УДК 539.312

ПРИМЕНЕНИЕ ПРОЕКЦИОННО-СЕТОЧНОГО МЕТОДА НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ К РЕШЕНИЮ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

И. О. Арушанян[1], **Г. М. Кобельков**[1]

Рассмотрено применение проекционно-сеточного метода наименьших квадратов к обобщенной задаче плоской теории упругости с двумя большими параметрами. Для случая стандартной триангуляции области построен эффективный неявный итерационный метод. Рассмотрен специальный способ триангуляции, позволяющий решить результирующую систему линейных алгебраических уравнений прямым методом с использованием быстрого преобразования Фурье.

1. Введение. Данная работа является обобщением результатов [2, 3], полученных авторами для задачи Стокса. Рассматривается применение метода наименьших квадратов к решению двумерной задачи теории упругости с двумя большими параметрами и периодическими граничными условиями. Метод основан на сведении краевой задачи второго порядка к системе уравнений в частных производных первого порядка и последующей минимизации в некотором конечномерном пространстве функционала от невязок этих уравнений методом наименьших квадратов.

Известно [5, 9], что для рассматриваемой задачи можно оценить функционал невязок через H^1-норму искомых функций, что позволяет при приближенном решении получить одинаковый порядок точности как для скорости, так и для вспомогательных функций (дивергенции и двумерного ротора от вектора перемещений). Кроме того, конечномерные пространства, в которых ищется приближенное решение, могут быть выбраны независимо от inf–sup неравенства.

Следует отметить, что существенным недостатком данного метода является появление дополнительных, подлежащих определению неизвестных функций, что особенно заметно при решении задачи с однородными краевыми условиями, накладываемыми на вектор перемещений [7].

Во многих работах [5–7, 9, 10] при решении эллиптических краевых задач методом наименьших квадратов основное внимание уделяется доказательству эллиптичности функционала невязок, в то время как важные вопросы, связанные со свойствами систем линейных алгебраических уравнений, к которым сводится задача минимизации в конечномерном пространстве, отходят на второй план. Настоящая работа посвящена рассмотрению именно алгебраических свойств аппроксимирующей системы, что позволяет построить эффективный итерационный процесс, скорость сходимости которого не зависит от параметров, входящих в условие задачи.

Кроме того, предложена специальная конечно-элементная аппроксимация задачи, позволяющая решить аппроксимирующую систему линейных алгебраических уравнений прямым методом за асимптотически оптимальное количество действий.

2. Постановка задачи. Рассмотрим область $\Omega \subset \boldsymbol{R}^2$ с границей Γ

$$\Omega = \big\{(x,\, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1\big\}$$

и сформулируем следующую краевую задачу:

$$-\Delta \boldsymbol{u} + \alpha \boldsymbol{u} - \nabla \left(\frac{\lambda + \mu}{\mu} \operatorname{div} \boldsymbol{u} \right) = \boldsymbol{g} \quad \text{в} \quad \Omega. \tag{1}$$

Здесь α — положительный параметр и λ, μ — коэффициенты Ламе. В дальнейшем будем считать, что $\alpha \gg 1$ и $(\lambda+\mu)/\mu \gg 1$. Дискретный аналог задачи (1) возникает при применении неявного численного метода к решению нестационарной системы теории упругости. В этом случае параметр α пропорционален величине δt^{-1}, где δt — шаг, характеризующий дискретизацию по времени.

[1] Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, Воробьевы горы, 119992, Москва; e-mail: arushan@mech.math.msu.su; kobelkov@dodo.inm.ras.ru

Мы будем рассматривать случай граничных условий, соответствующих условию “жесткого контакта” [12]:

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}=0,\qquad \frac{\partial\,(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\tau})}{\partial\boldsymbol{n}}=0 \quad \text{на} \quad \Gamma, \tag{2}$$

где $\boldsymbol{\tau}$ и $\boldsymbol{n}$ являются единичными касательными и нормальными векторами к Γ. Введенные граничные условия означают, что мы имеем жесткую стенку (отсутствует проникание: $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}=0$) и касательные напряжения обращаются в нуль ($\sigma_{ij}n_j=0$, где $\sigma_{ij}=2\varepsilon_{ij}-\delta_{ij}\,p$, $\varepsilon_{ij}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}+\dfrac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$ — компоненты тензора напряжений и тензора деформаций).

Введем две вспомогательные функции

$$\omega=\left(\sqrt{\alpha}\right)^{-1}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}-\frac{\partial u_1}{\partial y}\right),$$
$$p=\left(\sqrt{\alpha}\right)^{-1}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial u_2}{\partial y}\right).$$

Учитывая соотношения

$$-\frac{\partial\omega}{\partial y}=\left(\sqrt{\alpha}\right)^{-1}\left(\Delta u^1-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u^1}{\partial x}+\frac{\partial u^2}{\partial y}\right)\right),$$
$$\frac{\partial\omega}{\partial x}=\left(\sqrt{\alpha}\right)^{-1}\left(\Delta u^2-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u^1}{\partial x}+\frac{\partial u^2}{\partial y}\right)\right),$$

