}^2 \varphi$ сократился множитель $(\xi - 1)$. Аналогично было получено выше (в п. 4) понижение порядка уравнения с пятого (21) для общей модели до третьего (22) для ее частного случая. Таким образом, в рамках математической модели разных показателей адиабаты до и после скачка следует ожидать существенных особенностей по сравнению с изученными свойствами течений с УВ в модели классической газовой динамики.

На рис. 3 приведены поляры ударных волн (25) в общем случае (26)–(28) при фиксированных значениях $M_1 = 5$, $\gamma_1 = 1.4$ и вариации γ_2 . Поляры 1–6 соответствуют значениям $\gamma_2 = 1.67$; 1.4; 1.3; 1.2; 1.1 и 1.01. Ось ординат представляет относительное давление ξ , ось абсцисс — угол отклонения потока θ в град.

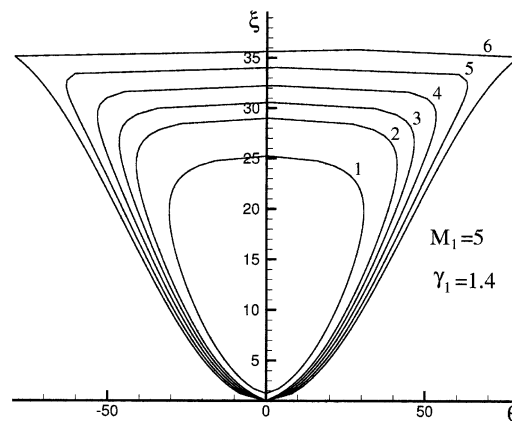


Рис. 3. Поляры ударных волн для фиксированных $M_1 = 5$, $\gamma_1 = 1.4$ и вариации $\gamma_2 = 1.67$ (кривая 1); 1.4 (2); 1.3 (3); 1.2 (4); 1.1 (5) и 1.01 (6)

Поляра 2 есть частный случай классической аэродинамики с неизменным показателем адиабаты до и после фронта скачка $\gamma_1 = \gamma_2 = 1.4$. Хотя весь набор приведенных поляр носит достаточно абстрактный математический характер, однако физика ударно-волновых процессов, которые представляют эти поляры, может быть интерпретирована следующим образом. Состояние до фронта скачка с $\gamma_1 = 1.4$ характерно, например, для двухатомных газов (типа молекулярных кислорода и азота, составляющих воздушную смесь) при не слишком высоких температурах, когда возбуждены только три поступательных и два вращательных степени свободы молекул.

Ударные волны, соответствующие полярам 3–6, возбуждают дополнительно колебательные и, возможно, электронные степени свободы, что приводит к уменьшению γ_2 за фронтом скачка (имеется в виду эффективный показатель адиабаты газовой смеси (см. [7, 8])). Заметим, что для воздуха значения $\gamma_2 = 1.1$ (поляра 5) и $\gamma_2 = 1.01$ (поляра 6) являются недостижимыми (см. рис. 2), однако для высокомолекулярных газов с достаточно сильными, препятствующими диссоциации межатомными связями, может быть достигнуто и состояние с весьма малыми γ_2 .

Первая полярна есть предельный с точки зрения физики процесс случая, когда УВ вызывает полную диссоциацию двухатомного газа (и при этом не возбуждаются электронные степени свободы) и превращение его в одноатомный газ, у которого возбуждены только три поступательных степени свободы ($f = 3$) и, соответственно, значение показателя адиабаты достигает своего предела (максимума) $\gamma_2 = 1 + 2/f = 5/3 \approx 1.67$.

Разумеется, для каждой точки каждой полярны, т.е. при изменении вдоль полярны интенсивности УВ ξ от ξ_{\min} до ξ_{\max} , в идеале вряд ли можно обеспечить физический процесс, приводящий к одним и тем же значениям γ_2 за фронтом УВ; однако полярны, как некая математическая абстракция, весьма полезна при теоретических исследованиях и практических разработках.

Заметим, что, как и в классической газодинамике, полярны представляют собой замкнутые фигуры, из чего следует неединственность решения (25): каждому одному значению θ , за исключением θ_{\max} , соответствуют два значения ξ .

