

УДК 519.6

О РАЗРЕШИМОСТИ ОБОБЩЕННОЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

И. В. Колос¹, М. В. Колос²

В данной работе получены априорные неравенства с негативной нормой для дифференциальных уравнений гиперболического типа с граничными условиями Дирихле в случае, когда правая часть принадлежит пространству обобщенных функций. Доказаны существование и единственность обобщенного решения задачи и сходимость приближенного метода решения.

Полученные в данной статье результаты основаны на подходе, разработанном в [1–4, 7] к решению задачи Дирихле для гиперболических уравнений с правыми частями, принадлежащими пространству обобщенных функций.

Пусть в n -мерном евклидовом пространстве E_n задана замкнутая ограниченная область P с границей $\partial P = \Gamma$, в каждой точке которой существует единственная нормаль \mathbf{n}_0 ; $C^2(P)$ — множество дважды дифференцируемых в классическом смысле функций $u(x)$ на P ; $C_1^2(P)$ — множество функций $u(x) \in C^2(P)$, для которых выполняется условие

$$u(x)|_{x \in \Gamma} = 0. \tag{1}$$

Введем обозначения: $L_2(P)$ — гильбертово пространство интегрируемых с квадратом функций в смысле Лебега на P ; $(\cdot, \cdot)_{0P}$, $\|\cdot\|_{0P}$ — скалярное произведение и норма в $L_2(P)$; $W_2^1(P)$ — положительное соболевское пространство;

$$(u, v)_{1P} = \int_P \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} + u(x)v(x) \right) dP$$

— скалярное произведение в $W_2^1(P)$; $\|u\|_{1P} = \sqrt{(u, u)_{1P}}$ — норма в $W_2^1(P)$.

Справедливо неравенство $\|u\|_{0P} \leq k \|u\|_{1P} \quad \forall u \in W_2^1(P)$, $k = \text{const}$.

Рассмотрим на P линейное дифференциальное выражение второго порядка

$$Nu = - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} \right) + a_0(x)u(x), \tag{2}$$

где $a_{ij}(x) = a_{ji}(x) \in C^2(P)$, $i, j = 1, \dots, n$, $a_0(x) \in C(P)$, $C(P)$ — пространство непрерывных функций на P , $a_0(x) \geq c_0$ для всех $x \in P$, $c_0 = \inf_x \{a_0(x) | x \in P\} > 0$.

Предполагаем, что справедливо также неравенство

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \lambda \sum_{i=1}^n \xi_i^2, \quad x \in P, \tag{3}$$

где λ — положительная константа, ξ_i — произвольные вещественные числа ($i = 1, \dots, n$).

Соотношения (1)–(3) задают в пространстве $L_2(P)$ замкнутый линейный оператор \mathcal{B} , такой, что $\mathcal{B}u = Nu$ для всех $u \in C_1^2(P)$. Оператор \mathcal{B} имеет плотную в $L_2(P)$ область определения $D(\mathcal{B})$, является симметрическим и положительно-определенным, т.е. справедливы соотношения

$$\begin{aligned} (\mathcal{B}u, v)_{0P} &= (u, \mathcal{B}v)_{0P} \quad \forall u, v \in D(\mathcal{B}), \\ (\mathcal{B}u, u)_{0P} &\geq c \|u\|_{0P}^2 \quad \forall u \in D(\mathcal{B}), \quad c = \text{const} > 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Введем обозначение $(u, v)_{\mathcal{B}} = (\mathcal{B}u, v)_{0P}$ для всех $u, v \in D(\mathcal{B})$. Пополним $D(\mathcal{B})$ по этому скалярному произведению. Полученное пространство обозначим через $H_{\mathcal{B}}$. Примем это пространство за положительное

¹ Университет Российской академии образования, ул. Б. Полянка, 58, 109180, Москва; e-mail: rektorat@urao.edu

² Научно-исследовательский вычислительный центр, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, 119992, Москва; e-mail: arush@srcc.msu.su

$H_{\mathcal{B}} = H_{\mathcal{B}}^+$ и построим по $H_{\mathcal{B}}^+$ и $L_2(P)$ негативное пространство $H_{\mathcal{B}}^-$. Пусть $f(x) \in L_2(P)$. Тогда выражение $(f, u)_{0P}$, $u \in H_{\mathcal{B}}^+$ определяет непрерывный функционал $l_f(u)$ на $H_{\mathcal{B}}^+$ (непрерывность следует из (4)) и

$$|(f, u)_{0P}| = |l_f(u)| \leq \|f\|_{0P} \|u\|_{0P} \leq c \|f\|_{0P} \|u\|_+, \quad f \in L_2(P), \quad u \in H_{\mathcal{B}}^+ \quad (H_{\mathcal{B}}^+ \subset L_2(P)),$$

где $\|\cdot\|_+$ — норма в $H_{\mathcal{B}}^+$. Пополним $L_2(P)$ по норме

$$\|f\|_- = \sup_u \left(\frac{|(f, u)_{0P}|}{\|u\|_+}, \quad f \in L_2(P), \quad u \in H_{\mathcal{B}}^+, \quad \|u\|_+ \neq 0 \right).$$

Полученное пополнение задает пространство $H_{\mathcal{B}}^-$. Оператор \mathcal{B} непрерывно действует из $H_{\mathcal{B}}^+$ в $H_{\mathcal{B}}^-$.

Пусть $[0, t]$ — некоторый отрезок и переменная $\tau \in [0, t]$. Определим область $Q = P \times [0, t]$. Пусть $L_2(Q)$ — пространство функций $u(\tau, x)$ на Q , отображающих сегмент $[0, t]$ в пространство E_n и таких, что

$$\int_0^t \|u(\tau)\|_{0P}^2 d\tau = \|u\|_{0Q}^2 < \infty,$$

где $\|\cdot\|_{0Q}$ — норма в $L_2(Q)$.