сведем поставленную задачу к системе уравнений первого порядка

$$\begin{cases} \sqrt{\varepsilon}\,\dfrac{\partial\omega}{\partial y}+u^1-(æ+1)\sqrt{\varepsilon}\,\dfrac{\partial p}{\partial x}=f_1 & \text{в} \quad \Omega,\\ -\sqrt{\varepsilon}\,\dfrac{\partial\omega}{\partial x}+u^2-(æ+1)\sqrt{\varepsilon}\,\dfrac{\partial p}{\partial y}=f_2 & \text{в} \quad \Omega,\\ \sqrt{\varepsilon}\left(\dfrac{\partial u^2}{\partial x}-\dfrac{\partial u^1}{\partial y}\right)-\omega=0 & \text{в} \quad \Omega,\\ p-\sqrt{\varepsilon}\left(\dfrac{\partial u^1}{\partial x}+\dfrac{\partial u^2}{\partial y}\right)=0 & \text{в} \quad \Omega,\\ u^1=0 & \text{на} \quad \Gamma_2\bigcup\Gamma_4,\\ u^2=0 & \text{на} \quad \Gamma_1\bigcup\Gamma_3,\\ \omega=0 & \text{на} \quad \Gamma. \end{cases} \tag{3}$$

Здесь

$$\Gamma_1=\left\{(x,\,y)\mid\ 0\leqslant x\leqslant 1,\ \ y=0\right\},\Gamma_2=\left\{(x,\,y)\mid\ x=1,\ \ 0\leqslant y\leqslant 1\right\},$$
$$\Gamma_3=\left\{(x,\,y)\mid\ 0\leqslant x\leqslant 1,\ \ y=1\right\},\Gamma_4=\left\{(x,\,y)\mid\ x=0,\ \ 0\leqslant y\leqslant 1\right\}$$

и $\varepsilon=\alpha^{-1}$, $æ=(\lambda+\mu)/\mu$, $\boldsymbol{f}=\alpha^{-1}\boldsymbol{g}$.

В дальнейшем мы будем использовать следующие функциональные пространства:

$$H_0^1=\left\{u\in H^1(\Omega)\mid u=0 \quad \text{на} \quad \Gamma\right\},$$
$$V^1=\left\{v\in H^1(\Omega)\mid v=0 \quad \text{на} \quad \Gamma_2\cup\Gamma_4\right\},$$
$$V^2=\left\{v\in H^1(\Omega)\mid\ v=0 \quad \text{на} \quad \Gamma_1\cup\Gamma_3\right\}.$$

Для решения системы (3) запишем функционал невязок

$$\Phi\big(\omega,\,\boldsymbol{u},\,p,\,\boldsymbol{f}\big)=\left\|-\sqrt{\varepsilon}\,\operatorname{curl}\omega+\boldsymbol{u}-(æ+1)\sqrt{\varepsilon}\,p-\boldsymbol{f}\right\|^2+$$
$$+\left\|\sqrt{\varepsilon}\left(\frac{\partial u^2}{\partial x}-\frac{\partial u^1}{\partial x}\right)-\omega\right\|^2+\left\|p-\sqrt{\varepsilon}\left(\frac{\partial u^1}{\partial x}+\frac{\partial u^2}{\partial y}\right)\right\|^2$$

и сформулируем следующую задачу минимизации:

$$\Phi\big(\omega,\,\boldsymbol{u},\,p,\,\boldsymbol{f}\big)\ \to\ \min \quad \text{на} \quad \boldsymbol{W}, \tag{4}$$

где

$$\boldsymbol{W} = H_0^1 \times V_n \times H^1 = \{\omega,\, \boldsymbol{u},\, p\}.$$

Лемма 1. *Для любых функций $\omega \in H_0^1(\Omega)$, $p \in H^1(\Omega)$ в рассматриваемой области Ω выполнено:*

$$\int\limits_\Omega \left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial\omega}{\partial y}\frac{\partial p}{\partial x}\right) dx\, dy = 0.$$

Доказательство. Интегрируя выписанное соотношение по частям, получаем

$$\int\limits_\Omega \left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial\omega}{\partial y}\frac{\partial p}{\partial x}\right) dx\, dy =$$
$$= \frac{1}{2}\int\limits_{\partial\Omega}\left(n_x\omega\frac{\partial p}{\partial y} + n_y p\frac{\partial\omega}{\partial x} - n_x p\frac{\partial\omega}{\partial y} - n_y\omega\frac{\partial p}{\partial x}\right) dl =$$
$$= \frac{1}{2}\int\limits_{\partial\Omega}\left(n_y p\frac{\partial\omega}{\partial x} - n_x p\frac{\partial\omega}{\partial y}\right) dl = \frac{1}{2}\int\limits_{\partial\Omega}\left(p\,(\,\nabla\omega\cdot\boldsymbol{\tau}\,)\right) dl = 0,$$

поскольку $\nabla\omega\cdot\boldsymbol{\tau} = 0$ на Γ. Лемма доказана.

