УДК 519.651

ФОРМУЛА ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ МАРКОВА И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ В ОРТОГОНАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЯХ

С. К. Татевян[1], Н. А. Сорокин[1], С. Ф. Залёткин[2]

Излагаются некоторые свойства рядов Чебышёва, положенные в основу построения численно-аналитических методов решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений. Особое внимание уделяется вычислению коэффициентов Чебышёва с помощью численного интегрирования, для чего выводится квадратурная формула Маркова с одним фиксированным узлом и весовой функцией, соответствующей ортогональной системе многочленов Чебышёва первого рода. Описываются свойства частичной суммы ряда Чебышёва с коэффициентами, вычисленными по формуле Маркова.

Введение. Настоящая работа посвящена изучению вопросов, связанных с приближением функций с помощью ортогональных разложений по многочленам Чебышёва первого рода — рядов Чебышёва. Обсуждаемый круг вопросов включает вычисление коэффициентов Фурье–Чебышёва по формуле численного интегрирования, приближение функции частичной суммой ряда Чебышёва, оценки точности данного приближения.

Статья состоит из семи разделов. В разделе 1 рассматриваются ряды Чебышёва, условия равномерной сходимости рядов Чебышёва. В разделе 2 дается вывод формулы численного интегрирования А. А. Маркова для интеграла

$$\int\limits_0^1 \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{x(1-x)}}.$$

Здесь получены выражения для абсцисс, коэффициентов и остаточного члена квадратурной формулы. В третьем разделе приводится формула Маркова для интегралов вида

$$\int\limits_a^b \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{(b-x)(x-a)}}.$$

В четвертом разделе доказывается сходимость квадратурного процесса по формулам Маркова.

В пятом разделе описывается применение формулы Маркова для приближенного вычисления коэффициентов $a_i[f]$ ряда Чебышёва функции $f(x)$. В шестом разделе изучаются свойства частичной суммы ряда Чебышёва функции $f(x)$ с приближенными коэффициентами, вычисленными по квадратурной формуле Маркова. Доказано, что частичная сумма одновременно является интерполяционным многочленом функции $f(x)$ с узлами интерполирования, совпадающими с абсциссами квадратурной формулы Маркова. Установлена зависимость между коэффициентами Чебышёва $a_i[f]$ и их приближенными значениями, вычисленными по формуле Маркова.

В седьмом разделе приводятся оценки для погрешности приближения функции частичной суммой ее ряда Чебышёва, коэффициенты которого определены по формуле численного интегрирования.

Изложенные в статье вычислительные приемы рассматриваются нами в качестве средства конструирования численно-аналитических методов интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Методы решения задачи Коши для канонической системы

$$y'' = f(x, y, y'), \qquad x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + X, \tag{I}$$

[1] Институт астрономии РАН, ул. Пятницкая 48, 109017, Москва; e-mail: nsorokin@inasan.rssi.ru
[2] Научно-исследовательский вычислительный центр, Московский Государственный Университет, 119899, Москва; e-mail: arush@srcc.msu.su

$$\begin{cases} y(x_0) \ = y_0, \\ y'(x_0) = y'_0 \end{cases} \tag{II}$$

и задачи Коши для нормальной системы

$$y' = f(x, y), \qquad x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + X, \tag{Ia}$$

$$y(x_0) = y_0 \tag{IIa}$$

нами построены на основе рядов Чебышёва и изложенного в данной статье способа вычисления коэффициентов Чебышёва. Этим методам посвящена отдельная работа.

1. Ряды Фурье по многочленам Чебышёва первого рода. Будем использовать систему многочленов Чебышёва первого рода

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \qquad |x| \leqslant 1, \quad n = 0, 1, \ldots . \tag{1}$$

Эта система многочленов ортогональна на отрезке $[-1, 1]$ с весом

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \tag{2}$$

т.е.

$$(T_i, T_j) = \int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} T_i(x) T_j(x)\, dx = 0 \tag{3}$$

при $i \neq j$. При этом

$$(T_i, T_i) = \|T_i\|^2 = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}, & i > 0, \\ \pi, & i = 0 \end{cases} \tag{4}$$

(см. теорему 5.1 в [1]).

