УДК 517.988.68

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ УСТОЙЧИВЫХ ИТЕРАЦИОННЫХ МЕТОДОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ НЕКОРРЕКТНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

А. И. Козлов[1]

Обосновывается схема конструирования итерационных процессов решения нелинейных некорректных операторных уравнений, порождающая как известные, так и новые методы. Устанавливается устойчивость предлагаемых методов к погрешностям в исходных данных. Обсуждаются вопросы практической реализации рассматриваемой схемы.

1. Рассматривается операторное уравнение

$$F(x) = 0, \quad x \in H_1, \tag{1}$$

где $F\colon H_1 \to H_2$ — нелинейный оператор, H_1, H_2 — гильбертовы пространства. Предполагается, что оператор $F(x)$ дважды дифференцируем по Гато, причем для всех $x \in \Omega_R(x^*)$ выполняются неравенства

$$\big\|F'(x)\big\| \leqslant N_1, \quad \big\|F''(x)\big\| \leqslant N_2, \tag{2}$$

где $\Omega_R(x^*) = \big\{x \in H_1\colon \|x - x^*\| \leqslant R\big\}$, $R > 0$, x^* — решение уравнения (1). Здесь и далее $\|\cdot\|$ обозначает норму соответствующего пространства. На оператор $F(x)$ не налагается каких-либо условий регулярности, предусматривающих непрерывную обратимость его производной $F'(x)$ либо оператора $F'^*(x)F'(x)$ в окрестности решения уравнения (1). Уравнения этого типа являются в общем случае некорректными [1, 2], так что сколь угодно малая вариация оператора $F(x)$ может привести к существенным изменениям решения исходной задачи либо превратить ее в задачу, не имеющую решений. С другой стороны, к подобным уравнениям сводятся многие важные в прикладном отношении обратные задачи математической физики (см., например, [2–6]). Потребности численного исследования этих задач диктуют необходимость разработки устойчивых методов отыскания решений (1) при наличии погрешностей в задании оператора $F(x)$.

Считаем, что вместо точного оператора $F(x)$ доступно лишь его приближение $\widetilde{F}\colon H_1 \to H_2$, обладающее первой и второй производными Гато, которые удовлетворяют неравенствам (2) с теми же константами N_1, N_2, а также условиям

$$\big\|F(x) - \widetilde{F}(x)\big\| \leqslant \delta, \quad \big\|F'(x) - \widetilde{F}'(x)\big\| \leqslant \delta \quad \forall x \in \Omega_R(x^*). \tag{3}$$

Здесь δ — известный уровень погрешности в задании оператора $F(x)$. В [3, § 7.2; 7–9] для решения уравнения (1) были предложены и исследованы итерационные методы градиентного типа с проектированием на специально выбираемые конечномерные подпространства.

В настоящей работе обосновывается общая схема построения итерационных процессов этого типа, порождающая как известные, так и новые методы. В основе предлагаемой конструкции лежит аппроксимация уравнения (1) задачей минимизации соответствующего функционала невязки на конечномерном аффинном подпространстве. Структура работы следующая. В п. 2 проводятся необходимые вспомогательные построения. В п. 3 устанавливается локальная сильная выпуклость функционала невязки и существование точки его локального минимума на выбранном подпространстве, описывается предлагаемая схема. В п. 4 обсуждаются вопросы практической реализации рассматриваемой схемы.

2. Зафиксируем конечномерное линейное подпространство $M \subset H_1$. Обозначим через P_M ортопроектор из H_1 на M, а через $N\big(F'(x^*)\big)$ — ядро оператора $F'(x^*)$. Будем считать выполненным

Условие 1. Подпространство M выбрано так, что

$$N\big(F'(x^*)\big) \cap M = \{0\}.$$

[1] Марийский государственный университет, физико-математический факультет, пр. Ленина, 1, 424001, г. Йошкар-Ола; e-mail: kozlovv@marsu.ru

Наряду с исходным уравнением (1) рассмотрим аппроксимирующую его задачу

$$\min_{x\in M+\xi} \widetilde{\phi}(x), \quad \widetilde{\phi}(x) = \frac{1}{2}\left\|\widetilde{F}(x)\right\|^2, \tag{4}$$

где $M+\xi = \{x \in H_1 : x = y+\xi,\, y \in M\}$ — аффинное подпространство. Будем предполагать, что управляющий параметр $\xi \in H_1$ удовлетворяет условию

$$\left\|(P_M - E)(x^* - \xi)\right\| \leqslant \Delta. \tag{5}$$

Величина Δ в (5) имеет смысл погрешности аппроксимации искомого решения x^* аффинным подпространством $M+\xi$.