Рассмотрим на пространстве $L_2(Q)$ дифференциальный оператор

$$\mathcal{L}_1 u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + \mathcal{B}u, \quad u \in D(\mathcal{L}_1),$$

где $D(\mathcal{L}_1)$ — множество функций $u(\tau, x)$, заданных в области Q , дважды непрерывно дифференцируемых по $\tau \in [0, t]$. По переменной $x \in P$ функции $u(\tau, x) \in H_{\mathcal{B}}^+$ и удовлетворяют условиям

$$u(\tau, x)|_{\tau=0} = 0, \quad \frac{\partial u(\tau, x)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} = 0, \quad u(\tau, x)|_{x \in \Gamma} = 0. \quad (5)$$

Введем обозначения: $W_{20}^1(Q)$ — пополнение множества $D(\mathcal{L}_1)$ по норме

$$\|u\|_{10Q} = \left(\int_Q \left[\left(\frac{\partial u}{\partial \tau} \right)^2 + u \mathcal{B}u \right] dQ \right)^{1/2}; \quad (6)$$

$\|\cdot\|_{10Q}$, $(\cdot, \cdot)_{10Q}$ — норма и скалярное произведение в положительном пространстве $W_{20}^1(Q)$; $W_{20}^{-1}(Q)$ — негативное пространство, полученное пополнением $L_2(Q)$ по норме

$$\|v\|_{-10Q} = \sup_u \left[\frac{|(u, v)_{0Q}|}{\|u\|_{10Q}}, \quad v \in L_2(Q), \quad u \in W_{20}^1(Q), \quad \|u\|_{10Q} \neq 0 \right].$$

Обозначим через $D(\mathcal{L}_1^*)$ множество функций $u(\tau, x)$, имеющих хотя бы две производных в классическом смысле по τ , а по x функции $u(\tau, x) \in H_{\mathcal{B}}^+$ и удовлетворяют условиям

$$u(\tau, x)|_{\tau=t} = 0, \quad \frac{\partial u(\tau, x)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=t} = 0, \quad u(\tau, x)|_{x \in \Gamma} = 0. \quad (7)$$

Пусть $W_{2t}^1(Q)$ — пополнение множества $D(\mathcal{L}_1^*)$ по норме (6), а $W_{2t}^{-1}(Q)$ негативное пространство для $W_{2t}^1(Q)$; \mathcal{L}_1^* — сопряженный оператор к \mathcal{L}_1 ;

$$\mathcal{L}_1^* u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + \mathcal{B}u, \quad u \in D(\mathcal{L}_1^*).$$

Расширим операторы \mathcal{L}_1 и \mathcal{L}_1^* на все пространство $W_{20}^1(Q)$ и $W_{2t}^1(Q)$ соответственно. Расширенные операторы будем обозначать \mathcal{L} и \mathcal{L}^* . Введем оператор

$$\mathcal{J}u \equiv \int_t^\tau b^{-1}(s)u(s, x) ds = v(\tau, x), \quad (8)$$

где $b(\tau)$ — неизвестная функция, которую надо выбирать так, чтобы скалярное произведение $(\mathcal{L}u, \mathcal{J}u)_{0Q}$ было положительно определено, т.е. $(\mathcal{L}u, \mathcal{J}u)_{0Q} \geq \|u\|_{10Q}^2$. Отметим, что

$$v(t, x) = 0, \quad \frac{\partial v(\tau, x)}{\partial \tau} = b^{-1}(\tau)u(\tau, x), \quad u(\tau, x) = b(\tau) \frac{\partial v(\tau, x)}{\partial \tau}. \quad (9)$$

Рассмотрим скалярное произведение $(\mathcal{L}u, \mathcal{J}u)_{0Q}$. Справедливо соотношение

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}u, \mathcal{J}u)_{0Q} &= (\mathcal{L}u, v)_{0Q} = \int_Q \frac{\partial^2 u(\tau, x)}{\partial \tau^2} v(\tau, x) dQ + \int_Q \mathcal{B}u(\tau, x)v(\tau, x) dQ = \\ &= \int_Q \frac{\partial^2 u(\tau, x)}{\partial \tau^2} v(\tau, x) dQ + \int_Q u(\tau, x)\mathcal{B}v(\tau, x) dQ. \end{aligned} \quad (10)$$

Последнее равенство справедливо в силу симметричности оператора \mathcal{B} .

Преобразуем первое слагаемое в правой части (10) следующим образом. Перебросим операцию дифференцирования на функцию v и, применяя формулу Грина и используя граничные условия, находим

$$\int_Q \frac{\partial^2 u(\tau, x)}{\partial \tau^2} v(\tau, x) dQ = \int_Q u(\tau, x) \frac{\partial^2 v(\tau, x)}{\partial \tau^2} dQ - \int_P u(t, x) \frac{\partial v(\tau, x)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=t} dP.$$

Таким образом,

$$(\mathcal{L}u, \mathcal{J}u)_{0Q} = \int_Q u(\tau, x) \frac{\partial^2 v(\tau, x)}{\partial \tau^2} dQ - \int_P u(t, x) \frac{\partial v(\tau, x)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=t} dP + \int_Q u(\tau, x)\mathcal{B}v(\tau, x) dQ. \quad (11)$$

Преобразуем первое слагаемое в (11). Заменим $u(\tau, x)$ его представлением из (9); интегрируя по частям и применяя формулу Грина, имеем:

$$\begin{aligned} \int_Q u(\tau, x) \frac{\partial^2 v(\tau, x)}{\partial \tau^2} dQ &= \int_P b(t) \left[\frac{\partial v(\tau, x)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=t} \right]^2 dP - \int_P b(0) \left[\frac{\partial v(\tau, x)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} \right]^2 dP - \\ &- \int_Q \frac{db(\tau)}{d\tau} \left[\frac{\partial v(\tau, x)}{\partial \tau} \right]^2 dQ - \int_Q b(\tau) \frac{\partial v(\tau, x)}{\partial \tau} \frac{\partial^2 v(\tau, x)}{\partial \tau^2} dQ. \end{aligned}$$

Отсюда получаем, что

$$\begin{aligned} 2 \int_Q b(\tau) \frac{\partial v(\tau, x)}{\partial \tau} \frac{\partial^2 v(\tau, x)}{\partial \tau^2} dQ &= \int_P b(t) \left[\frac{\partial v(\tau, x)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=t} \right]^2 dP - \int_P b(0) \left[\frac{\partial v(\tau, x)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} \right]^2 dP - \\ &- \int_Q \frac{db(\tau)}{d\tau} \left[\frac{\partial v(\tau, x)}{\partial \tau} \right]^2 dQ. \end{aligned} \quad (12)$$

Интегрируя по частям третье слагаемое в правой части (11), находим

$$\begin{aligned} \int_Q u(\tau, x)\mathcal{B}v(\tau, x) dQ &= \int_Q b(\tau) \frac{\partial v(\tau, x)}{\partial \tau} \mathcal{B}v(\tau, x) dQ = \int_Q \frac{\partial}{\partial \tau} [b(\tau)v(\tau, x)\mathcal{B}v(\tau, x)] dQ - \\ &- \int_Q \frac{\partial}{\partial \tau} [b(\tau)\mathcal{B}v(\tau, x)]v(\tau, x) dQ = \int_S b(\tau)v(\tau, x)\mathcal{B}v(\tau, x) \cos(\tau, x) dS - \int_Q \frac{db(\tau)}{d\tau} v(\tau, x) \mathcal{B}v(\tau, x) dQ - \\ &- \int_Q b(\tau)v(\tau, x)\mathcal{B} \frac{\partial v(\tau, x)}{\partial \tau} dQ = \int_P b(t)v(t, x)\mathcal{B}v(t, x) dP - \int_P b(0)v(0, x)\mathcal{B}v(0, x) dP - \\ &- \int_Q \frac{db(\tau)}{d\tau} v(\tau, x)\mathcal{B}v(\tau, x) dQ - \int_Q b(\tau) \frac{\partial v(\tau, x)}{\partial \tau} \mathcal{B}v(\tau, x) dQ. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$2 \int_Q u(\tau, x) \mathcal{B}v(\tau, x) dQ = - \int_P b(0)v(0, x) \mathcal{B}v(0, x) dP - \int_Q \frac{db(\tau)}{d\tau} v(\tau, x) \mathcal{B}v(\tau, x) dQ. \quad (13)$$