Рассмотрим действительную функцию $f(x)$, которая определена на отрезке $[-1, 1]$ и квадрат которой интегрируем на $[-1, 1]$ с весом $p(x)$, указанном в (2). Используя обычное обозначение для такого функционального пространства $L_2(-1, 1; p(x))$, можно записать:

$$f(x) \in L_2\Big(-1, 1; \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\Big).$$

Для функции $f(x)$ можно определить коэффициенты Фурье

$$a_i[f] = \frac{1}{\|T_i\|^2} \int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} f(x) T_i(x)\, dx, \quad i = 0, 1, \ldots .$$

Рассмотрим ряд Фурье по ортогональным многочленам Чебышёва $T_i(x)$ первого рода

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i[f] \cdot T_i(x). \tag{5}$$

Ряд (5) называется также *рядом Чебышёва* функции $f(x)$. Определим коэффициенты $a_i[f] = a_i$ по формуле

$$a_i[f] = a_i = \frac{2}{\pi} \int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} f(x) T_i(x)\, dx, \quad i = 0, 1, \ldots . \tag{6}$$

С помощью подстановки $x = \cos t$ получаем равносильную формулу

$$a_i[f] = \frac{2}{\pi} \int\limits_{0}^{\pi} f(\cos t) \cos it\, dt, \quad i = 0, 1, \ldots . \tag{7}$$

Введем обозначение

$$\sum_{j=l}^{m}{}' a_j = \frac{1}{2}a_l + a_{l+1} + \cdots + a_m, \quad m \geqslant l. \tag{8}$$

Тогда ряд Чебышёва (5) функции $f(x)$ может быть представлен так:

$$\sum_{i=0}^{\infty}{}' a_i[f] \cdot T_i(x), \tag{9}$$

где $a_i[f]$ определены по формуле (6). Коэффициенты (6) также называются *коэффициентами Чебышёва* функции $f(x)$.

Коэффициент Чебышёва (7) функции $f(x)$ совпадает с тригонометрическим коэффициентом Фурье четной функции $\varphi(t) = f(\cos t)$. Ряд Чебышёва (9) функции $f(x)$ при условии $x = \cos t$

$$\sum_{i=0}^{\infty}{}' a_i[f] \cdot \cos it \tag{10}$$

одновременно является тригонометрическим рядом Фурье четной функции $\varphi(t) = f(\cos t)$.

Будем использовать также систему смещенных многочленов Чебышёва первого рода $T_n^*(x)$ на отрезке $[0, 1]$, которые простым образом связаны с многочленами T_n:

$$T_n^*(x) = T_n(2x-1), \quad n = 0, 1, \dots . \tag{11}$$

Последовательность многочленов $T_n^*(x)$ ортогональна на отрезке $[0, 1]$ с весом

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}, \tag{12}$$

т.е.

$$(T_i^*, T_j^*) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\, T_i^*(x) T_j^*(x)\, dx = 0 \tag{13}$$

при $i \neq j$. При этом

$$(T_i^*, T_i^*) = \|T_i^*\|^2 = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}, & i > 0, \\ \pi, & i = 0 \end{cases} \tag{14}$$

(см. теорему 5.2 в [1]). Для функции

$$f(x) \in L_2\Big(0, 1; \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\Big)$$

рассмотрим ряд Фурье по смещенным многочленам Чебышёва первого рода $T_i^*(x)$

$$\sum_{i=0}^{\infty}{}' a_i^*[f] \cdot T_i^*(x), \tag{15}$$

где символ $\sum'$ определен формулой (8). Коэффициенты ряда определяются по формуле

$$a_i^*[f] = a_i^* = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\, f(x) T_i^*(x)\, dx, \quad i = 0, 1, \dots . \tag{16}$$

Ряд (15) называется также *смещенным рядом Чебышёва* функции $f(x)$. С помощью подстановки

$$x = \cos^2 \frac{t}{2} \tag{17}$$

и соотношения

$$T_i^*(x) = T_{2i}(\sqrt{x}), \quad x \geqslant 0, \quad i = 0, 1, \dots \tag{18}$$