Представим задачу (4) в эквивалентном виде:

$$\min_{x\in M} \widetilde{\varphi}(x), \quad \widetilde{\varphi}(x) = \frac{1}{2}\left\|\widetilde{F}(x+\xi-P_M\xi)\right\|^2. \tag{6}$$

Нетрудно видеть, что если элемент $\widetilde{x} \in M+\xi$ является локальным минимумом в задаче (4), то точка $P_M\widetilde{x}$ доставляет локальный минимум в (6). Справедливо и обратное, т.е. если $\widehat{x} \in M$ является локальным минимумом в задаче (6), то $\widehat{x}+\xi-P_M\xi$ — локальный минимум в (4).

Непосредственно устанавливается, что функционал $\widetilde{\varphi} : H_1 \to \mathbf{R}$ дифференцируем по Гато и его производная имеет вид

$$\widetilde{\varphi}'_{H_1}(x) = \widetilde{F}'^*(x+\xi-P_M\xi)\widetilde{F}(x+\xi-P_M\xi), \quad x \in \Omega_R(x^*).$$

Найдем производную Гато $\widetilde{\varphi}'_M(x)$ функционала $\widetilde{\varphi}$, рассматриваемого как отображение из M в $\mathbf{R}$. Пусть $h \in M$ и $(\cdot,\cdot)_M$ — скалярное произведение в M, индуцированное скалярным произведением в H_1; тогда

$$\lim_{t\to 0_+} t^{-1}\big(\widetilde{\varphi}(x+th) - \widetilde{\varphi}(x)\big) = \big(\widetilde{\varphi}'_{H_1}(x), h\big) = \big(\widetilde{\varphi}'_{H_1}(x), P_M h\big) = \big(P_M\widetilde{\varphi}'_{H_1}(x), h\big)_M, \quad x \in M.$$

Отсюда следует, что

$$\widetilde{\varphi}'_M(x) = P_M\widetilde{F}'^*(x+\xi-P_M\xi)\widetilde{F}(x+\xi-P_M\xi), \quad x \in M. \tag{7}$$

Будем предполагать, что величина Δ в (5) удовлетворяет условию

$$\Delta \leqslant \frac{R}{2}. \tag{8}$$

Тогда для точек $x \in M$, таких, что $\|x - P_M x^*\| \leqslant R/2$, справедливо соотношение

$$\|x+\xi-P_M\xi-x^*\| \leqslant \|P_M x^* + \xi - P_M\xi - x^*\| + \|x - P_M x^*\| \leqslant R.$$

Последнее неравенство дает возможность использовать оценки (2), (3) для точек $x+\xi-P_M\xi$, где $x \in M$, $\|x-P_Mx^*\| \leqslant R/2$. С учетом (2), (3), (5) получаем

$$\begin{aligned}
&\left\|\widetilde{\varphi}'_M(x)\right\| = \left\|P_M\widetilde{F}'^*(x+\xi-P_M\xi)\widetilde{F}(x+\xi-P_M\xi)\right\| = \\
&= \Big\|P_M\widetilde{F}'^*(x+\xi-P_M\xi)\big(\widetilde{F}(x+\xi-P_M\xi) - \widetilde{F}(P_Mx^*+\xi-P_M\xi) - \widetilde{F}'(x+\xi-P_M\xi)(x-P_Mx^*)\big) + \\
&\quad + P_M\widetilde{F}'^*(x+\xi-P_M\xi)\big(\widetilde{F}(P_Mx^*+\xi-P_M\xi) - \widetilde{F}(x^*) - \widetilde{F}'(x^*)(P_Mx^*+\xi-P_M\xi-x^*)\big) + \\
&\quad + P_M\widetilde{F}'^*(x+\xi-P_M\xi)\widetilde{F}'(x+\xi-P_M\xi)(x-P_Mx^*) + P_M\widetilde{F}'^*(x+\xi-P_M\xi)\big(\widetilde{F}(x^*) - F(x^*)\big) + \\
&\quad + P_M\widetilde{F}'^*(x+\xi-P_M\xi)\widetilde{F}'(x^*)(P_Mx^*+\xi-P_M\xi-x^*)\Big\| \geqslant \\
&\geqslant \left\|P_M\widetilde{F}'^*(x+\xi-P_M\xi)\widetilde{F}'(x+\xi-P_M\xi)P_M(x-P_Mx^*)\right\| - \\
&\quad - N_1N_2\|x-P_Mx^*\|^2 - N_1^2\Delta - N_1N_2\Delta^2 - N_1\delta.
\end{aligned} \tag{9}$$