С уменьшением γ_2 профили полярны становятся более наполненными: полярны с большими значениями γ_2 вложены внутрь полярны с меньшими γ_2 . Семейства полярны при одних и тех же M_1 и γ_1 не пересекаются. В пределе $\gamma_2 \rightarrow 1$ полярны размыкается: правая и левая ее ветви уходят соответственно в $\pm\infty$ по θ при $\xi = \xi_{\max}$. В начальной точке полярны $(0, \xi_{\min})$ полярны имеют излом (разрыв производной), исчезающий в пределе $\gamma_2 \rightarrow 1$.

6. Прямой скачок. Минимальное и максимальное относительное давление. Значение угла отклонения потока θ^* , относительного давления $\xi^* = (p_2/p_1)^*$ за и перед фронтом УВ, перпендикулярному вектору набегающего потока, может быть получено из (26) – (28) при условии $\varphi = 90^\circ$:

$$\theta^* = 0, \tag{32}$$

$$2\gamma_1 M_1^2 \left(\frac{\xi^*}{\gamma_2 - 1} - \frac{1}{\gamma_1 - 1} \right) - (\xi^* - 1) \left(\frac{\gamma_2 + 1}{\gamma_2 - 1} \xi^* + 1 \right) = 0. \tag{33}$$

Отметим, что формула (32) для θ^* является естественной и очевидной. Непосредственное решение квадратного уравнения относительно ξ^* , к которому приводится (33), имеет вид

$$\xi_{\min, \max}^* = \frac{1}{\gamma_2 + 1} \left[1 + \gamma_1 M_1^2 \mp \sqrt{\gamma_2^2 + \gamma_1^2 M_1^4 + 2\gamma_1 M_1^2 \left(1 - \frac{\gamma_2^2 - 1}{\gamma_1 - 1} \right)} \right]$$

и после преобразований может быть приведено к другому виду, более удобному для анализа:

$$\xi_{\min, \max}^* = \frac{1}{\gamma_2 + 1} \left[1 + \gamma_1 M_1^2 \mp \sqrt{\gamma_1^2 (M_1^2 - 1)^2 + (\gamma_1^2 - \gamma_2^2) \left(\frac{2\gamma_1 M_1^2}{\gamma_1 - 1} - 1 \right)} \right]. \tag{34}$$

Для частного случая $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$ из (34) имеем хорошо известные в классической газодинамике формулы прямого скачка:

$$\xi_{\min}^* = 1, \tag{35}$$

$$\xi_{\max}^* = \frac{2\gamma M_1^2}{\gamma + 1} - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}. \tag{36}$$

Формула (35) представляет предельный снизу случай — асимптотику вырождения ударной волны в звуковую и далее в невозмущенный поток:

$$\xi_{\min} = 1 \implies (p_2)_{\min} = p_1, \tag{37}$$

а (36) — предельное сверху значение давления

$$\xi_{\max}^* \implies (p_2)_{\max} = \left(\frac{2\gamma M_1^2}{\gamma + 1} - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \right) p_1. \tag{38}$$

При этом, если $M_1 > 1$, то

$$(p_2)_{\max} > p_1. \tag{39}$$

Поскольку

$$(p_2)_{\min} \leq p_2 \leq (p_2)_{\max}, \quad (40)$$

то из (37) – (40) следует возможность существования только ударных волн сжатия, т.е. скачков уплотнения. Иная ситуация возникает для общей модели $\gamma_1 \neq \gamma_2$. Этот вопрос будет рассматриваться ниже (см. п. 8).

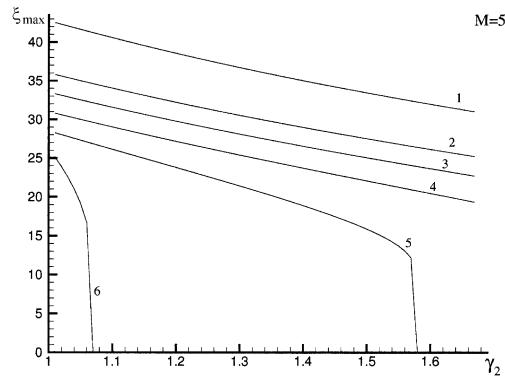


Рис. 4. Зависимость $\xi_{\max}(\gamma_2)$ при $M_1 = 5$ и вариации $\gamma_1 = 1.67$ (кривая 1); 1.4 (2); 1.3 (3); 1.2 (4); 1.1 (5) и 1.01 (6)