Лемма 2. *Для любой ограниченной выпуклой области Ω с кусочно-гладкой* (из C^1) *границей Γ и для произвольной вектор-функции $\boldsymbol{u} = (u^1, u^2)^T \in V_n$ выполнено неравенство*

$$|\boldsymbol{u}|_1^2 \leqslant \|\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}\|^2 + \|\mathrm{curl}\,\boldsymbol{u}\|^2.$$

Если область Ω является многоугольником, то

$$|\boldsymbol{u}|_1^2 = \|\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}\|^2 + \|\mathrm{curl}\,\boldsymbol{u}\|^2$$

и, следовательно,

$$\int\limits_\Omega \left(\frac{\partial u^1}{\partial x}\frac{\partial u^2}{\partial y} - \frac{\partial u^1}{\partial y}\frac{\partial u^2}{\partial x}\right) dx\, dy = 0.$$

Доказательство Леммы 2 можно найти в [8].

Таким образом, функционал невязок может быть записан в виде

$$\Phi(\omega,\, \boldsymbol{u},\, p,\, \boldsymbol{0}) = \|\omega\|^2 + \varepsilon\,\|\nabla\omega\|^2 + \|p\|^2 + (æ+1)^2\,\varepsilon\,\|\nabla p\|^2 + \|\boldsymbol{u}\|^2 + \varepsilon\,\left\|\nabla u^1\right\|^2 + \varepsilon\,\left\|\nabla u^2\right\|^2 + 2\,æ\sqrt{\varepsilon}\,(\boldsymbol{u},\,\nabla p)\,.$$

Теперь покажем, что решение задачи (4) существует и единственно.

Теорема 1. *Существуют такие положительные постоянные C_1 и C_2, что для произвольных функций $(\omega,\, \boldsymbol{u},\, p) \in \boldsymbol{W}$ выполнены неравенства*

$$C_1\big(\|\omega\|^2 + \varepsilon\,\|\nabla\omega\|^2 + \|\boldsymbol{u}\|^2 + \varepsilon\,\left\|\nabla u^1\right\|^2 + \varepsilon\,\left\|\nabla u^2\right\|^2 + \|\nabla p\|^2\big) \leqslant \Phi(\omega,\, \boldsymbol{u},\, p,\, \boldsymbol{0}) \leqslant$$
$$\leqslant C_2\big(\|\omega\|^2 + \varepsilon\,\|\nabla\omega\|^2 + \|\boldsymbol{u}\|^2 + \varepsilon\,\left\|\nabla u^1\right\|^2 + \varepsilon\,\left\|\nabla u^2\right\|^2 + \|\nabla p\|^2\big),$$

причем $C_2/C_1 = O\left((\varepsilon + æ^{-1})^{-1}\right)$.

Доказательство. Оценка сверху следует из неравенства треугольника.

Пусть c — постоянная из неравенства Фридрихса

$$\|\boldsymbol{u}\|^2 \leqslant c\,\left(\left\|\nabla u^1\right\|^2 + \left\|\nabla u^2\right\|^2\right), \tag{5}$$

а $\xi \in (0,1)$. Тогда

$$\Phi(\omega,\, \boldsymbol{u},\, p,\, \boldsymbol{0}) \geqslant \|\omega\|^2 + \varepsilon\,\|\nabla\omega\|^2 + \|p\|^2 + (æ+1)^2\,\|\nabla p\|^2 + \left(1 + \frac{\varepsilon}{2c}\right)\|\boldsymbol{u}\|^2 + 0.5\,\varepsilon\,\|\nabla u_1\|^2 +$$
$$+ 0.5\,\varepsilon\,\|\nabla u_2\|^2 - \xi\,\|\boldsymbol{u}\|^2 - \varepsilon\,æ^2\xi^{-1}\,\|\nabla p\|^2\,.$$

Условие теоремы выполнено при любом ξ, удовлетворяющем неравенствам

$$\left(\frac{æ}{æ+1}\right)^2 < \xi < 1 + \frac{\varepsilon}{2\,c}.$$

Для построения приближенного решения рассмотрим конечномерные пространства кусочно-линейных функций $H_h^1 \in H^1$, $H_{0,h}^1 \in H_0^1$, $V_{n,h} \in V_n$. Здесь h — параметр дискретизации, в качестве которого берется характерный размер элементов, образующих введенные конечномерные пространства. Из Теоремы 1 следует следующая теорема [5, 10].

Теорема 2. *Пусть решение задачи* (1), (2) *принадлежит пространству* $\boldsymbol{H}^2(\Omega)\bigcap \boldsymbol{W}$. *Тогда для приближенного решения* $\{\omega_h, \boldsymbol{u}_h, p_h\} \in H_{0,1}^1 \times V_{n,h} \times H_h^1$ *справедливы оценки*

$$\|\omega-\omega_h\| + æ\sqrt{\varepsilon}\,\|p-p_h\| + \sqrt{\varepsilon}\,\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h\| \leqslant C_3 h^2\left(\|\omega\|_2 + \|p\|_2 + \|\boldsymbol{u}\|_2\right),$$
$$\|\omega-\omega_h\| + \sqrt{\varepsilon}\,\|\nabla(\omega-\omega_h)\| + æ\sqrt{\varepsilon}\,\|p-p_h\|_1 + \sqrt{\varepsilon}\,\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h\|_1 \leqslant C_4 h\left(\|\omega\|_2 + \|p\|_2 + \|\boldsymbol{u}\|_2\right),$$

причем постоянные C_4 *и* C_5 *не зависят от выбора* h.