Рассмотрим оператор $P_M\widetilde{F}'^*(x+\xi-P_M\xi)\widetilde{F}'(x+\xi-P_M\xi)P_M$, действующий из конечномерного пространства M в M. Очевидно, что он самосопряжен и имеет спектр, состоящий из конечного числа собственных значений. Тот же вывод справедлив и по отношению к оператору $P_MF'^*(x^*)F'(x^*)P_M$, который в силу условия 1 не содержит точку $\lambda = 0$ в своем спектре. Обозначим через 2ρ длину лакуны спектра оператора $P_M F'^*(x^*)F'(x^*)P_M$ с центром в точке $\lambda = 0$, т.е. длину наибольшего открытого симметричного интервала, не содержащего собственных значений $P_M F'^*(x^*)F'(x^*)P_M$. Для оценки первого слагаемого, стоящего в правой части неравенства (9), воспользуемся следующим утверждением [9].

Лемма 1. *Пусть выполняются условие* 1 *и соотношения*

$$\delta < \frac{\rho}{4N_1}, \quad \|x + \xi - P_M\xi - x^*\| < \frac{\rho - 4N_1\delta}{4N_1N_2}, \quad x \in M.$$

Тогда спектр оператора $P_M\widetilde{F}'^*(x+\xi-P_M\xi)\widetilde{F}'(x+\xi-P_M\xi)P_M\colon M \to M$ *имеет лакуну длины не менее* ρ *с центром в точке* $\lambda = 0$.

Всюду в дальнейшем будем считать выполненным следующее дополнительное условие на погрешности δ, Δ:

$$\delta + N_2\Delta < \frac{\rho}{8N_1}. \tag{10}$$

В силу (10), для точек $x \in M$, таких, что

$$\|x - P_Mx^*\| \leqslant (8N_1N_2)^{-1}\rho, \tag{11}$$

выполняется цепочка неравенств

$$\begin{aligned}\|x + \xi - P_M\xi - x^*\| &\leqslant \|P_Mx^* + \xi - P_M\xi - x^*\| + \|x - P_Mx^*\| \leqslant \\ &\leqslant (8N_1N_2)^{-1}\rho + \Delta < (8N_1N_2)^{-1}\rho + (8N_1N_2)^{-1}(\rho - 8N_1\delta) = (4N_1N_2)^{-1}(\rho - 4N_1\delta).\end{aligned}$$

Таким образом, условия (10) и (11) гарантируют выполнение обоих неравенств из условия леммы 1. Согласно лемме 1, линейный непрерывный оператор $P_M\widetilde{F}'^*(x+\xi-P_M\xi)\widetilde{F}'(x+\xi-P_M\xi)P_M$, действующий из M в M, имеет непрерывный обратный, поэтому для некоторого $q > 0$ и всех $x \in M$, таких, что $\|x - P_Mx^*\| \leqslant R/2$, выполняется

$$\big\|P_M\widetilde{F}'^*(x + \xi - P_M\xi)\widetilde{F}'(x + \xi - P_M\xi)P_M(x - P_Mx^*)\big\| \geqslant q\|x - P_Mx^*\|. \tag{12}$$

Используя (12), перепишем неравенство (9) в виде

$$\big\|\widetilde{\varphi}'_M(x)\big\| \geqslant q\|x - P_Mx^*\| - N_1N_2\|x - P_Mx^*\|^2 - N_1^2\Delta - N_1N_2\Delta^2 - N_1\delta. \tag{13}$$

Из (13) с учетом (8), (11) получаем, что для всех точек $x \in M$, удовлетворяющих условию

$$\|x - P_Mx^*\| \leqslant r_0 = \min\left\{\frac{R}{2}, \frac{q}{2N_1N_2}, \frac{\rho}{8N_1N_2}\right\}, \tag{14}$$

имеет место соотношение

$$\|x - P_Mx^*\| \leqslant 2q^{-1}\Big(\big\|\widetilde{\varphi}'_M(x)\big\| + N_1^2\Delta + N_1N_2\Delta^2 + N_1\delta\Big). \tag{15}$$

Зафиксируем полученный вспомогательный результат.