Подставляя выражения (12) и (13) в (11), получим

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}u, \mathcal{J}u)_{0Q} = (\mathcal{L}u, v)_{0Q} = & -\frac{1}{2} \int_P b(t) \left[\frac{\partial v(\tau, x)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=t} \right]^2 dP - \frac{1}{2} \int_P b(0) \left[\frac{\partial v(\tau, x)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} \right]^2 dP - \\ & - \frac{1}{2} \int_P b(0)v(0, x) \mathcal{B}v(0, x) dP - \frac{1}{2} \int_Q \frac{db(\tau)}{d\tau} \left[\frac{\partial v(\tau, x)}{\partial \tau} \right]^2 dQ - \frac{1}{2} \int_Q \frac{db(\tau)}{d\tau} v(\tau, x) \mathcal{B}v(\tau, x) dQ. \end{aligned} \quad (14)$$

Выберем функцию $b(\tau) = -2(t + \tau)$. Тогда $b(0) = -2t$, $b(t) = -4t$, $\frac{db(\tau)}{d\tau} = -2$, $b^{-1}(\tau) = -\frac{1}{2(t + \tau)}$ и

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}u, \mathcal{J}u)_{0Q} = (\mathcal{L}u, v)_{0Q} = & 2t \int_P \left[\frac{\partial v(\tau, x)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=t} \right]^2 dP + t \int_P \left[\frac{\partial v(\tau, x)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} \right]^2 dP + \\ & + t \int_P b(0)v(0, x) \mathcal{B}v(0, x) dP + \int_Q \left[\frac{\partial v(\tau, x)}{\partial \tau} \right]^2 dQ + \int_Q v(\tau, x) \mathcal{B}v(\tau, x) dQ. \end{aligned}$$

Учитывая, что $\int_P \left[\frac{\partial v(\tau, x)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} \right]^2 dP = 0$ (так как $\frac{\partial v(\tau, x)}{\partial \tau} = -\frac{1}{2(t + \tau)} u(\tau, x)$, а $u(0, x) = 0$), $t > 0$, $\int_P \left[\frac{\partial v(\tau, x)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=t} \right]^2 dP \geq 0$ и $\int_P b(0)v(0, x) \mathcal{B}v(0, x) dP \geq c \|v(0, x)\|_{0P}^2 \geq 0$, получаем

$$(\mathcal{L}u, \mathcal{J}u)_{0Q} = (\mathcal{L}u, v)_{0Q} \geq \int_Q \left[\frac{\partial v(\tau, x)}{\partial \tau} \right]^2 dQ + \int_Q v(\tau, x) \mathcal{B}v(\tau, x) dQ \geq c \|v\|_{1tQ}^2 = c \|\mathcal{J}u\|_{1tQ}^2,$$

откуда

$$(\mathcal{L}u, \mathcal{J}u)_{0Q} \geq c \|\mathcal{J}u\|_{1tQ}^2. \quad (15)$$

Используя определение негативной нормы, из (15) имеем:

$$\|\mathcal{L}u\|_{-1tQ} = \sup_{\mathcal{J}u \neq 0} \frac{|(\mathcal{L}u, \mathcal{J}u)_{0Q}|}{\|\mathcal{J}u\|_{1tQ}} \geq c \|\mathcal{J}u\|_{1tQ}. \quad (16)$$

Оценим $\|\mathcal{J}u\|_{1tQ}^2$:

$$\begin{aligned} \|\mathcal{J}u\|_{1tQ}^2 = & \int_Q \left(\sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial}{\partial x_i} \int_t^\tau \frac{u(s, x)}{-2(t+s)} ds \right]^2 + \left[\frac{\partial}{\partial \tau} \int_t^\tau \frac{u(s, x)}{-2(t+s)} ds \right]^2 \right) dQ + \int_Q \mathcal{J}u \mathcal{B}(\mathcal{J}u) dQ \geq \\ & \geq \int_Q \sum_{i=1}^n \left[\int_t^\tau \frac{1}{-2(t+s)} \frac{\partial u(s, x)}{\partial x_i} ds \right]^2 dQ + \int_Q \left[\frac{1}{-2(t+\tau)} u(t, \tau) \right]^2 dQ \geq \\ & \geq \int_Q \frac{1}{4(t+\tau)^2} u^2(t, \tau) dQ \geq c_1 \|u\|_{0Q}^2, \end{aligned}$$

где c_1 — некоторая положительная константа, независящая от u . Этим доказано неравенство

$$\|\mathcal{L}u\|_{-1tQ} \geq c \|u\|_{0Q}.$$

Покажем справедливость неравенства

$$\|\mathcal{L}u\|_{-1tQ} \leq c \|u\|_{10Q}.$$

Рассмотрим скалярное произведение $(\mathcal{L}u, v)_{0Q}$ на элементах $u \in D(\mathcal{L})$ и $v \in W_{2t}^1(Q)$. Интегрируя по частям, находим

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}u, v)_{0Q} &= \int_Q \frac{\partial^2 u(\tau, x)}{\partial \tau^2} v(\tau, x) dQ + \int_Q v(\tau, x) \mathcal{B}u(\tau, x) dQ = \\ &= \int_Q \frac{\partial u(\tau, x)}{\partial \tau} \frac{\partial v(\tau, x)}{\partial \tau} dQ + \int_Q \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u(\tau, x)}{\partial x_j} \right) v(\tau, x) dQ = \\ &= \int_Q \frac{\partial u(\tau, x)}{\partial \tau} \frac{\partial v(\tau, x)}{\partial \tau} dQ + \int_Q \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial u(\tau, x)}{\partial x_j} \frac{\partial v(\tau, x)}{\partial x_i} dQ. \end{aligned}$$

При интегрировании учтено, что

$$\int_Q \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u(\tau, x)}{\partial x_j} v(\tau, x) \right) dQ = \int_S \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u(\tau, x)}{\partial x_j} v(\tau, x) \right) \cos(x_i, x_j) dS = 0,$$

так как $v(\tau, x)|_{x \in \Gamma} = 0$, $v(t, x) = 0$ и $\frac{\partial u(\tau, x)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} = 0$.