3. Описание аппроксимирующей системы. Введем стандартную триангуляцию области Ω с шагом $h = 1/N$ при некотором натуральном N и через $\{\varphi_i\}$ обозначим базис в H_h^1.

Рассмотрим следующую задачу минимизации:

$$\Phi\big(\omega_h,\, u_h^1,\, u_h^2,\, p_h,\, \boldsymbol{f}\big) \;\to\; \min \quad \text{на} \;\; \boldsymbol{W}_h, \tag{6}$$

где

$$\boldsymbol{W}_h = H_{0,h}^1 \times V_h^1 \times V_h^2 \times H_h^1 = \big\{\omega_h,\, u_h^1,\, u_h^2,\, p_h\big\}.$$

Положим

$$\begin{gathered} \omega_h(x,\,y) = \sum_{\varphi_i \in H_{0,h}^1} \omega_i \varphi_i(x,\,y)\,, \quad p_h(x,\,y) = \sum_{\varphi_i \in H_h^1} p_i \varphi_i(x,\,y), \\ u_h^k(x,\,y) = \sum_{\varphi_i \in V_h^k} u_i^k \varphi_i(x,\,y), \quad k = 1,\,2. \end{gathered} \tag{7}$$

Минимум в задаче (6) достигается при выполнении условий

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \omega_i} = 0\,, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial u_i^1} = 0\,, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial u_i^2} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial p_i} = 0.$$

Следовательно, используя Леммы 1 и 2, мы получим систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} &\left(G^0 + \varepsilon\,\left(D_{xx}^0 + D_{yy}^0\right)\right)\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{F}^1, \\ &\left(G^1 + \varepsilon\,\left(D_{xx}^1 + D_{yy}^1\right)\right)\boldsymbol{u}^1 + æ\sqrt{\varepsilon}\,K_x \boldsymbol{p} = \boldsymbol{F}^2, \\ &\left(G^2 + \varepsilon\,\left(D_{xx}^2 + D_{yy}^2\right)\right)\boldsymbol{u}^2 + æ\sqrt{\varepsilon}\,K_y \boldsymbol{p} = \boldsymbol{F}^3, \\ &æ\sqrt{\varepsilon}\,K_x^T \boldsymbol{u}^1 + æ\sqrt{\varepsilon}\,K_y^T \boldsymbol{u}^2 + \left(G + \varepsilon(æ+1)^2\big(D_{xx} + D_{yy}\big)\right)\boldsymbol{p} = \boldsymbol{F}^4. \end{aligned} \tag{8}$$

Матрицы в (8) определяются соответствующими дифференциальными операторами [1–3]. Например,

$$\left(\left(G^1 + D_{xx}^1 + D_{yy}^1\right)\boldsymbol{u}^1,\, \boldsymbol{u}^1\right) + \left(K_x \boldsymbol{p},\, \boldsymbol{u}^1\right) = \left(u_h^1,\, u_h^1\right) + \left(\nabla u_h^1,\, \nabla u_h^1\right) + \left(\frac{\partial p_h}{\partial x},\, u_h^1\right),$$

где связь между векторами $\boldsymbol{u}^1, \boldsymbol{p}$ и функциями u_h^1, p_h задается посредством (7).

Отметим, что вектор $\boldsymbol{\omega}$, определяющий функцию ω, может быть получен как решение изолированной группы уравнений

$$\left(G + \varepsilon\,\left(D_{xx}^0 + D_{yy}^0\right)\right)\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{F}^1.$$

Для определения остальных неизвестных $\boldsymbol{u}^1$, $\boldsymbol{u}^2$ и $\boldsymbol{p}$ получаем следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$A\,\boldsymbol{z} = \boldsymbol{F}, \tag{9}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} G^1 + \varepsilon\,(D^1_{xx} + D^1_{yy}) & 0 & æ\sqrt{\varepsilon}\,K_x \\ 0 & G^2 + \varepsilon\,(D^2_{xx} + D^2_{yy}) & æ\sqrt{\varepsilon}\,K_y \\ æ\sqrt{\varepsilon}\,K_x^T & æ\sqrt{\varepsilon}\,K_y^T & G + (æ+1)^2\varepsilon\,(D_{xx} + D_{yy}) \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}^1 \\ \boldsymbol{u}^2 \\ \boldsymbol{p} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{F}^2 \\ \boldsymbol{F}^3 \\ \boldsymbol{F}^4 \end{pmatrix}.$$

Введем следующие обозначения:

$$A_{11} = \begin{pmatrix} G^1 + \varepsilon\,(D^1_{xx} + D^1_{yy}) & 0 \\ 0 & G^2 + \varepsilon\,(D^2_{xx} + D^2_{yy}) \end{pmatrix}, \quad A_{12} = æ\sqrt{\varepsilon}\begin{pmatrix} K_x \\ K_y \end{pmatrix},$$

$$A_{21} = A_{12}^T, \quad A_{22} = \left(G + (æ+1)^2\,\varepsilon\,(D_{xx} + D_{yy})\right), \quad \boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}^1 \\ \boldsymbol{u}^2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}.$$

Теорема 1 обеспечивает спектральную эквивалентность матриц D и A. Таким образом, при построении итерационного процесса для решения системы (9) можно использовать матрицу D в качестве предобуславливателя для A. При решении на верхнем слое системы с матрицей D в правой части можно использовать алгоритм быстрого преобразования Фурье (БПФ).