Теорема 1. *Пусть выполняются условие* 1 *и соотношения* (2), (3), (5), (8), (10). *Тогда для точек* $x \in M$, *удовлетворяющих* (14), *справедлива оценка* (15).

3. Обратимся к исследованию локальных свойств функционала $\widetilde{\varphi}(x)$ на M в окрестности точки P_Mx^*. Ниже через $\overline{D}$ будем обозначать замыкание, а через ∂D — границу множества D. Найдем условия, обеспечивающие локальную сильную выпуклость функционала $\widetilde{\varphi}(x)$ на M в окрестности точки P_Mx^*. В силу (2), оператор $\widetilde{\varphi}'_M(x)\colon M \to M$ дифференцируем по Гато и для $h \in M$; согласно (7) выполняется

$$\begin{aligned}\big(\widetilde{\varphi}'_M(x)\big)'_{H_1}h &= P_M\widetilde{F}'^*(x + \xi - P_M\xi)\widetilde{F}'(x + \xi - P_M\xi)h + \big(P_M\widetilde{F}''(x + \xi - P_M\xi)h\big)^*\widetilde{F}(x + \xi - P_M\xi) = \\ &= \big(\widetilde{\varphi}'_M(x)\big)'_M h = \widetilde{\varphi}''_M(x)h.\end{aligned}$$

Таким образом, вторая производная функционала $\widetilde{\varphi}\colon M \to \mathbf{R}$ имеет вид

$$\widetilde{\varphi}''_M(x)h = P_M\widetilde{F}'^*(x + \xi - P_M\xi)\widetilde{F}'(x + \xi - P_M\xi)P_Mh + \big(P_M\widetilde{F}''(x + \xi - P_M\xi)P_Mh\big)^*\widetilde{F}(x + \xi - P_M\xi). \tag{16}$$

Пусть в дополнение к (8), (10) выполняется следующее условие на погрешности δ, Δ:

$$\delta + N_1\Delta \leqslant \frac{q}{4N_2}. \tag{17}$$

Учитывая (12), (16) и (17), для всех точек $x \in \overline{D}_0$, где

$$D_0 = \{x \in M : \|x - P_M x^*\| < r_1\}, \quad r_1 = \min\left\{\frac{q}{4N_1N_2}, r_0\right\},$$

получаем

$$\begin{aligned}(\widetilde{\varphi}_M''(x)h, h) &\geqslant q\|h\|^2 - \big\|\widetilde{F}''(x+\xi-P_M\xi)\big\|\big\|\widetilde{F}(x+\xi-P_M\xi)\big\|\|h\|^2 \geqslant \\ &\geqslant \Big(q - N_2\Big(\big\|\widetilde{F}(x+\xi-P_M\xi) - \widetilde{F}(P_Mx^*+\xi-P_M\xi)\big\| + \\ &\quad + \big\|\widetilde{F}(P_Mx^*+\xi-P_M\xi) - \widetilde{F}(x^*)\big\| + \big\|\widetilde{F}(x^*) - F(x^*)\big\|\Big)\Big)\|h\|^2 \geqslant \\ &\geqslant \big(q - N_1N_2\|x - P_Mx^*\| - N_1N_2\Delta - N_2\delta\big)\|h\|^2 \geqslant \frac{q}{2}\|h\|^2.\end{aligned} \tag{18}$$

В силу теоремы 2 из [10, с. 25] справедлива

Теорема 2. *Пусть выполняются условие* 1 *и соотношения* (2), (3), (5), (8), (10), (17). *Тогда функционал $\widetilde{\varphi}(x)$ является сильно выпуклым на множестве $\overline{D}_0$.*

Докажем существование точки $\overline{x} \in D_0$, доставляющий локальный минимум $\widetilde{\varphi}(x)$ на D_0, т.е. такой, что $\widetilde{\varphi}_M'(\overline{x}) = 0$. С этой целью воспользуемся известной леммой об остром угле (см. [11, с. 20]).