(см. § 1, теорему 1.13 в [6]) получаем равносильную формулу для коэффициентов

$$a_i^*[f] = a_i^* = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi f\Big(\cos^2\frac{t}{2}\Big)\cos it\,dt, \quad i = 0,\,1,\,\ldots\,. \tag{19}$$

Подставим (17) в $T_i^*(x)$:

$$T_i^*\Big(\cos^2\frac{t}{2}\Big) = T_{2i}\Big(\cos\frac{t}{2}\Big) = \cos\Big(2i\arccos\cos\frac{t}{2}\Big) = \cos\Big(2i\cdot\frac{t}{2}\Big) = \cos it. \tag{20}$$

Коэффициент Чебышёва (19) функции $f(x)$ совпадает с тригонометрическим коэффициентом Фурье четной функции $\psi(t) = f\Big(\cos^2\dfrac{t}{2}\Big)$. Из (20) следует, что смещенный ряд Чебышёва (15) функции $f(x)$ при условии $x = \cos^2\dfrac{t}{2}$

$$\sum_{i=0}^{\infty}{}' a_i^*[f]\cdot\cos it \tag{21}$$

одновременно является тригонометрическим рядом Фурье четной функции $\psi(t) = \cos^2\dfrac{t}{2}$.

Для функций, принадлежащих указанным здесь функциональным пространствам, их ряды Чебышёва (9) (и, соответственно, смещенные ряды Чебышёва (15)) сходятся в этих пространствах к данным функциям, т.е. *сходятся в среднем с весом* $p(x)$ из (2) (и, соответственно, *сходятся в среднем с весом* $p(x)$ из (12)).

Вопрос о равномерной сходимости ряда Чебышёва (9) и смещенного ряда Чебышёва (15) функции $f(x)$ сводится к вопросу о равномерной сходимости тригонометрического ряда Фурье (10) четной функции $\varphi(t) = f(\cos t)$ и, соответственно, тригонометрического ряда Фурье (21) четной функции $\psi(t) = f\Big(\cos^2\dfrac{t}{2}\Big)$. Условия, достаточные для равномерной сходимости рядов Чебышёва, являются следствием соответствующих теорем о тригонометрических рядах Фурье.

Напомним некоторые определения.

Определение 1. Действительная функция $f(x)$, определенная на сегменте $[a,\,b]$, называется функцией *ограниченной вариации* или *ограниченного изменения* на сегменте $[a,\,b]$, $a < b$, если для любого разбиения сегмента

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \,\ldots\, < x_i < x_{i+1} < \,\ldots\, < x_n = b$$

числовое множество

$$V\big[\{x_i\}\big] = \sum_{i=0}^{n-1}\big|f(x_{i+1}) - f(x_i)\big|$$

ограничено сверху. Точная верхняя грань множества $\big\{V[\{x_i\}]\big\}$ называется *полным изменением* или *полной вариацией* функции $f(x)$ на сегменте $[a,\,b]$ и обозначается символом

$$\mathop{\mathbf{V}}_a^b f(x) = \sup\big\{V[\{x_i\}]\big\}.$$

(См. гл. 9, дополнение 2, стр. 386 в [3] или гл. XV, § 4 в [2].)

Определение 2. Для каждого $\delta > 0$ *модулем непрерывности* функции $f(x)$ на сегменте $[a,\,b]$ называется точная верхняя грань модуля разности $\big|f(x') - f(x'')\big|$ по всем точкам $x', x'' \in [a,\,b]$, удовлетворяющим неравенству $|x' - x''| \leqslant \delta$ (см. гл. 4, § 6, п. 4 в [3]).

Таким образом, по определению

$$\omega(f,\delta) = \sup\big\{\big|f(x') - f(x'')\big| : |x' - x''| \leqslant \delta; \quad x', x'' \in [a, b]\big\}. \tag{22}$$

Приведем (без доказательства) теоремы о равномерной сходимости тригонометрических рядов Фурье.