Оценим эффективность такого подхода. Известно [4], что

$$\operatorname{cond}\left(D^{-1}A\right) = \frac{1+\gamma}{1-\gamma},$$

где

$$\gamma = \sup_{\boldsymbol{U},\boldsymbol{p}} \frac{(A_{12}\boldsymbol{U},\,\boldsymbol{p})}{\sqrt{(A_{11}\boldsymbol{U},\,\boldsymbol{U})(A_{22}\boldsymbol{p},\,\boldsymbol{p})}}.$$

В рассматриваемом случае мы можем получить оценку для величины γ:

$$\gamma^2 = \sup_{\boldsymbol{u}\in V_{n,h},\,p\in\hat{V}_h} \frac{\varepsilon æ^2\,(\boldsymbol{u},\,\nabla p)^2}{\|p\|^2 + \varepsilon(æ+1)^2\,\|\nabla p\|^2\left(\|\boldsymbol{u}\|^2 + \varepsilon\,|u|_1^2\right)} \leqslant \left(\frac{æ}{æ+1}\right)^2 \frac{1}{1+\varepsilon/c}.$$

Здесь c — постоянная из неравенства (5).

Таким образом, скорость сходимости итерационного процесса будет замедляться с ростом æ и $\alpha = \varepsilon^{-1}$, т.к. $\operatorname{cond}\left(D^{-1}A\right) = O\left((\varepsilon + æ^{-1})^{-1}\right)$.

Другой путь состоит в сведении (9) к системе

$$S\,\boldsymbol{p} = -A_{12}^T A_{11}^{-1}\boldsymbol{F},$$

где $S \equiv A_{22} - A_{12}^T A_{11}^{-1} A_{12}$.

Известно [4], что

$$1 - \gamma^2 \leqslant \frac{(S\,\boldsymbol{p},\,\boldsymbol{p})}{(A_{22}\boldsymbol{p},\,\boldsymbol{p})} \leqslant 1.$$

Таким образом, в качестве предобуславливателя может быть взята матрица A_{22}. Однако в этом случае мы получим улучшение скорости сходимости не более чем в четыре раза, т.к.

$$\frac{\operatorname{cond}\left(D^{-1}A\right)}{\operatorname{cond}\left(A_{22}^{-1}S\right)} = (1+\gamma)^2.$$

4. Построение специального предобуславливателя. Приведенные выше оценки показывают важность построения эффективного предобуславливателя для A, позволяющего получить итерационный процесс со скоростью сходимости, не зависящей от ε и æ.

Если мы рассматриваем стандартную триангуляцию области Ω, то

$$(K_x\,\boldsymbol{p})_{ij} = \begin{cases} \dfrac{1}{6h}\left(2\,p_{i+1,j} - 2\,p_{i-1,j} + p_{i+1,j+1} - p_{i,j+1} + p_{i,j-1} - p_{i-1,j-1}\right) \\ \qquad \text{при} \quad 1 \leqslant i,\, j \leqslant N-1; \\ \dfrac{1}{6h}\left(p_{i+1,0} - p_{i-1,0} + p_{i+1,1} - p_{i,1}\right) \\ \qquad \text{при} \quad 1 \leqslant i \leqslant N-1, \quad j = 0; \\ \dfrac{1}{6h}\left(p_{i+1,N} - p_{i-1,N} + p_{i,N-1} - p_{i-1,N-1}\right) \\ \qquad \text{при} \quad 1 \leqslant i \leqslant N-1, \quad j = N. \end{cases}$$

Выражения для $(K_y\,\boldsymbol{p})_{ij}$ имеют ту же структуру с точностью до переобозначения индексов.

Введем оператор ∂_x следующим образом:

$$(\partial_x\,\boldsymbol{p})_{ij} = \begin{cases} \dfrac{1}{2h}\left(p_{i+1,j} - p_{i-1,j}\right) & \text{при} \quad 1 \leqslant i,\, j \leqslant N-1; \\ \dfrac{1}{4h}\left(p_{i+1,0} - p_{i-1,0}\right) & \text{при} \quad 1 \leqslant i \leqslant N-1, \quad j = 0; \\ \dfrac{1}{4h}\left(p_{i+1,N} - p_{i-1,N}\right) & \text{при} \quad 1 \leqslant i \leqslant N-1, \quad j = N. \end{cases}$$

Аналогично введем оператор ∂_y. Важно отметить, что

$$\operatorname{Ker}\begin{pmatrix} K_x \\ K_y \end{pmatrix} \equiv \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \end{pmatrix}.$$

Используя “интегрирование по частям” в разностном случае, нетрудно показать, что

Лемма 3. *Справедливо соотношение*

$$\left(K_x\boldsymbol{p},\, \boldsymbol{u}^1\right) + \left(K_y\boldsymbol{p},\, \boldsymbol{u}^2\right) = \left(\partial_x\boldsymbol{p},\, \boldsymbol{u}^1\right) + \left(\partial_y\boldsymbol{p},\, \boldsymbol{u}^2\right) + \left(\hat{K}_{13}\boldsymbol{p},\, \boldsymbol{u}^1\right) + \left(\hat{K}_{23}\boldsymbol{p},\, \boldsymbol{u}^2\right).$$