Далее, по определению негативной нормы

$$\begin{aligned} \|\mathcal{L}u\|_{-1tQ} &= \sup_{v \neq 0} \frac{|(\mathcal{L}u, v)_{0Q}|}{\|v\|_{1tQ}} = \\ &= \sup_{v \neq 0} \frac{\left| \int_Q \frac{\partial u(\tau, x)}{\partial \tau} \frac{\partial v(\tau, x)}{\partial \tau} dQ + \int_Q \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial u(\tau, x)}{\partial x_j} \frac{\partial v(\tau, x)}{\partial x_i} dQ \right|}{\|v\|_{1tQ}} \leq \\ &\leq c \sup_{v \neq 0} \frac{|(u, v)_{1Q}|}{\|v\|_{1tQ}} \leq c \sup_{v \neq 0} \frac{\|u\|_{10Q} \|v\|_{1tQ}}{\|v\|_{1tQ}} \leq c \|u\|_{10Q}. \end{aligned}$$

Таким образом, доказаны неравенства

$$\|\mathcal{L}u\|_{-1tQ} \geq c \|u\|_{0Q}, \tag{17}$$

$$\|\mathcal{L}u\|_{-1tQ} \leq c \|u\|_{10Q}. \tag{18}$$

Аналогично можно получить неравенства для сопряженного оператора

$$\|\mathcal{L}^*v\|_{-10Q} \geq c \|v\|_{0Q}, \tag{19}$$

$$\|\mathcal{L}^*v\|_{-10Q} \leq c \|v\|_{1tQ}. \tag{20}$$

Теперь рассмотрим вопрос о разрешимости пары задач

$$\mathcal{L}u = f, \quad f \in L_2, \quad u \in W_{20}^1(Q), \tag{21}$$

$$\mathcal{L}^*v = g, \quad g \in L_2, \quad v \in W_{2t}^1(Q), \tag{22}$$

где u, v — искомые, а f, g — заданные элементы.

Определение 1. Обобщенным решением задачи (21) называется функция $u \in W_{20}^1(Q)$, такая, что интегральное тождество

$$\int_Q \left[\frac{\partial v}{\partial \tau} \frac{\partial u}{\partial \tau} + \sum_{i,j=1}^n \left\{ \frac{\partial (va_{ij})}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\} + va_0u \right] dQ = \int_Q vf dQ$$

выполняется для любой функции $v \in W_{2t}^1(Q)$.

Очевидно, что если обобщенное решение из $W_{20}^1(Q)$ имеет обобщенные производные до второго порядка включительно, то оно является решением уравнения (21) почти всюду в Q .

Определение 2. Обобщенным решением задачи (21) называется функция $u \in W_{20}^1(Q)$, такая, что существует последовательность гладких функций $\{u_i(\tau, x)\}$, $i \rightarrow \infty$, удовлетворяющих граничным условиям (5), и имеет место соотношение

$$\|\mathcal{L}u_i - f\|_{-1tQ} \rightarrow 0, \quad \|u_i - u\|_{10Q} \rightarrow 0, \quad i \rightarrow \infty.$$

Теорема 1. Для систем вида (21), (22) определения 1 и 2 эквивалентны.

Доказательство. Действительно, если существует обобщенное решение в смысле определения 2, то, полагая $\mathcal{L}u_i \equiv f_i$, имеем

$$\lim_{i \rightarrow \infty} [(v, \mathcal{L}u_i) - (v, f_i)] = (v, \mathcal{L}u)_0 - (v, f) = 0,$$

причем если $\alpha \in W_{20}^1(Q)$ и $\beta \in W_{20}^{-1}(Q)$, то выражение $(\alpha, \beta)_0$ означает билинейную форму, совпадающую при $\beta \in L_2$ со скалярным произведением в L_2 .

Интегрируя по частям и применяя формулу Грина в левой части равенства $(v, \mathcal{L}u)_0 = (v, f)$, “перенесем” одно дифференцирование на v и получим, что обобщенное решение в смысле определения 2 есть обобщенное решение в смысле определения 1.

Прежде чем доказать обратное утверждение, сделаем следующие замечания.

1. Пусть функция $u \in L_2$; тогда в качестве производной u'_τ от u можно понимать элемент пространства $W_2^{-1}(Q)$, где $W_2^{-1}(Q)$ — негативное пространство, построенное по $W_2^1(Q)$ и L_2 , а $W_2^1(Q)$ — замыкание гладких в Q функций по норме (6).

Действительно, рассмотрим последовательность гладких финитных в Q функций u_k , сходящихся в L_2 к u . По определению негативной нормы имеем

$$\left\| \frac{\partial u_k}{\partial y_j} \right\|_{-1} = \sup_{v \neq 0} \frac{\left| \left(\frac{\partial u_k}{\partial y_j}, v \right) \right|}{\|v\|_1} = \sup_{v \neq 0} \frac{\left| \left(u_k, \frac{\partial v}{\partial y_j} \right) \right|}{\|v\|_1} \leq \|u_k\|, \quad y_j \in \{\tau, x_1, x_2, \dots, x_n\}, \quad j = 1, 2, \dots, n, n+1,$$

или

$$\left\| \frac{\partial u_k}{\partial y_j} \right\|_{-1} \leq \|u_k\|.$$

Переходя к пределу в этом неравенстве, при $k \rightarrow \infty$ получим

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial y_j} \right\|_{-1} \leq \|u\|.$$

2. Рассмотрим выражение \mathcal{L} из (21) на гладких функциях $u \in W_{20}^1(Q)$. Очевидно, имеем

$$\|\mathcal{L}u\|_{-1tQ} = \sup_{v \neq 0} \frac{|(v, \mathcal{L}u)|}{\|v\|_{1tQ}} = \sup_{v \neq 0} \frac{\int_Q \left[-u_\tau v_\tau - \sum_{i,j=1}^n (va_{ij})_{x_i} u_{x_j} + va_0 u \right] dQ}{\|v\|_{1tQ}} \leq c \|u\|_{10Q},$$