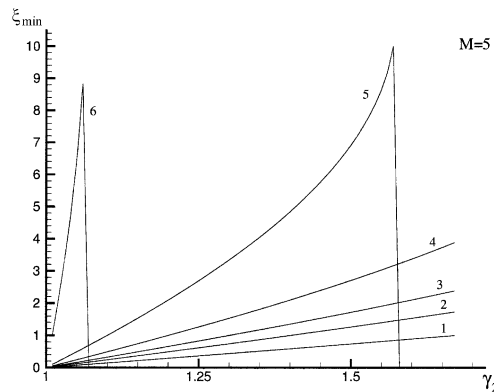


Рис. 5. Зависимость $\xi_{\min}(\gamma_2)$ при $M_1 = 5$ и вариации $\gamma_1 = 1.67$ (кривая 1); 1.4 (2); 1.3 (3); 1.2 (4); 1.1 (5) и 1.01 (6)

На рис. 4, 5 представлены зависимости (34) соответственно максимального и минимального относительного давления $\xi_{\max}(\gamma_1, \gamma_2, M_1)$ и $\xi_{\min}(\gamma_1, \gamma_2, M_1)$ от показателя адиабаты за фронтом скачка γ_2 при фиксированном значении $M_1 = 5$ и вариации показателя адиабаты перед фронтом скачка γ_1 в своей области определения, имеющей физический смысл,

$$\gamma_1 \in (1, 5/3], \quad \gamma_2 \in (1, 5/3]. \quad (41)$$

Кривые 1–6 соответствуют значениям $\gamma_1 = 1.67$; 1.4; 1.3; 1.2; 1.1 и 1.01. Вертикальные участки кривых 5 и 6 отмечают значение γ_2 (для данных γ_1 и M_1), при которых подкоренное выражение в (34) становится отрицательным, т.е. отмечают границу области применимости рассматриваемой модели.

Функция $\xi_{\min}(\gamma_1, \gamma_2)$ при данном фиксированном M_1 является монотонно возрастающей по γ_2 и монотонно убывающей по γ_1 в (41). Функция $\xi_{\max}(\gamma_1, \gamma_2)$ является, наоборот, монотонно возрастающей по γ_1 и монотонно убывающей по γ_2 в (41). Напомним, что в частном случае $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$ значения ξ_{\min} постоянны

и равны 1 для всех значений γ и M_1 см. (35)), а функция $\xi_{\max}(\gamma)$ является слабоубывающей в (41) при данном M_1 от 25 до 31.

Заметим, что кривые 5 и 6 на рис. 4 и 5 стыкуются друг с другом на оси абсцисс: $\xi_{\min} = \xi_{\max}$, поскольку подкоренное выражение в (34) обращается в нуль.

7. Предельный угол отклонения потока. Набегающий поток отклоняется фронтом УВ на угол θ , значение которого, определяемое параметрами γ_1, γ_2, M_1 и ξ , находится в диапазоне

$$\theta \in [-\theta_{\max}, \theta_{\max}], \tag{42}$$

где θ_{\max} — предельный угол разворота потока. Рассмотрим способ вычисления θ_{\max} и его значение как функцию определяющих параметров задачи.

Выпишем производную поляры УВ в виде

$$\frac{\partial \theta}{\partial \xi} = \pm G(\gamma_1, \gamma_2, M_1, \xi). \tag{43}$$

Из (26) – (28) можно получить

$$G(\gamma_1, \gamma_2, M_1, \xi) = \frac{(1+A)T}{\alpha_2 B_0 B_2} \left\{ \frac{\alpha_2 A - 1}{a_2} + \frac{1-A}{2} \left[\frac{\alpha_2}{a_2} + D - \frac{2T^2}{B_1} \left(\frac{1}{a_2} + AD \right) \right] \right\}, \tag{44}$$

где для краткости и обзорности (44) приняты структурирующие формулы обозначения A, B_0, B_1, B_2, D и T :

$$\begin{aligned} T &= \operatorname{tg} \varphi, \\ A &= a_1/a_2, \quad a_1 = \alpha_1 + \xi, \quad a_2 = \alpha_2 \xi + 1, \\ B_0 &= 1 + T^2, \quad B_1 = 1 + AT^2, \quad B_2 = 1 + A^2 T^2, \\ \alpha_1 &= \frac{\gamma_1 + 1}{\gamma_1 - 1}, \quad \alpha_2 = \frac{\gamma_2 + 1}{\gamma_2 - 1}, \quad D = \frac{1}{\xi - 1} - \frac{1}{\xi - \xi_{\min}} + \frac{1}{\xi_{\max} - \xi}, \end{aligned} \tag{45}$$

а выражения для $\operatorname{tg} \varphi, \xi_{\min}$ и ξ_{\max} приведены в (27) и (34).