При этом

$$\left|\left(\hat{K}_{13}\boldsymbol{p},\, \boldsymbol{u}^1\right)\right| + \left|\left(\hat{K}_{23}\boldsymbol{p},\, \boldsymbol{u}^2\right)\right| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{h}{6}\left(\left(\left(D^1_{xx} + D^1_{yy}\right)\boldsymbol{u}^1,\, \boldsymbol{u}^1\right) + \left(\left(D^2_{xx} + D^2_{yy}\right)\boldsymbol{u}^2,\, \boldsymbol{u}^2\right) + \left(\left(D_{xx} + D_{yy}\right)\boldsymbol{p},\, \boldsymbol{p}\right)\right).$$

Введем в рассмотрение матрицы

$$\widehat{B} = \begin{pmatrix} G^1 + \varepsilon\,\left(D^1_{xx} + D^1_{yy}\right) & 0 & æ\sqrt{\varepsilon}\,\partial_x \\ 0 & G^2 + \varepsilon\,\left(D^2_{xx} + D^2_{yy}\right) & æ\sqrt{\varepsilon}\,\partial_y \\ æ\sqrt{\varepsilon}\,\partial_x^T & æ\sqrt{\varepsilon}\,\partial_y^T & G + (æ+1)^2\,\varepsilon\,\left(D_{xx} + D_{yy}\right) \end{pmatrix}$$

и

$$B = \begin{pmatrix} I + \varepsilon\,\left(D^1_{xx} + D^1_{yy}\right) & 0 & æ\sqrt{\varepsilon}\,\partial_x \\ 0 & I + \varepsilon\,\left(D^2_{xx} + D^2_{yy}\right) & æ\sqrt{\varepsilon}\,\partial_y \\ æ\sqrt{\varepsilon}\,\partial_x^T & æ\sqrt{\varepsilon}\,\partial_y^T & I + (æ+1)^2\,\varepsilon\,\left(D_{xx} + D_{yy}\right) \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$A = \widehat{B} + \widehat{K},$$

где

$$\widehat{K} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & æ\sqrt{\varepsilon}\,\hat{K}_{13} \\ 0 & 0 & æ\sqrt{\varepsilon}\,\hat{K}_{23} \\ æ\sqrt{\varepsilon}\,\hat{K}_{13}^T & æ\sqrt{\varepsilon}\,\hat{K}_{23}^T & 0 \end{pmatrix}.$$

Непосредственно из Леммы 3 следует

Теорема 3. *Пусть величина h отвечает условию*

$$h \leqslant \frac{3}{2}\sqrt{\varepsilon}\,(1-d)$$

при некотором $0 < d < 1$. Тогда существуют две строго положительные постоянные $\beta_1(d)$ и $\beta_2(d)$, такие, что

$$\beta_1(d)\,\widehat{B} \leqslant A \leqslant \beta_2(d)\,\widehat{B}$$

и $\beta_2(d)/\beta_1(d) = O\left(d^{-2}\right)$.

Отметим, что для всех значений h справедливы неравенства

$$\beta_0\,B \leqslant \widehat{B} \leqslant B,$$

где β_0 — минимальное собственное число матрицы Грама.

Матрица B легко обратима [11, 12], т.е. для решения системы

$$B\,\boldsymbol{z} = \boldsymbol{\psi}$$

можно применить технику БПФ.

Таким образом, для достаточно малых значений h скорость сходимости неявного итерационного метода с предобуславливателем B не зависит от ε и æ.

5. Прямой метод решения. Нетрудно видеть, что в отличие от дифференциальной задачи (1), (2) ее аппроксимация (8) не допускает периодического продолжения на всю плоскость. Тем не менее, мы предложим специальную триангуляцию области, позволяющую построить такое периодическое продолжение. В этом случае аппроксимирующая система линейных уравнений может быть решена с использованием БПФ.

Перейдем к построению триангуляции области Ω. Будем считать, что

$$\Omega = \left\{(x,\,y)\mid 0 \leqslant x \leqslant \pi,\ \ 0 \leqslant y \leqslant \pi\right\}.$$

Пусть $N = 2^m$ и $m \in \mathbf{Z}$. Обозначим $h = \pi(2N)^{-1}$. Прямые $x = 2ih$, $y = 2jh$ разбивают область $\overline{\Omega} = \Omega \bigcup \Gamma$ на элементарные квадраты. В каждом квадрате проводим диагонали и соединяем середины противоположных сторон. В результате получаем разбиение области $\overline{\Omega}$ на прямоугольные треугольники с катетами длины h. Обозначим

$$\Omega_h = \left\{(ih, jh)\,,\ \ 0 \leqslant i,j \leqslant 2N\right\}$$

и

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}^1 &= \{u_{ij},\ \ 1 \leqslant i \leqslant 2N-1,\ 0 \leqslant j \leqslant 2N\},\\
\boldsymbol{u}^2 &= \{v_{ij},\ \ 0 \leqslant i \leqslant 2N,\ 1 \leqslant j \leqslant 2N-1\},\\
\boldsymbol{p} &= \{p_{ij},\ \ 0 \leqslant i \leqslant 2N,\ 0 \leqslant j \leqslant 2N\}.
\end{aligned}$$

В дальнейшем будем рассматривать пространство непрерывных функций V_h, линейных на каждом элементарном треугольнике. Базисные функции φ_{ij} строятся следующим образом.