где c — положительная постоянная, независящая от u . Применяя процесс замыкания, получим, что неравенство

$$\|\mathcal{L}u\|_{-1tQ} \leq c \|u\|_{10Q} \tag{23}$$

справедливо для всех $u \in W_{20}^1(Q)$. Аналогично устанавливается неравенство

$$\|\mathcal{L}^*v\|_{-10Q} \leq c \|v\|_{1tQ}. \tag{24}$$

Докажем теперь, что обобщенное решение в смысле определения 1 есть обобщенное решение в смысле определения 2. Действительно, “перенесывая” одно дифференцирование на v в равенстве из определения 1, получим

$$(v, f) = (u, \mathcal{L}^*v). \tag{25}$$

Множество гладких в Q функций, удовлетворяющих условию (5), плотно в пространстве $W_{20}^1(Q)$; поэтому найдется последовательность гладких функций $\{u_i\}$, удовлетворяющих условию (5) в обычном смысле, такая, что $\|u_i - u\|_{10Q} \rightarrow 0$, $i \rightarrow \infty$. В силу неравенства (23) получаем, что $\mathcal{L}u_i \equiv f_i$ сходится при $i \rightarrow \infty$ по норме $W_{2t}^{-1}(Q)$ к некоторому элементу $\hat{f} \in W_{2t}^{-1}(Q)$. Для последовательности $\{u_i\}$, такой, что $\|u_i - u\|_{10Q} \rightarrow 0$, $i \rightarrow \infty$, справедливо равенство $(v, f_i) = (u_i, \mathcal{L}^*v)$; вычитая его из (25) получим

$(v, f - f_i) = (u - u_i, \mathcal{L}^* v)$. Переходя здесь к пределу при $i \rightarrow \infty$, имеем $(v, f - \hat{f}) = 0$ для всех гладких $v \in W_{2t}^1(Q)$; это означает, что $\|f - \hat{f}\|_{-1tQ} = 0$. Эквивалентность определений 1 и 2 доказана.

Из неравенств (17)–(20) следует обобщенная разрешимость двух задач.

Задача 1: найти непрерывную в замкнутой области $Q = P \times [0, t]$ функцию $u(\tau, x)$, удовлетворяющую уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + \mathcal{B}u = f, \quad f \in W_{2t}^{-1}(Q)$$

и условиям

$$u(\tau, x)|_{x \in \Gamma} = 0, \quad u(0, x) = \frac{\partial u(\tau, x)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} = 0.$$

Задача 2: найти непрерывную в замкнутой области $Q = P \times [0, t]$ функцию $v(\tau, x)$, удовлетворяющую уравнению

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} + \mathcal{B}v = g, \quad f \in W_{20}^{-1}(Q)$$

и условиям

$$v(\tau, x)|_{x \in \Gamma} = 0, \quad v(t, x) = \frac{\partial v(\tau, x)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=t} = 0.$$

Теорема 2. Для любых функций $f \in L_2(Q)$ и $g \in L_2(Q)$ существуют единственные обобщенные решения задач (21) и (22) соответственно в пространствах $W_{20}^1(Q)$ и $W_{2t}^1(Q)$.

Доказательство. Рассмотрим функционал

$$l_f(v) = (v, f)_{0Q}, \quad v \in D(\mathcal{L}_1^*) \subset W_{2t}^1(Q).$$

Используя неравенство (19), находим

$$|l_f(v)| = |(v, f)_{0Q}| \leq \|v\|_{0Q} \|f\|_{0Q} \leq c \|\mathcal{L}^* v\|_{-10Q},$$

т.е. $l_f(v)$ — ограниченный функционал на множестве $\{\mathcal{L}_1^* v\} \subset W_{20}^{-1}(Q)$, $v \in D(\mathcal{L}_1^*)$, и, следовательно, является непрерывным линейным функционалом на $\{\mathcal{L}_1^* v\}$.

Расширим по теореме Хана–Банаха этот функционал на все $W_{20}^{-1}(Q)$. Расширенный функционал обозначим через $l_u(\rho)$, $\rho \in W_{20}^{-1}(Q)$. По обобщенной теореме Рисса [5, 6] для линейного непрерывного функционала, определенного на пространстве $W_{20}^{-1}(Q)$, существует функция $u \in W_{20}^1(Q)$, такая, что $l(\rho) = \langle u, \rho \rangle_{0Q}$ для всех $\rho \in W_{20}^{-1}(Q)$, где $\langle u, \rho \rangle_{0Q}$ — билинейная форма в пространствах $W_{20}^1(Q)$ и $W_{20}^{-1}(Q)$. Пусть $\rho = \mathcal{L}^* v$, а v — гладкая функция, удовлетворяющая условиям (7). Тогда

$$l_u(\rho) \equiv \langle u, \rho \rangle_{0Q} = \langle u, \mathcal{L}^* v \rangle = (u, \mathcal{L}^* v)_{0Q} = l_f(v) = (f, v)_{0Q}.$$

Так как множество гладких функций, удовлетворяющих условиям (5), плотно в $W_{20}^1(Q)$, то для $u(\tau, x)$ существует последовательность гладких функций $\{u_i(\tau, x)\}_{i=1}^\infty$, такая, что $u_i(0, x) = \frac{du(\tau, x)}{d\tau} \Big|_{\tau=0} = 0$ и $\|u_i - u\|_{10Q} \rightarrow 0, i \rightarrow \infty$. Таким образом, имеем:

$$(u, \mathcal{L}^* v)_{0Q} = \lim_{i \rightarrow \infty} (u_i, \mathcal{L}^* v)_{0Q} = \lim_{i \rightarrow \infty} (\mathcal{L}u_i, v)_{0Q} = (f, v)_{0Q}.$$

Далее, используя неравенство (18), находим, что $\|\mathcal{L}u_i - f\|_{-1tQ} \rightarrow 0, i \rightarrow \infty$. Существование решения доказано. Единственность решения следует из неравенства (17). Действительно, предположим, что существуют два решения задачи (21): u_1 и u_2 , причем $u_1 \neq u_2$. Используя неравенство (17), находим

$$\|u_1 - u_2\|_{0Q} \leq \|\mathcal{L}u_1 - \mathcal{L}u_2\|_{-1tQ} = \|f - f\|_{-1tQ} = 0,$$

что противоречит предположению.

Существование и единственность решения задачи (22) доказываются аналогично.

Определение 3. Обобщенным решением задачи (21) с правой частью $f(\tau, x) \in W_{2t}^{-1}(Q)$ называют функцию $u(\tau, x) \in L_2(Q)$, такую, что для нее существует последовательность гладких функций $\{u_i(\tau, x)\}_{i=1}^\infty, u \in W_{20}^1(Q)$, удовлетворяющих соотношениям $\|\mathcal{L}u_i - f\|_{-1tQ} \rightarrow 0, \|u_i - u\|_{0Q} \rightarrow 0, i \rightarrow \infty$.

Определение 4. Обобщенным решением задачи (22) с правой частью из $W_{20}^{-1}(Q)$ называют функцию $v(\tau, x) \in L_2(Q)$, такую, что для нее существует последовательность функций $\{v_i(\tau, x)\}_{i=1}^\infty, v_i \in W_{2t}^1(Q)$, удовлетворяющих соотношениям $\|\mathcal{L}^* v_i - g\|_{-10Q} \rightarrow 0, \|v_i - v\|_{0Q} \rightarrow 0, i \rightarrow \infty$.