Заметим, что расписанная с помощью пакета Maple в явном относительно γ_1, γ_2, M_1 и ξ виде, без промежуточных обозначений (45) формула (44) имеет совершенно “необозримый” вид.

Предельное значение угла разворота потока θ_{\max} , существующее при некотором значении относительного давления ξ_* , определяется из условия $\partial \theta / \partial \xi = 0$, т.е. из условия

$$G(\gamma_1, \gamma_2, M_1, \xi_*) = 0. \tag{46}$$

Из (46) определяется значение ξ_* , подстановка которого в (26) позволяет вычислить

$$\theta_{\max}(\gamma_1, \gamma_2, M_1) = \theta(\gamma_1, \gamma_2, M_1, \xi_*). \tag{47}$$

Нахождение значений ξ_* в общем случае, т.е. решение уравнения (46) и затем подстановка его в (26) с учетом (27) и (28) для вычисления θ_{\max} , возможно только численно. Полученная с помощью пакета Maple аналитическая формула (47) для θ_{\max} имеет еще более “необозримый” вид, чем формула для ξ_* , и здесь не приводится.

Аналитические выражения для ξ_* и θ_{\max} могут быть получены в некоторых частных случаях. В предельном случае гиперзвуковых течений $M_1 \geq 1$, пренебрегая младшими членами степеней M_1 , имеем из (34):

$$\xi_{\min}^h = \frac{\gamma_2 - 1}{\gamma_1 - 1}, \quad \xi_{\max}^h = \frac{2\gamma_1 M_1^2}{\gamma_2 + 1} \tag{48}$$

и, также опуская выкладки,

$$\xi_*^h = \frac{\gamma_2 + 1}{2\gamma_2} \xi_{\max}^h = \frac{\gamma_1 M_1^2}{\gamma_2}. \tag{49}$$

(Индекс h отмечает в (48) – (49) гиперзвуковое приближение.) Подчеркнем, что выражение для ξ_{\max}^h в (48) получено удерживанием только членов порядка M_1^4 , а для ξ_{\min}^h необходимо учитывать члены вплоть до M_1^2 , иначе может быть получено неправильное значение асимптоты $\xi_{\min}^h = 1/(\gamma_2 + 1)$.

Подставляя (48) и (49) в (26)–(27) и удерживая только старшие члены при M_1 , получаем асимптоту θ_{\max}^h для гиперзвуковых скоростей УВ:

$$\theta_{\max}^h = \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{\gamma_2^2 - 1}}. \quad (50)$$

Из (50) следует важный факт, что для высокоскоростных течений максимальный угол разворота потока θ_{\max} определяется преимущественно состоянием среды за фронтом скачка и в пределе вообще не зависит от начального (до скачка) состояния, хотя и максимальное ξ_{\max}^h , и критическое ξ_*^h относительные давления зависят как от начального, так и конечного состояния среды.

Численные значения функции $\theta_{\max}^h(\gamma_2)$ возрастают с убыванием γ_2 : значениям $\gamma_2 = 1.67; 1.4; 1.3; 1.2; 1.1$ и 1.01 соответствуют (округленно) значения $\theta_{\max}^h = 36; 45; 50; 56; 65$ и 82 град., а прямой расчет по формулам (26)–(28) для $M_1 = 5$ и $\gamma_1 = 1.4$ дает значения (также округленно) $33, 42, 47, 54, 63$ и 80 град. Для обычно используемой модели неизменности состояния среды на скачке ($\gamma_1 = \gamma_2$) значению $\gamma = 1.4$, характерному для воздуха при не слишком высоких температурах, для потока с $M_1 = 20$ соответствует значение $\theta_{\max}^h = 45$ град., хорошо известное в классической аэродинамике.