Если $i + j = 2l$, то носитель φ_{ij} состоит из восьми ближайших элементарных треугольников. Если $i + j = 2l + 1$, то носитель φ_{ij} состоит из четырех ближайших элементарных треугольников. В каждом случае $\varphi_{ij}(kh, mh) = \delta_{ij}^{km}$.

Перейдем к описанию прямого метода решения системы (9), которая соответствует построенной аппроксимации. Продолжим $\boldsymbol{p}$ четным образом с Ω_h через координатные оси. Мы получаем разностную функцию $\tilde{\boldsymbol{p}}$, определенную на сеточной области, которая в четыре раза больше чем Ω_h. Если теперь мы продолжим функцию $\boldsymbol{u}^1$ четно через ось абсцисс и нечетно через ось ординат, а функцию $\boldsymbol{u}^2$ продолжим нечетным образом через ось абсцисс и четным через ось ординат, то система разностных уравнений (9) будет выполнена для продолженных разностных функций $\tilde{\boldsymbol{u}}^1$, $\tilde{\boldsymbol{u}}^2$, $\tilde{\boldsymbol{p}}$ во всех узлах, где аргументы этих уравнений определены. Таким образом, вся разностная задача допускает продолжение с периодом 2π на всю плоскость.

Рассмотрим сеточные области

$$\begin{aligned}
\Omega_{1,h} &= \left\{(ih, jh)\,,\ \ i = 2m,\ j = 2l\right\},\\
\Omega_{2,h} &= \left\{(ih, jh)\,,\ \ i = 2m+1,\ j = 2l\right\},\\
\Omega_{3,h} &= \left\{(ih, jh)\,,\ \ i = 2m,\ j = 2l+1\right\},\\
\Omega_{4,h} &= \left\{(ih, jh)\,,\ \ i = 2m+1,\ j = 2l+1\right\}.
\end{aligned}$$

Мы можем представить $\{\tilde{\boldsymbol{u}}^1,\, \tilde{\boldsymbol{u}}^2,\, \tilde{\boldsymbol{p}}\}$ в виде $\{\boldsymbol{u}^{1,i},\, \boldsymbol{u}^{2,i},\, \boldsymbol{p}^i,\ i=1,2,3,4\}$, где разностные функции $\boldsymbol{u}^{1,i}$, $\boldsymbol{u}^{2,i}$, $\boldsymbol{p}^i$ определены на сеточных областях $\Omega_{i,h}$ соответственно. Так как каждая сеточная область $\Omega_{i,h}$ является сеточным прямоугольником, то решение может быть разложено на $\Omega_{i,h}$ в дискретные ряды Фурье.

Мы будем использовать следующие разложения, отвечающие главным краевым условиям:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{u}^{1,1}(x,\,y) &= \sum_{k_1=1}^{N-1}\sum_{k_2=0}^{N} d_{k_2} u^1_{k_1k_2} \sin k_1x \cos k_2y, && (x,\,y)\in\Omega_{1,h},\\
\boldsymbol{u}^{1,2}(x,\,y) &= \sum_{k_1=1}^{N}\sum_{k_2=0}^{N} d_{k_1} d_{k_2} u^2_{k_1k_2} \sin k_1x \cos k_2y, && (x,\,y)\in\Omega_{2,h},\\
\boldsymbol{u}^{1,3}(x,\,y) &= \sum_{k_1=1}^{N-1}\sum_{k_2=0}^{N-1} d_{k_2} u^3_{k_1k_2} \sin k_1x \cos k_2y, && (x,\,y)\in\Omega_{3,h},\\
\boldsymbol{u}^{1,4}(x,\,y) &= \sum_{k_1=1}^{N}\sum_{k_2=0}^{N-1} d_{k_1} d_{k_2} u^4_{k_1k_2} \sin k_1x \cos k_2y, && (x,\,y)\in\Omega_{4,h},\\
\\
\boldsymbol{u}^{2,1}(x,\,y) &= \sum_{k_1=0}^{N}\sum_{k_2=1}^{N-1} d_{k_1} v^1_{k_1k_2} \cos k_1x \sin k_2y, && (x,\,y)\in\Omega_{1,h},\\
\boldsymbol{u}^{2,2}(x,\,y) &= \sum_{k_1=0}^{N-1}\sum_{k_2=1}^{N-1} d_{k_1} v^2_{k_1k_2} \cos k_1x \sin k_2y, && (x,\,y)\in\Omega_{2,h},\\
\boldsymbol{u}^{2,3}(x,\,y) &= \sum_{k_1=0}^{N}\sum_{k_2=1}^{N} d_{k_1} d_{k_2} v^3_{k_1k_2} \cos k_1x \sin k_2y, && (x,\,y)\in\Omega_{3,h},\\
\boldsymbol{u}^{2,4}(x,\,y) &= \sum_{k_1=0}^{N-1}\sum_{k_2=1}^{N} d_{k_1} d_{k_2} v^4_{k_1k_2} \cos k_1x \sin k_2y, && (x,\,y)\in\Omega_{4,h},\\
\\
\boldsymbol{p}^{1}(x,\,y) &= \sum_{k_1=0}^{N}\sum_{k_2=0}^{N} d_{k_1} d_{k_2} p^1_{k_1k_2} \cos k_1x \cos k_2y, && (x,\,y)\in\Omega_{1,h},\\
\boldsymbol{p}^{2}(x,\,y) &= \sum_{k_1=0}^{N-1}\sum_{k_2=0}^{N} d_{k_1} d_{k_2} p^2_{k_1k_2} \cos k_1x \cos k_2y, && (x,\,y)\in\Omega_{2,h},\\
\boldsymbol{p}^{3}(x,\,y) &= \sum_{k_1=0}^{N}\sum_{k_2=0}^{N-1} d_{k_1} d_{k_2} p^3_{k_1k_2} \cos k_1x \cos k_2y, && (x,\,y)\in\Omega_{3,h},\\
\boldsymbol{p}^{4}(x,\,y) &= \sum_{k_1=0}^{N-1}\sum_{k_2=0}^{N-1} d_{k_1} d_{k_2} p^4_{k_1k_2} \cos k_1x \cos k_2y, && (x,\,y)\in\Omega_{4,h}.
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Здесь $d_j=1$ для всех $0<j<N$ и $d_0=d_N=0.5$. Отметим, что сеточные функции $\boldsymbol{F}^2$, $\boldsymbol{F}^3$, $\boldsymbol{F}^4$ из (9) могут быть аналогичным образом разложены в ряды Фурье с коэффициентами F^i_k, Φ^i_k, Θ^i_k, $i=1,2,3,4$, где k представляет собой мультииндекс $k=(k_1,k_2)$.