Лемма 2. *Пусть $f\colon \overline{D} \to G$ — непрерывное отображение, $D \subset G$, G — конечномерное евклидово пространство со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)_G$. Предположим, что $a \in D$ и выполняется условие*

$$\big(f(x), x - a\big)_G \geqslant 0 \quad \forall x \in \partial D.$$

Тогда уравнение $f(x) = 0$ имеет, по крайней мере, одно решение $x \in \overline{D}$.

Пусть в обозначениях леммы

$$f(x) = \widetilde{\varphi}_M'(x), \quad a = P_Mx^*, \quad D = D_0, \quad G = M.$$

Будем считать, что погрешности δ, Δ достаточно малы, так что

$$N_1^2\Delta + N_1N_2\Delta^2 + N_1\delta < \frac{1}{4}\,qr_1. \tag{19}$$

Используя (12) и (19), для точек $x \in \partial D_0$ оценим

$$\begin{aligned}&(\widetilde{\varphi}_M'(x), x - P_Mx^*) = \big(P_M\widetilde{F}'^*(x+\xi-P_M\xi)\widetilde{F}(x+\xi-P_M\xi), x - P_Mx^*\big) = \\ &\quad = \Big(P_M\widetilde{F}'^*(x+\xi-P_M\xi)\big(\widetilde{F}(x+\xi-P_M\xi) - \widetilde{F}(P_Mx^*+\xi-P_M\xi) - \\ &\qquad - \widetilde{F}'(x+\xi-P_M\xi)(x - P_Mx^*)\big), x - P_Mx^*\Big) + \Big(P_M\widetilde{F}'^*(x+\xi-P_M\xi)\big(\widetilde{F}(P_Mx^*+\xi-P_M\xi) - \\ &\qquad - \widetilde{F}(x^*) - \widetilde{F}'(x^*)(P_Mx^*+\xi-P_M\xi-x^*)\big), x - P_Mx^*\Big) + \\ &\qquad + \big(P_M\widetilde{F}'^*(x+\xi-P_M\xi)(\widetilde{F}(x^*) - F(x^*)), x - P_Mx^*\big) + \\ &\qquad + (P_M\widetilde{F}'^*(x+\xi-P_M\xi)\widetilde{F}'(x^*)(P_Mx^*+\xi-P_M\xi-x^*), x - P_Mx^*) + \\ &\qquad + \big(P_M\widetilde{F}'^*(x+\xi-P_M\xi)\widetilde{F}'(x+\xi-P_M\xi)(x - P_Mx^*), x - P_Mx^*\big) \geqslant \\ &\quad \geqslant q\|x - P_Mx^*\|^2 - N_1N_2\|x - P_Mx^*\|^3 - N_1^2\Delta\|x - P_Mx^*\| - N_1N_2\Delta^2\|x - P_Mx^*\| - N_1\delta\|x - P_Mx^*\| \geqslant \\ &\quad \geqslant r_1\left(\frac{3}{4}\,qr_1 - \big(N_1^2\Delta + N_1N_2\Delta^2 + N_1\delta\big)\right) \geqslant \frac{1}{2}\,qr_1^2 > 0.\end{aligned}$$

В силу последнего неравенства $\widetilde{\varphi}_M'(x) \neq 0$ для $x \in \partial D_0$. Непосредственно из леммы 2 вытекает

Теорема 3. *Пусть выполняются условие* 1 *и соотношения* (2), (3), (5), (8), (10), (19). *Тогда существует точка $\overline{x} \in D_0$, такая, что $\widetilde{\varphi}_M'(\overline{x}) = 0$.*

Следствие. *Существует единственная точка $\overline{x} \in D_0$, для которой $\widetilde{\varphi}_M'(\overline{x}) = 0$.*

Для практического нахождения локального минимума функционала $\widetilde{\varphi}(x)$ могут использоваться различные методы безусловной минимизации на конечномерном подпространстве M. Как правило, такие методы вырабатывают релаксационные последовательности $\{x_n\} \subset M : \widetilde{\varphi}(x_{n+1}) \leqslant \widetilde{\varphi}(x_n)$. Найдем условия, гарантирующие принадлежность области D_0 всех точек произвольной релаксационной последовательности, минимизирующей функционал $\widetilde{\varphi}(x)$ на M. Пусть x_0 — начальная точка рассматриваемого итерационного процесса. Потребуем, чтобы множество уровня $E(x_0) = \{x \in M : \widetilde{\varphi}(x) \leqslant \widetilde{\varphi}(x_0)\}$ целиком лежало в области сильной выпуклости функционала $\widetilde{\varphi}(x)$. Из (18), согласно [10, с. 25], получаем

$$\widetilde{\varphi}(x) \geqslant \widetilde{\varphi}(x_0) + \big(\widetilde{\varphi}'_M(x_0),\, x - x_0\big) + \frac{q}{4}\,\|x - x_0\|^2.$$