Запись (43)–(45) также существенно упрощается в частном случае $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$:

$$G(\gamma, M_1, \xi) = \left\{ -(\gamma + 1)^2 \xi^2 + (\gamma + 1)[\gamma M_1^2 - 2(\gamma - 1)]\xi + \gamma M_1^2(3\gamma - 1) - (\gamma - 1)^2 \right\} \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}. \quad (51)$$

Из (51), в частности, следует, что при $\xi = 1$, т.е. в точке плоскости полярны $(\theta, \xi) = (0, 1)$, соответствующей вырожденному случаю УВ бесконечно малой интенсивности, предельное значение угла наклона полярны

$$\frac{\partial \theta}{\partial \xi} = \pm 4\gamma^2 \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} (M_1^2 - 1). \quad (52)$$

Знаки “+” и “–” соответствуют производным справа ($\theta > 0$) и слева ($\theta < 0$) от точки $\theta = 0$. Отметим, что только в этой точке полярны имеет место разрыв производной $\partial \theta / \partial \xi$.

Максимальное значение θ_{\max} определяется из условий (46)–(47) для данного частного случая (51), что приводит к квадратному уравнению для ξ_* , решение которого можно выписать в явном виде (не только в гиперзвуковом приближении, но и в случае произвольных значений M_1):

$$\xi_* = \frac{1}{2(\gamma + 1)} \left[\gamma M_1^2 \left(1 + \sqrt{1 + \frac{8}{M_1^2}} \right) - 2(\gamma - 1) \right] \quad (53)$$

(второй корень не удовлетворяет условию (42)).

Подставив (53) в (31), получим формулу для предельного угла отклонения потока в этом частном случае

$$\theta_{\max}(\gamma, M_1) = \operatorname{arctg} \left[\frac{(3 - c)\sqrt{a(c + 1)(3 - c)}}{c^2 + 4\gamma - 5} \right], \quad (54)$$

где $c = \sqrt{1 + 8/M_1^2}$, $a = (\gamma - 1)/(\gamma + 1)$.

В гиперзвуковом приближении $M_1 \geq 1$ из (53) и (54) имеем

$$\xi_*^h = M_1^2, \quad (55)$$

$$\theta_{\max}^h = \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{\gamma^2 - 1}}. \quad (56)$$

Естественно, что (55)–(56) совпадают с (49)–(50), если в последних принять $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$.

8. Границы области применимости математической модели. Для исследования этого важного вопроса выпишем некоторые полученные ранее формулы в виде, наиболее удобном для анализа:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{(1 - A) \operatorname{tg} \varphi}{1 + A \operatorname{tg}^2 \varphi}, \quad (57)$$

где

$$A = \frac{\alpha_1 + \xi}{\alpha_2 \xi + 1}, \quad \operatorname{tg}^2 \varphi = \frac{(\xi - 1)(\alpha_2 \xi + 1)}{\alpha_2(\xi - \xi_{\min})(\xi_{\max} - \xi)}, \quad (58)$$

$$\xi_{\min, \max} = \frac{1}{\gamma_2 + 1} \left(1 + \gamma_1 M_1^2 \mp \sqrt{B + \varepsilon} \right), \quad (59)$$

$$B = \gamma_1^2 (M_1^2 - 1)^2, \quad \varepsilon = (\gamma_1^2 - \gamma_2^2) \left(\frac{2\gamma_1 M_1^2}{\gamma_1 - 1} - 1 \right).$$

Напомним, что φ — угол наклона скачка к вектору набегающего потока, θ — угол отклонения потока за фронтом, $\xi = p_2/p_1$ — относительное давление на фронте, коэффициенты α_1 и α_2 определяются в (15).

Уравнения (57)–(59) представляют собой уравнения (26), (27) и (34), записанные в другой форме. Из вида и смысла этих уравнений следуют три основных критерия, определяющих границы области применимости рассматриваемой модели:

1) $\xi_{\min, \max}$ должны быть действительными числами, т.е. должно выполняться

$$B + \varepsilon \geq 0; \quad (60)$$

2) должно выполняться неравенство

$$\xi_{\min} > 0, \quad (61)$$

(заметим в скобках, что должно также выполняться $\xi_{\max} > 0$, но это неравенство справедливо, если справедливо (61), поскольку по определению $\xi_{\max} > \xi_{\min}$);

3) должно выполняться неравенство

$$\operatorname{tg}^2 \varphi \geq 0. \quad (62)$$

Последовательно проанализируем (60)–(62). Из критерия (60) и вида B и ε из (59) имеем следующее. Поскольку всегда $B \geq 0$, то выполнение (60) определяется знаком и модулем ε . Знак ε определяется, в свою очередь, знаками двух сомножителей, составляющих ε . Поскольку данная работа ориентирована на моделирование сверх- и гиперзвуковых течений $M_1 > 1$, то, с учетом области изменения $\gamma_1 \in (1, 5/3]$, имеем $2\gamma_1 M_1^2 / (\gamma_1 - 1) > 1$ во всем интересующем диапазоне параметров; следовательно, знак ε определяется знаком первого множителя. Здесь возможны три ситуации.