Теорема 3. Для любых функций $f \in W_{2t}^{-1}(Q)$ существует единственное обобщенное решение задачи (21) в смысле определения 3; для любых $g \in W_{20}^{-1}(Q)$ существует единственное обобщенное решение задачи (22) в смысле определения 4.

Доказательство. Пространство $L_2(Q)$ плотно в $W_{2t}^{-1}(Q)$, поэтому для любой $f \in W_{2t}^{-1}(Q)$ в $L_2(Q)$ существует последовательность $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$, удовлетворяющая соотношению $\|f_i - f\|_{-1tQ} \rightarrow 0, i \rightarrow \infty$. По теореме 2 для любой функции $f \in L_2(Q)$ существует единственное решение $u(\tau, x)$ задачи (21) в смысле определения 2.

Используя неравенство (17), находим

$$\|\mathcal{L}u_i - f\|_{-1tQ} = \|f_i - f\|_{-1tQ} \geq c \|u_i - u\|_{0Q}, \quad c > 0.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу по $i \rightarrow \infty$, устанавливаем существование обобщенного решения задачи (21) с правой частью из $W_{2t}^{-1}(Q)$ в смысле определения 3. Единственность решения следует из неравенства (17). Доказательство второй части теоремы аналогично.

Обратимся теперь к приближенному решению краевой задачи. Рассмотрим вначале задачу (21), когда правая часть $f \in L_2(Q)$. Ее приближенное решение будем искать в виде

$$u_k \equiv u_k(\tau, x) = \sum_{i=1}^k y_i(\tau) \rho_i(x), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (26)$$

где $\{\rho_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ — полная ортонормированная система гладких (имеющих по крайней мере две непрерывные производные) функций в $L_2(P)$, удовлетворяющая условию (5), а выражение для $y_i(\tau)$ находится из соотношений

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 u_k}{\partial \tau^2}, \rho_j \right)_{0P} + (\mathcal{B}u, \rho_j)_{0P} &= (f, \rho_j)_{0P}, \quad (u_k(0, x), \rho_j)_{0P} = y_j(0), \\ \left(\frac{\partial u_k(\tau, x)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0}, \rho_j \right)_{0P} &= \frac{dy_j(\tau)}{d\tau} \Big|_{\tau=0}, \quad j = 1, 2, \dots, k. \end{aligned} \quad (27)$$

Используя (26), получаем, что

$$\begin{aligned} \mathcal{S}y_j &\equiv \frac{d^2 y_j(\tau)}{d\tau^2} + \sum_{i=1}^k y_i(\tau) (\mathcal{B}\rho_i, \rho_j)_{0P} = (f, \rho_j)_{0P}, \\ y_j(0) &= 0, \quad \frac{dy_j(\tau)}{d\tau} \Big|_{\tau=0} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, k, \quad 0 \leq \tau \leq t. \end{aligned} \quad (28)$$

Эти уравнения можно записать в матричной форме

$$\frac{d^2 y(\tau)}{d\tau^2} = B_k y(\tau) + F_k(\tau), \quad y(0) = 0, \quad \frac{dy(\tau)}{d\tau} \Big|_{\tau=0} = 0, \quad (29)$$

где $y(\tau)$ и $F_k(\tau)$ — векторы-столбцы

$$y(\tau) = \{y_1(\tau), y_2(\tau), \dots, y_k(\tau)\}, \quad F_k(\tau) = \{(f, \rho_1)_{0P}, (f, \rho_2)_{0P}, \dots, (f, \rho_k)_{0P}\},$$

а B_k — матрица вида

$$B_k = \begin{pmatrix} (\mathcal{B}\rho_1, \rho_1)_{0P} & \cdots & (\mathcal{B}\rho_1, \rho_k)_{0P} \\ \vdots & & \vdots \\ (\mathcal{B}\rho_k, \rho_1)_{0P} & \cdots & (\mathcal{B}\rho_k, \rho_k)_{0P} \end{pmatrix}.$$

Отметим, что решение (29) понимается в обобщенном смысле в соответствии с определением 5.

Определение 5. Обобщенным решением задачи (29) с правой частью из $W_{2t}^{-1}[0, t]$ называют функцию $y(\tau) \in L_2[0, t]$, такую, что для нее существует последовательность функций $\{y_i(\tau)\}_{i=1}^{\infty}$, $y_i \in W_{20}^1[0, t]$, удовлетворяющих соотношениям $\|\mathcal{S}y_i - G_k\|_{-1t} \rightarrow 0, \|y_i - y\|_0 \rightarrow 0, i \rightarrow \infty$.

Легко показать (см. [6]), что обобщенное решение (29) существует и единственно.

Лемма 1. Для любой функции $f \in L_2(Q)$ справедливо неравенство

$$\|f\|_{0Q} \geq c \|u_k\|_{10Q}.$$

Доказательство. Умножим обе части соотношения (26) на $(2t - \tau) \frac{dy_j(\tau)}{d\tau}$. Суммируя по j от 1 до k и интегрируя по τ от 0 до t , находим

$$\begin{aligned} \int_0^t \left(\frac{\partial^2 u_k(\tau)}{\partial \tau^2}, \sum_{j=1}^k (2t - \tau) \frac{dy_j(\tau)}{d\tau} \rho_j \right)_{0P} d\tau + \int_0^t \left(\mathcal{B}u_k, \sum_{j=1}^k (2t - \tau) \frac{dy_j(\tau)}{d\tau} \rho_j \right)_{0P} d\tau = \\ = \int_0^t \left(f(\tau, x), \sum_{j=1}^k (2t - \tau) \frac{dy_j(\tau)}{d\tau} \rho_j \right)_{0P} d\tau. \end{aligned}$$

Отсюда, используя соотношение (26), получаем

$$\left(\frac{\partial^2 u_k}{\partial \tau^2}, (2t - \tau) \frac{\partial u_k}{\partial \tau} \right)_{0Q} + \left(\mathcal{B}u_k, (2t - \tau) \frac{\partial u_k}{\partial \tau} \right)_{0Q} \equiv \left(\mathcal{L}u_k, (2t - \tau) \frac{\partial u_k}{\partial \tau} \right)_{0Q} = \left(f, (2t - \tau) \frac{\partial u_k}{\partial \tau} \right)_{0Q}.$$