Для любой точки $x \in E(x_0)$ имеем

$$\begin{aligned}\frac{q}{4}\,\|x - x_0\|^2 &\leqslant \big(\widetilde{\varphi}'_M(x_0),\, x_0 - x\big) = \\ &= \big(P_M \widetilde{F}'^*(x_0 + \xi - P_M\xi)\widetilde{F}(x_0 + \xi - P_M\xi),\, x_0 - x\big) \leqslant \\ &\leqslant N_1\Big(\big\|\widetilde{F}(x_0 + \xi - P_M\xi) - \widetilde{F}(P_M x^* + \xi - P_M\xi)\big\| + \big\|\widetilde{F}(P_M x^* + \xi - P_M\xi) - \widetilde{F}(x^*)\big\| + \\ &\quad + \big\|\widetilde{F}(x^*) - F(x^*)\big\|\Big)\|x_0 - x\| \leqslant \big(N_1^2\|x_0 - P_M x^*\| + N_1^2\Delta + N_1\delta\big)\|x_0 - x\|.\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\|x_0 - x\| \leqslant 4q^{-1}\big(N_1^2\|x_0 - P_M x^*\| + N_1^2\Delta + N_1\delta\big).$$

Пусть погрешности δ, Δ удовлетворяют условию

$$8N_1^2\Delta + 8N_1\delta \leqslant q r_1, \tag{20}$$

а начальное приближение $x_0 \in M$ выбрано так, что

$$\|x_0 - P_M x^*\| \leqslant r_2 = \frac{q r_1}{8N_1^2 + 2q}. \tag{21}$$

Тогда

$$\|x - P_M x^*\| \leqslant \|x_0 - x\| + \|x_0 - P_M x^*\| \leqslant q^{-1}\big((4N_1^2 + q)\|x_0 - P_M x^*\| + 4N_1^2\Delta + 4N_1\delta\big) \leqslant r_1.$$

В силу последнего неравенства имеет место включение $E(x_0) \subset D_0$. При выборе начального приближения $x_0 \in M$, согласно (21), все точки релаксационной последовательности $\{x_n\}$ начиная с x_0 лежат в области сильной выпуклости функционала $\widetilde{\varphi}(x)$. Хорошо известно, что для многих методов минимизации сильно выпуклых функционалов в конечномерном пространстве характерна быстрая сходимость вырабатываемых релаксационных последовательностей $\{x_n\}$ к единственной точке минимума [12, гл. 5; 13, гл. 1]. В силу непрерывности $\widetilde{\varphi}'_M(x)$, для таких последовательностей $\lim\limits_{n\to\infty} \widetilde{\varphi}'_M(x_n) = \widetilde{\varphi}'_M(\overline{x}) = 0$. Поскольку задачи (4) и (6) эквивалентны, точки $P_{M+\xi}x_n$ при $n \to \infty$ сходятся к точке локального минимума функционала $\widetilde{\phi}(x)$ на $M + \xi$. Непосредственно из оценки (15) вытекает

Теорема 4. *Пусть выполняются условие* 1, *соотношения* (2), (3), (5), *погрешности* δ, Δ *удовлетворяют условиям* (8), (10), (17), (19), (20), *а начальное приближение* $x_0 \in M$ *выбрано согласно* (21). *Тогда для произвольной релаксационной последовательности* $\{x_n\}$, *минимизирующей функционал* $\widetilde{\varphi}(x)$, *справедливо предельное соотношение*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\|P_{M+\xi}x_n - x^*\| \leqslant q^{-1}\big((2N_1^2 + q)\Delta + 2N_1N_2\Delta^2 + 2N_1\delta\big). \tag{22}$$

Согласно (22), последовательность $\{P_{M+\xi}x_n\}$ при $n \to \infty$ стабилизируется в окрестности x^* с радиусом, пропорциональным погрешностям δ, Δ.