Первая ситуация:

$$\gamma_1 = \gamma_2 \implies \varepsilon = 0. \quad (63)$$

Этот вариант есть область хорошо изученной классической аэрогазодинамики с основополагающей гипотезой о неизменности физических свойств газа при его прохождении через фронт УВ. Из (63) и (59) вытекает (37): $\xi_{\min} = 1$, т.е. УВ может существовать только в виде скачков уплотнения (СУ), поскольку

$$\xi_{\min} \leq \xi \leq \xi_{\max}. \quad (64)$$

В этом случае, согласно (58) и (37), при стремлении $\xi \rightarrow \xi_{\min}$ косой скачок имеет асимптотики: по углу наклона $\varphi \rightarrow 90^\circ$ (прямой скачок), по интенсивности $\xi \rightarrow 1$ (невозмущенный поток).

Вторая ситуация:

$$\gamma_1 > \gamma_2 \implies \varepsilon > 0. \quad (65)$$

Это, с точки зрения физики процесса, наиболее вероятная ситуация: за скачком возбуждаются дополнительные степени свободы молекул газа и значение γ уменьшается (убывающие участки кривых на рис. 2). В этом случае неравенство (60) выполняется, т.е. модель по этому критерию находится в области существования решений, однако дополнительно возникают две ситуации уже по критерию (62), связанные с возможностью существования различных значений ξ_{\min} .

а) значения ε малы, так что

$$0 < \xi_{\min} < 1. \quad (66)$$

Критерии (60) и (61) разрешают ξ находиться во всем своем диапазоне (64), однако критерий (62) запрещает часть этого диапазона в соответствии с расположением нулей множителей, составляющих (58), вдоль ξ -оси: $(\xi_{\min}, 1, \xi_{\max})$. В этом случае вместо полного диапазона (64) разрешен поддиапазон

$$1 \leq \xi \leq \xi_{\max}. \quad (67)$$

Говоря другими словами, модель разрешает существование УВ только как СУ и запрещает скачки разрежения (СР).

б) значения ε велики, так что

$$\xi_{\min} < 0. \quad (68)$$

Эту ситуацию дополнительно к критерию (62) запрещает и критерий (61), поэтому, как и в предыдущем случае, разрешен только поддиапазон (67).

Заметим, что на возможность существования ударных волн разрежения в газах при неидеальном уравнении состояния ($P''_{VV} < 0$) указывалось в ряде работ, в том числе ставших классическими (см., например, [2, 11]). Однако в общем случае вопрос о допустимости модели разрыва для газов с аномальными термодинамическими свойствами, описываемыми произвольным уравнением состояния, не решен и в настоящее время.

Во избежание недоразумений укажем, что решение вопроса о существовании УВ как СР с данных позиций лежит вне рамок настоящей работы; здесь анализируется область применимости модели эффективного показателя адиабаты [7, 8], дополненной моделью бесконечно тонкого скачка, и ее использования для описания течений ударными волнами и изучения свойств этой модели (в частности, при априорном задании значений показателя адиабаты до и после фронта скачка).

Однако при определенной модификации возможно расширение модели на область параметров существования УВ не только как СУ, но и как СР.

Третья ситуация:

$$\gamma_1 < \gamma_2 \implies \varepsilon < 0. \quad (69)$$

С точки зрения физики процесса ситуация (69) представляет область параметров p и T перед и за фронтом скачка, располагающихся на возрастающих участках кривой рис. 2 (например, в диапазоне температур от 2400° до 3300° К для давления 10^{-3} атм или от 3100° до 4200° К для давления 1 атм). На этих участках доминирующим является не процесс возбуждения колебательных степеней свободы молекул, что приводит к уменьшению среднего значения γ для газовой смеси, а диссоциация молекул, вызывающая рост γ .