Оценим скалярное произведение $\left(\frac{\partial^2 u_k}{\partial \tau^2}, (2t - \tau) \frac{\partial u_k}{\partial \tau} \right)_{0Q}$. Интегрируя это выражение по частям, находим, что

$$\begin{aligned} \int_Q \frac{\partial^2 u_k(\tau, x)}{\partial \tau^2} (2t - \tau) \frac{\partial u_k(\tau, x)}{\partial \tau} dQ = \int_S \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{\partial u_k(\tau, x)}{\partial \tau} (2t - \tau) \frac{\partial u_k(\tau, x)}{\partial \tau} \right] \cos(n_0, \tau) dS - \\ - \int_Q \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{\partial u_k(\tau, x)}{\partial \tau} (2t - \tau) \right] \frac{\partial u_k(\tau, x)}{\partial \tau} dQ = \int_P \frac{\partial u_k(\tau, x)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=t} t \frac{\partial u_k(\tau, x)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=t} dP - \\ - \int_P \frac{\partial u_k(\tau, x)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} 2t \frac{\partial u_k(\tau, x)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} dP + \int_Q \frac{\partial u_k(\tau, x)}{\partial \tau} \frac{\partial u_k(\tau, x)}{\partial \tau} dQ - \int_Q \frac{\partial^2 u_k(\tau, x)}{\partial \tau^2} (2t - \tau) \frac{\partial u_k(\tau, x)}{\partial \tau} dQ. \end{aligned}$$

Отсюда имеем

$$\begin{aligned} \int_Q \frac{\partial^2 u_k(\tau, x)}{\partial \tau^2} (2t - \tau) \frac{\partial u_k(\tau, x)}{\partial \tau} dQ = \frac{1}{2} \left(\int_P \frac{\partial u_k(\tau, x)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=t} t \frac{\partial u_k(\tau, x)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=t} dP + \right. \\ \left. + \int_Q \frac{\partial u_k(\tau, x)}{\partial \tau} \frac{\partial u_k(\tau, x)}{\partial \tau} dQ \right) \geq \frac{1}{2} \int_Q \frac{\partial u_k(\tau, x)}{\partial \tau} \frac{\partial u_k(\tau, x)}{\partial \tau} dQ, \end{aligned} \tag{30}$$

так как $\frac{\partial u_k(\tau, x)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} = 0$.

Далее, справедливо равенство

$$\left(\mathcal{B}u_k, (2t - \tau) \frac{\partial u_k}{\partial \tau} \right)_{0Q} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \tau} \{ [2t - \tau] \mathcal{B}u_k, u_k \} \right)_{0Q} + \frac{1}{2} (\mathcal{B}u_k, u_k)_{0Q}.$$

Применяя формулу Остроградского, имеем:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial \tau} \{ [2t - \tau] \mathcal{B}u_k, u_k \} \right)_{0Q} = \int_S (2t - \tau) (\mathcal{B}u_k) u_k \cos(\bar{n}_0, \tau) dS = \\ = - \int_P 2t (\mathcal{B}u_k(0, x)) u_k(0, x) dP + \int_P t (\mathcal{B}u_k(t, x)) u_k(t, x) dP. \end{aligned}$$

Так как $u_k(0, x) = 0$, то

$$\left(\mathcal{B}u_k, (2t - \tau) \frac{\partial u_k}{\partial \tau} \right)_{0Q} = \frac{1}{2} (\mathcal{B}u_k, u_k)_{0Q} + \frac{1}{2} t (\mathcal{B}u_k, u_k(t, x))_{0P} \geq \frac{1}{2} (\mathcal{B}u_k, u_k)_{0Q}.$$

Таким образом, из этого неравенства и (30) следует, что

$$\left(f, (2t - \tau) \frac{\partial u_k}{\partial \tau} \right)_{0Q} \geq \frac{1}{2} (\mathcal{B}u_k, u_k)_{0Q} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial \tau}, \frac{\partial u_k}{\partial \tau} \right)_{0Q} \geq c \|u_k\|_{10Q}^2, \quad c > 0.$$

Применяя обобщенное неравенство Коши–Буняковского к левой части, находим, что

$$c \|u_k\|_{10Q}^2 \leq \|f\|_{0Q} \left\| (2t - \tau) \frac{\partial u_k}{\partial \tau} \right\|_{0Q} \leq \|f\|_{0Q} \left\| \frac{\partial u_k}{\partial \tau} \right\|_{0Q}.$$

Следовательно, справедливо соотношение

$$\|f\|_{0Q}^2 \geq \left(c \frac{\|u_k\|_{10Q}^2}{\left\| \frac{\partial u_k}{\partial \tau} \right\|_{0Q}} \right)^2 \geq \frac{c_2 \|u_k\|_{10Q}^4}{\left\| \frac{\partial u_k}{\partial \tau} \right\|_{0Q}^2 + (\mathcal{B}u_k, u_k)_{0Q}} = c^2 \|u_k\|_{10Q}^2.$$

Последнее неравенство верно, так как скалярное произведение $(\mathcal{B}u_k, u_k)_{0Q} \geq 0$. Таким образом, $\|f\|_{0Q} \geq c \|u_k\|_{10Q}$, что и требовалось доказать.

Теорема 4. Пусть $\{\rho_i(x)\}_{i=1}^\infty$ — полная ортонормированная система гладких функций в $L_2(P)$, такая, что $\rho_i(x)|_{x \in \partial P} = 0$, а $y_i(\tau)$ — решение задачи (29). Тогда

$$u_k(\tau, x) = \sum_{i=1}^k y_i(\tau) \rho_i(x), \quad k = 1, 2, \dots$$

задает в смысле определения 3 приближенное решение задачи (21), а именно, выполняются соотношения:

$$\|u_k - u\|_{10Q} \rightarrow 0, \quad \|\mathcal{L}u_k - f\|_{-1tQ} \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty,$$

где u — точное решение задачи (21).

Доказательство. Согласно лемме 1 множество функций $\{u_k\}_{k=1}^\infty$ ограничено в $W_{20}^1(Q)$, а значит, слабо компактно в $W_{20}^1(Q)$; в нем можно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность $\{u_{k_n}\}_{k_n=1}^\infty$ в $W_{20}^1(Q)$. Тогда в силу полноты $W_{20}^1(Q)$ подпоследовательность $\{u_{k_n}\}_{k_n=1}^\infty$ слабо сходится к некоторому пределу $\bar{u} \in W_{20}^1(Q)$. Покажем, что \bar{u} — решение задачи (21). Для произвольной функции $\varphi(\tau) \in W_{20}^1[0, t]$ справедливо равенство

$$(\mathcal{L}u_{k_n}, \varphi(\tau) \rho_j(x))_{0Q} = (f, \varphi(\tau) \rho_j(x))_{0Q}, \quad j = 1, 2, \dots, k. \quad (31)$$

Так как $\|u_{k_n} - \bar{u}\|_{10Q} \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$, то согласно неравенству (17) имеем

$$\|\mathcal{L}u_{k_n} - \mathcal{L}u_{k_m}\|_{-1tQ} \leq \|u_{k_n} - \bar{u}\|_{10Q} \rightarrow 0, \quad n, m \rightarrow \infty.$$