Таким образом, приходим к следующей общей схеме построения устойчивых итерационных методов решения уравнения (1). Вначале фиксируется конечномерное подпространство $M \subset H_1$, удовлетворяющее условию 1. Уравнение (1) аппроксимируется задачей (4), которая заменяется эквивалентной задачей (6). Выбирается итерационный метод, минимизирующий локально сильно выпуклый функционал $\widetilde{\varphi}(x)$ на M и вырабатывающий релаксационную последовательность $\{x_n\} \subset M$, сходящуюся к точке локального минимума $\widetilde{\varphi}(x)$ на M. При выборе начального приближения $x_0 \in M$ в достаточной близости от $P_M x^*$ все вырабатываемые точки $\{x_n\}$ лежат в области сильной выпуклости $\widetilde{\varphi}(x)$ и при $n \to \infty$ сходятся к единственной точке локального минимума $\widetilde{\varphi}(x)$ на M. При этом последовательность $\{P_{M+\xi}x_n\}$, $n \to \infty$, стабилизируется в малой окрестности решения исходного уравнения, определенной соотношением (22). Альтернативный подход к созданию итерационных методов решения (1) развивается в работах [3, § 7.1; 14–17]. Предложенная в этих работах конструкция основана на линеаризации исходного уравнения в текущей итерационной точке и на приближенной аппроксимации решения линеаризованной задачи с использованием процедур регуляризации линейных некорректных уравнений. Практическую реализацию получаемых таким образом вычислительных схем затрудняет необходимость определения момента останова, согласованного с уровнем погрешностей исходных данных. Из (22) следует, что итерационные методы, построенные по указанной схеме, лишены этого недостатка.

4. Обсудим вкратце аспекты практической реализации представленной схемы. Положим

$$x(c) = \sum_{i=1}^{N} c^{(i)} e^{(i)},$$

где $N = \dim M$, $c = (c^{(i)})_{i=1}^{N}$, $\{e^{(i)}\}_{i=1}^{N}$ — ортонормированный базис в M. Подставляя $x(c)$ в (6), получаем задачу

$$\min_{c\in \mathrm{R}^N} \widetilde{\psi}(c), \quad \widetilde{\psi}(c) = \frac{1}{2}\left\| \widetilde{F}\Big(\sum_{i=1}^{N} c^{(i)} e^{(i)} + \xi - P_M\xi\Big)\right\|^2.$$

Непосредственно устанавливается, что для любой точки $x = x(c) \in M$ выполняется

$$\big\|\widetilde{\varphi}'_M(x)\big\| = \big\|\widetilde{\psi}\,'(c)\big\|. \tag{23}$$

С учетом (23) перепишем (15) в виде

$$\big\|x(c) - P_M x^*\big\| \leqslant 2q^{-1}\Big(\big\|\widetilde{\psi}\,'(c)\big\| + N_1^2\Delta + N_1N_2\Delta^2 + N_1\delta\Big). \tag{24}$$

Релаксационная последовательность $\{c_n\} \subset \mathrm{R}^N$, минимизирующая функцию $\widetilde{\psi}(c)$, сходится к точке локального минимума функционала $\widetilde{\psi}(c)$. Соответствующая ей последовательность $\big\{x(c_n)\big\}$, где

$$x(c_n) = \sum_{i=1}^{N} c_n^{(i)} e^{(i)},$$

сходится к точке локального минимума функционала $\widetilde{\varphi}(x)$ на M. В силу (22) и (24), точки

$$P_{M+\xi}\big(x(c_n)\big) = x(c_n) + \xi - P_M\xi$$

при $n\to\infty$ стабилизируются в окрестности решения уравнения (1), причем

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left\|P_{M+\xi}\big(x(c_n)\big) - x^*\right\| \leqslant q^{-1}\big((2N_1^2+q)\Delta + 4N_1N_2\Delta^2 + 2N_1\delta\big).$$

Рассмотрим пример реализации предложенной схемы, отвечающий методу градиентного спуска с постоянным шагом [12, с. 260]

$$x_0 \in M, \quad x_{n+1} = x_n - \gamma\,\widetilde{\varphi}'_M(x_n), \quad \gamma > 0. \tag{25}$$

Из (25) с учетом того, что $x_n \in M$, $n \geqslant 0$, имеем

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \gamma P_M \widetilde{F}\,'^*(x_n + \xi - P_M\xi)\widetilde{F}(x_n + \xi - P_M\xi) = \\ &= P_M(x_n - \gamma \widetilde{F}\,'^*(x_n + \xi - P_M\xi)\widetilde{F}(x_n + \xi - P_M\xi)), \quad n \geqslant 1. \end{aligned}$$