В ситуации (69) возможны два случая:

$$B + \varepsilon < 0, \quad (70)$$

$$B + \varepsilon > 0. \quad (71)$$

Настоящая модель неприменима в области параметров M_1, γ_1, γ_2 , таких, что выполняется (70), поскольку это запрещает критерий (60). Условие же (71) совпадает с критерием (60) и не противоречит остальным критериям существования модели (61)–(62), поскольку из (71), а также определений B и ε в (59) и выкладок, приводящих к (37), следует

$$\xi_{\min} > 1, \quad (72)$$

а (72) приводит к расположению нулей множителей (58) вдоль ξ -оси в следующем порядке: $(1, \xi_{\min}, \xi_{\max})$, вследствие чего весь диапазон (64) является разрешенным.

Ниже приводятся иллюстрации численного анализа границ области применимости модели при вариации определяющих параметров M_1, γ_1, γ_2 .

На рис. 6, 7 представлены кривые, иллюстрирующие границы применимости рассматриваемой математической модели по первому критерию (60). Этот критерий, точнее, его границы детерминируются в $(M_1, \gamma_1, \gamma_2)$ -пространстве гиперплоскостью

$$B + \varepsilon = F(M_1, \gamma_1, \gamma_2) = 0, \quad (73)$$

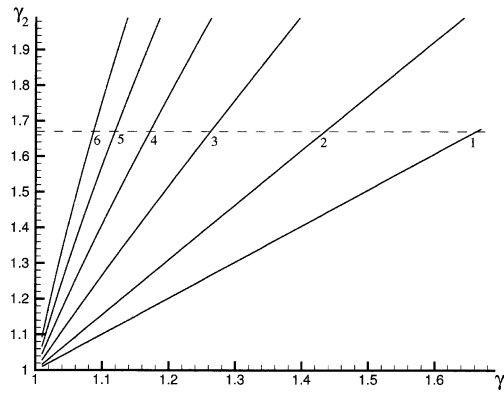


Рис. 6. Границы области применимости модели в плоскости (γ_1, γ_2) при вариации $M_1 = 1.1$ (кривая 1); 2 (2); 3 (3); 4 (4); 5 (5) и 6 (6)

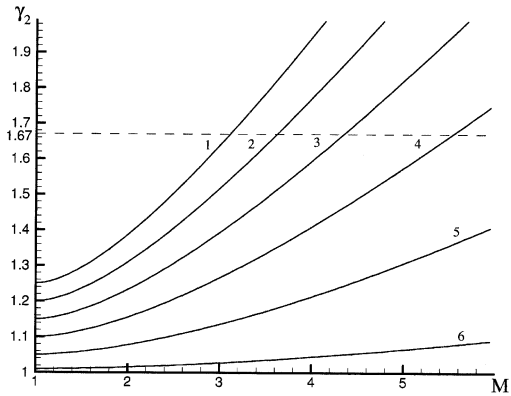


Рис. 7. Границы области применимости модели в плоскости (M_1, γ_2) при вариации $\gamma_1 = 1.25$ (кривая 1); 1.2 (2); 1.15 (3); 1.1 (4); 1.05 (5) и 1.01 (6)

где конкретная запись функции F приведена в (59). Отрисованная в изометрической проекции гиперплоскость (73) имеет малоинформативный вид и здесь не приводится.

Анализ следует провести несколько иным способом. Выберем из трех координат (73) одну в качестве главной и представим ее зависимость от двух других. Удобнее всего в качестве главной принять γ_2 , поскольку относительно нее решение уравнения (73) может быть выписано в аналитическом виде:

$$\gamma_2^* = \gamma_2^*(M_1, \gamma_1) = \gamma_1 \sqrt{1 + \frac{(\gamma_1 - 1)(M_1^2 - 1)^2}{2\gamma_1 M_1^2 - (\gamma_1 - 1)}}. \tag{74}$$

Модель применима в подпространстве под гиперплоскостью (73), т.е. при

$$\gamma_2 < \gamma_2^*(M_1, \gamma_1), \tag{75}$$

и неприменима над гиперплоскостью, т.е. при

$$\gamma_2 > \gamma_2^*(M_1, \gamma_1). \tag{76}$$

Фиксируя γ_1 или M_1 , можно получить из (74) удобные для анализа однопараметрические семейства кривых

$$\gamma_2^* = \gamma_2^*(\gamma_1), \quad M_1 = \text{const}, \tag{77}$$

$$\gamma_2^* = \gamma_2^*(M_1), \quad \gamma_1 = \text{const}. \tag{78}$$

На рис. 6 показаны в плоскости (γ_1, γ_2) границы (77), соответствующие значениям $M_1 = 1.1; 2; 3; 4; 5$ и 6 (кривые 1–6). Модель применима снизу-справа и неприменима сверху-слева от соответствующих кривых. Заметим, что в этой плоскости все точки $\gamma_1 = \gamma_2$ принадлежат области применимости модели, т.е. рассматриваемая модель включает в себя как частный случай модель бесконечно тонкого скачка в классической газовой динамике, справедливую при $M_1 > 1$.