Подставляя (10) в систему сеточных уравнений (9), мы получаем системы линейных уравнений, отражающие связь между u^i_k, v^i_k, p^i_k и F^i_k, Φ^i_k, Θ^i_k.

Эти системы однозначно разрешимы для всех значений k_1 и k_2, так как их матрицы положительно определены. Каждая из них требует для решения конечное (не зависящее от N) количество арифметических операций.

Теперь мы можем определить коэффициенты u^i_k, v^i_k, p^i_k, используя $O\left(N^2\right)$ арифметических операций и, в результате, построить решение $\boldsymbol{u}^1$, $\boldsymbol{u}^2$, $\boldsymbol{p}$, используя БПФ. Общие вычислительные затраты составят $O\left(N^2\log_2 N\right)$ арифметических операций.

Работа поддержана РФФИ (проект № 99-01-01146), программой “Университеты России” (проект № 015.04.02.026) и грантом NWO–RFBR 047.008.007.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Arushanian I.O., Axelsson O., Kobelkov G.M.* Implementation of a least-squares finite element method for solving the Poisson equation. Department of Mathematics, University of Nijmegen, the Netherlands. Report N 9717, 1997.
2. *Arushanian I.O., Kobelkov G.M.* Implementation of a least-squares finite element method for solving the generalized Stokes problem. Department of Mathematics, University of Nijmegen, the Netherlands. Report N 9901, 1999.
3. *Arushanian I.O., Kobelkov G.M.* Implementation of a least-squares finite element method for solving the Stokes problem with a parameter // Numer. Linear Algebra Appl. 1999. **6**. 587–597.
4. *Axelsson O.* Iterative solution methods. Cambridge: Cambridge University Press, 1994.
5. *Bochev P., Gunzburger M.* Analysis of least-squares finite element methods for the Stokes equations // Mathematics of Computation. 1994. **63**. 479–506.
6. *Bramble J.H., Lazarov R.D., Pasciak J.E.* A least-squares approach based on a discrete minus one inner product for first order systems // Mathematics of Computation. 1997. **66**. 935–955.
7. *Cai Z., Manteuffel T.A., McCormick S.F.* First-order system least squares for the Stokes equations with application to linear elasticity // SIAM J. Numer. Anal. 1997. **35**, N 5. 1727–1741.
8. *Girault V., Raviart P.-A.* Finite element method for Navier–Stokes equations. Berlin: Springer, 1994.
9. *Jiang B.-N., Povinelli L.A.* A least-squares finite element method for fluid dynamics // Computer Methods in Appl. Mech. and Engineering. 1990. **81**. 13–37.
10. *Jiang B.-N., Povinelli L.A.* Optimal least-squares finite element method for elliptic problems // Computer Methods in Appl. Mech. and Engineering. 1993. **102**. 199–212.
11. *Кобельков Г.М.* Численные методы решения уравнений Навье–Стокса в переменных “скорость-давление” // Вычислительные процессы и системы. М.: Наука, 1991. **8**. 204–236.
12. *Кобельков Г.М.* Решение задачи жесткого контакта для несжимаемого материала // Журн. вычислит. матем. и матем. физики. 1976. **4**. 987–995.

Поступила в редакцию
15.11.2001