Итак, последовательность $\{\mathcal{L}u_{k_n}\}_{k_n=1}^\infty$ фундаментальна в $W_{2t}^{-1}(Q)$ и имеет предел в $W_{2t}^{-1}(Q)$. Обозначим этот предел $\mathcal{L}\bar{u}$. Функция $\varphi(\tau) \rho_j(x)$ принадлежит $W_{2t}^{-1}(Q)$ и равенство (31) можно понимать в смысле билинейной формы, т.е. оно справедливо, если $\mathcal{L}u_{k_n} \in W_{2t}^{-1}(Q)$. Перейдем к пределу по $k \rightarrow \infty$ в (31). С учетом непрерывности скалярного произведения в $L_2(Q)$, получим $\langle \mathcal{L}\bar{u}, \varphi(\tau) \rho_j(x) \rangle_{tQ} = \langle f, \varphi(\tau) \rho_j(x) \rangle_{0Q}, j = 1, 2, \dots, k$. Это выражение можно записать в виде

$$\langle \mathcal{L}\bar{u} - f, \varphi(\tau) \rho_j(x) \rangle_{tQ} = 0. \quad (32)$$

Так как значение j произвольно, $\{\rho_i(x)\}_{i=1}^\infty$ — базис и функция $\varphi(\tau)$ из $W_{20}^1[0, t]$ также произвольна, то $\mathcal{L}\bar{u} - f = 0$, т.е. \bar{u} — решение уравнения (21), что и требовалось доказать.

Следует отметить, что (32) справедливо и в случае, если $f \in W_{2t}^{-1}(Q)$.

Теорема 5. Пусть $\{\rho_i\}_{i=1}^\infty$ — полная ортонормированная система гладких функций в $L_2(P)$, причем $\rho_i(x) \in W_2^1(P)$ и $\rho_i(x)|_{x \in \partial P} = 0$, вектор-функция $f(\tau, x)$ принадлежит пространству $W_{2t}^{-1}(Q)$, $\{f_\varepsilon(\tau, x)\}_{\varepsilon > 0}$ — последовательность осреднений функции $f(\tau, x)$ и функция $y_{i\varepsilon}(\tau)$ — решение задачи

$$\frac{d^2 y_{i\varepsilon}(\tau)}{d\tau^2} + \sum_{j=1}^k y_{j\varepsilon}(\tau) (\mathcal{B}\rho_j, \rho_i)_{0P} = (f_\varepsilon, \rho_i)_{0P}, \quad y_{i\varepsilon}(0) = 0, \quad \left. \frac{dy_{i\varepsilon}}{d\tau} \right|_{\tau=0} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Тогда справедливы соотношения

$$\|u_{k\varepsilon} - u\|_{0Q} \rightarrow 0, \quad \|\mathcal{L}u_{k\varepsilon} - f\|_{-1tQ} \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty, \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

где $u_{k\varepsilon}(\tau, x) = \sum_{i=1}^k y_{i\varepsilon}(\tau) \rho_i(x)$, $\|f_\varepsilon - f\|_{-1tQ} \rightarrow 0, \varepsilon \rightarrow 0$ и $u(\tau, x)$ — решение задачи (21).

Доказательство. Пусть $u_\varepsilon(\tau, x)$ — решение задачи (21) с осредненной правой частью $f_\varepsilon(\tau, x)$ (это означает, что $\|f - f_\varepsilon\|_{-1tQ} \rightarrow 0, \varepsilon \rightarrow 0$). Тогда по теореме 4 имеем

$$\|u_{k\varepsilon} - u_\varepsilon\|_{10Q} \rightarrow 0, \quad \|\mathcal{L}u_{k\varepsilon} - f_\varepsilon\|_{-1tQ} \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty$$

и, согласно (17), получаем

$$c_0 \|u_{k\varepsilon} - u_\varepsilon\|_{0Q} \leq \|\mathcal{L}(u_{k\varepsilon} - u_\varepsilon)\|_{-1tQ}, \quad c_0 = \text{const}. \tag{33}$$

Так как $\|f - f_\varepsilon\|_{-1tQ} \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, то последовательность $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ фундаментальна. Действительно, $\|f_{\varepsilon_1} - f_\varepsilon\|_{-1tQ} \rightarrow 0$ при $\varepsilon_1, \varepsilon \rightarrow 0$, а из теоремы 2 и неравенства (17) вытекает, что $\|u_\varepsilon - u_{\varepsilon_1}\|_{0Q} \rightarrow 0, \varepsilon_1, \varepsilon \rightarrow 0$. Обозначим $\bar{u} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_\varepsilon$. Покажем, что $\bar{u} = u$. Неравенство (17) справедливо для всех $u \in L_2(Q)$, т.е. $\|\mathcal{L}u_\varepsilon\|_{-1tQ} \geq c \|u_\varepsilon\|_{0Q}$; следовательно,

$$\|\mathcal{L}(u_\varepsilon - u)\|_{-1tQ} = \|f_\varepsilon - f\|_{-1tQ} \geq c \|u_\varepsilon - u\|_{0Q}. \tag{34}$$

Переходя к пределу по $\varepsilon \rightarrow 0$, находим $0 \geq c \|\bar{u} - u\|_{0Q}$, т.е. $\bar{u} = u$.

Оценим норму $\|u - u_{k\varepsilon}\|_{0Q}$. Применяя неравенство треугольника, получим

$$\|u - u_{k\varepsilon}\|_{0Q} \leq \|u - u_\varepsilon\|_{0Q} + \|u_\varepsilon - u_{k\varepsilon}\|_{0Q}.$$

Используя соотношение (34) и теорему 4, для любого фиксированного $\delta > 0$ можно подобрать величины k и ε так, чтобы $\|u - u_\varepsilon\|_{0Q} \leq \delta/2$ и $\|u_\varepsilon - u_{k\varepsilon}\|_{0Q} \leq \delta/2$. Тогда

$$\|u - u_{k\varepsilon}\|_{0Q} < \delta \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty, \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Теорема 5 доказана.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 01-01-00398).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Березанский Ю.М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Киев: Наукова думка, 1965.
2. Гординг Л. Задача Коши для гиперболических уравнений. М.: ИЛ, 1961.
3. Диденко В.П. О краевых задачах для многомерных гиперболических уравнений с вырождением // ДАН СССР. 1972. **205**, № 4. 352–355.
4. Диденко В.П. О некоторых краевых задачах для многомерного уравнения смешанного типа // ДУ. 1973. **9**, № 1. 43–51.
5. Колос М.В., Колос И.В. Методы оптимальной линейной фильтрации. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2001.
6. Ляшко И.И., Диденко В.П., Цитрицкий О.Е. Фильтрация шумов. Киев: Наукова думка, 1979.
7. Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988.

Поступила в редакцию
27.06.2002