Кривые в данном диапазоне параметров представляются почти прямыми линиями, выходящими из точки $(1, 1)$. При этом с ростом M_1 область применимости модели увеличивается. Подчеркнем, что это относится только к первому критерию (60) и справедливо только до определенных значений $M_1 < M_1^*$, поскольку дальнейшее увеличение M_1 приводит к невыполнению критерия (61), из которого может быть определено значение M_1^* :

$$\xi_{\min}(M_1^*, \gamma_1, \gamma_2) = 0. \quad (79)$$

Поскольку выражение (34) для ξ_{\min} нельзя инверсировать для M_1 , т.е. записать в виде аналитической формулы

$$M_1 = f(\xi_{\min}, \gamma_1, \gamma_2),$$

получение значений $M_1^*(\gamma_1, \gamma_2)$ может быть проведено только численно, что лежит вне рамок настоящей работы.

На рис. 7 представлены в плоскости (M_1, γ_2) границы (78), соответствующие значениям $\gamma_1 = 1.25; 1.2; 1.15; 1.1; 1.05$ и 1.01 (кривые 1–6). Модель применима в областях “снизу-справа” и неприменима в областях “сверху-слева” от кривых. Заметим, что кривые начинаются на оси ординат в точках (γ_2^0) , цифровые значения которых равны цифровым значениям параметра кривых, т.е. при $\gamma_2^0 = \gamma_1$, что естественно вытекает из (74), если положить $M_1 = 1$.

Область применимости модели увеличивается с ростом γ_1 , и при достижении максимального значения своего интервала изменения (41) область применимости модели максимальна и покрывает весь имеющий физический смысл диапазон параметров (пунктирные линии на рис. 6, 7).

Естественно, точки, представляющие частный случай классической аэродинамики $\gamma_1 = \gamma_2$, лежат в области применимости модели.

В заключение автор считает своим приятным долгом выразить благодарность Г. С. Хакимзянову за полезные обсуждения и А. Г. Тарнавскому за помощь в работе над статьей.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 02-01-00097 и 00-07-90297).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Станюкович К.И. Неустановившиеся движения сплошной среды. М.: Наука, 1971.
2. Зельдович Я.Б., Райзер Ю.П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М.: Наука, 1966.
3. Ковеня В.М., Тарнавский Г.А., Черный С.Г. Применение метода расщепления в задачах аэродинамики. Новосибирск: Наука, 1990.
4. Волков В.Ф., Тарнавский Г.А. Нарушение симметрии и гистерезис стационарных и квазистационарных решений уравнений Эйлера и Навье–Стокса // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. 2001. 41, № 11. 1742–1750.
5. Тарнавский Г.А., Тарнавский А.Г. Современные компьютерные технологии и неединственность численных решений задач газовой динамики: некоторые аспекты проблемы // Симметрия и дифференциальные уравнения / под ред. Андреева В.К.. Красноярск: Изд-во ИВМ СО РАН, 2002. 209–213.
6. Li H., Chroun A., Ben-Dor G. Analytical and experimental investigations of the reflection of asymmetric shock waves in steady flows // Fluid Mech. 1999. 390. 25–43.
7. Tarnavsky G.A., Shpak S.I. Effective specific heat ratio for problems of real gas hypersonic flows at bodies // Thermophysics and Aeromechanics. 2001. 8, N 1. 39–53.
8. Тарнавский Г.А., Шпак С.И. Способы расчета эффективного показателя адиабаты при компьютерном моделировании гиперзвуковых течений // Сибирский журн. индустриальной математики. 2001. 4, № 1(7). 177–197.
9. Tables of thermal properties of gases. Nat. Bureau of Standards. Circular 564. New York, 1955.
10. Варгафтик Н.Б. Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей. М.: Физматгиз, 1963.
11. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений. М.: Наука, 1978.

Поступила в редакцию
30.09.2002