Положим $\widetilde{x}_n = x_n + \xi - P_M\xi$. Поскольку $\widetilde{x}_n \in M + \xi$, $n \geqslant 1$, последний итерационный процесс может быть представлен в виде

$$\begin{aligned} \widetilde{x}_0 \in M + \xi, \quad \widetilde{x}_{n+1} &= P_M\big(x_n - \gamma\widetilde{F}\,'^*(x_n + \xi - P_M\xi)\widetilde{F}(x_n + \xi - P_M\xi)\big) + \xi - P_M\xi = \\ &= P_M\big(\widetilde{x}_n - \xi - \gamma\widetilde{F}\,'^*(\widetilde{x}_n)\widetilde{F}(\widetilde{x}_n)\big) + \xi. \end{aligned} \tag{26}$$

Аппроксимационные свойства итераций (26) по отношению к уравнению (1) ранее подробно исследовались в [8, 9, 18]. Дальнейшие примеры устойчивых итерационных процессов для решения этого уравнения могут быть получены на основе различных вариантов метода сопряженных градиентов, а также квазиньютоновских методов [13, гл. 3, § 2, 3].

Автор признателен проф. М. Ю. Кокурину за стимулирующие обсуждения результатов настоящей работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979.
2. *Бакушинский А.Б., Гончарский А.В.* Итеративные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1989.
3. *Bakushinsky A., Goncharsky A.* Ill-Posed Problems: Theory and Applications. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1994.
4. *Горюнов А.А., Сасковец А.В.* Обратные задачи рассеяния в акустике. М.: Изд-во МГУ, 1989.
5. *Денисов А.М.* Введение в теорию обратных задач. М.: Изд-во МГУ, 1994.
6. *Тихонов А.Н., Леонов А.С., Ягола А.Г.* Нелинейные некорректные задачи. М.: Наука, 1995.
7. *Бакушинский А.Б.* Итеративные методы градиентного типа для нерегулярных операторных уравнений // ЖВМ и МФ. 1998. **38**, № 12. 1962–1966.
8. *Бакушинский А.Б.* Итеративные методы градиентного типа с проектированием на фиксированное подпространство для решения нерегулярных операторных уравнений // ЖВМ и МФ. 2000. **40**, № 10. 1447–1450.
9. *Бакушинский А.Б., Кокурин М.Ю., Юсупова Н.А.* Об итеративных методах градиентного типа для решения нелинейных некорректных уравнений // Сибирский журн. вычисл. матем. 2001. № 4. 317–329.
10. *Васильев Ф.П.* Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1981.
11. *Красносельский М.А., Забрейко П.П.* Геометрические методы нелинейного анализа. М.: Наука, 1975.
12. *Васильев Ф.П.* Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1980.
13. *Поляк Б.Т.* Введение в оптимизацию. М.: Наука, 1983.
14. *Бакушинский А.Б.* Итеративные методы для решения нелинейных операторных уравнений без свойства регулярности // Фундаментальная и прикл. матем. 1997. **3**, № 3. 685–692.
15. *Бакушинский А.Б.* О скорости сходимости итерационных процессов для нелинейных операторных уравнений // ЖВМ и МФ. 1998. **38**, № 4. 559–563.
16. *Кокурин М.Ю., Юсупова Н.А.* О невырожденных оценках скорости сходимости итерационных методов решения некорректных нелинейных операторных уравнений // ЖВМ и МФ. 2000. **40**, № 6. 832–837.
17. *Бакушинский А.Б., Кокурин М.Ю., Юсупова Н.А.* Необходимые условия сходимости итерационных методов решения нелинейных операторных уравнений без свойства регулярности // ЖВМ и МФ. 2000. **40**, № 7. 986–996.
18. *Бакушинский А.Б., Кокурин М.Ю., Козлов А.И.* Об итеративных методах градиентного типа для решения нелинейных некорректных операторных уравнений // Обратные и некорректные задачи прикладной математики. Труды XII Байкальской международной конференции “Методы оптимизации и их приложения”. Т. 4. Иркутск: ИСЭМ СО РАН, 2001. 31–35.

Поступила в редакцию
02.10.2002