Признак Дирихле–Жордана (см. гл. XIX, § 4, п. 699 в [2]).

Ряд Фурье

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{\infty}(a_i\cos ix + b_i\sin ix), \tag{23}$$

где

$$a_i = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos ix\,dx, \quad i = 0,\,1,\,\ldots,$$
$$b_i = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin ix\,dx, \quad i = 1,\,2,\,\ldots, \tag{24}$$

периодической с периодом 2π *функции* $f(x)$ *сходится к этой функции равномерно в промежутке* $[\,a,\,b\,]$, *если в некотором более широком промежутке* $[\,A,\,B\,]$ *функция* $f(x)$ *непрерывна и имеет ограниченное изменение.*

В частности, *если функция* $f(x)$, *заданная в промежутке* $[\,-\pi,\,\pi\,]$, *непрерывна в этом промежутке и имеет в нем ограниченное изменение, а также удовлетворяет условию* $f(-\pi) = f(\pi)$, *то ее ряд Фурье во всем промежутке сходится к ней равномерно.*

Для доказательства достаточно продолжить функцию $f(x)$ периодически с периодом 2π на всю числовую ось, тогда за промежуток $[\,A,\,B\,]$ можно взять любой, содержащий внутри себя промежуток $[\,-\pi,\,\pi\,]$.

Теорема Дини–Липшица (см. гл. 8, § 5, п. 5 в [4]).

Для равномерной на сегменте $[\,-\pi,\,\pi\,]$ *сходимости тригонометрического ряда Фурье функции* $f(x)$ *достаточно, чтобы эта функция удовлетворяла условию* $f(-\pi) = f(\pi)$ *и чтобы ее модуль непрерывности на сегменте* $[\,-\pi,\,\pi\,]$ *имел порядок*

$$\omega(f,\delta) = o\Big(\frac{1}{\ln(1/\delta)}\Big), \tag{25}$$

т.е. является при $\delta \to 0$ *бесконечно малой величиной более высокого порядка, чем* $\dfrac{1}{\ln(1/\delta)}$.

Докажем следующие две теоремы о равномерной сходимости рядов Чебышёва.

Теорема 1. *Для произвольной функции* $f(x)$, *непрерывной и имеющей ограниченную вариацию на сегменте* $[\,-1,\,1\,]$, *ее ряд Чебышёва* (9) *сходится к* $f(x)$ *равномерно на сегменте* $[\,-1,\,1\,]$.

Для произвольной функции $f(x)$, *непрерывной и имеющей ограниченную вариацию на сегменте* $[\,0,\,1\,]$, *ее смещенный ряд Чебышёва* (15) *сходится к* $f(x)$ *равномерно на сегменте* $[\,0,\,1\,]$.

Доказательство. Пусть $\{\,t_i\,\}$ — произвольное разбиение отрезка $[\,-\pi,\,\pi\,]$:

$$-\pi = t_0 < t_1 < \ldots < t_i < t_{i+1} < \ldots < t_{n-1} < t_n = \pi. \tag{26}$$

Пусть $x = \cos t$; обозначим $\varphi(t) = f(\cos t)$. Тогда

$$V\big[\{t_i\}\big] = \sum_{i=0}^{n-1}\big|\varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i)\big| = \sum_{i=0}^{n-1}\big|f(\cos t_{i+1}) - f(\cos t_i)\big| = \sum_{i=0}^{n-1}\big|f(x_{i+1}) - f(x_i)\big|. \tag{27}$$

При изменении i от 0 до n точки $x_i = \cos t_i$ будут пробегать отрезок $[\,-1,\,1\,]$ два раза: слева направо и справа налево. Пусть m — такое значение i, при котором $x_m < x_{m+1}$, $x_{m+1} > x_{m+2}$. Разобьем последнюю сумму в (27) на две суммы:

$$V\big[\{t_i\}\big] = \sum_{i=0}^{m}\big|f(x_{i+1}) - f(x_i)\big| + \sum_{i=m+1}^{n-1}\big|f(x_{i+1}) - f(x_i)\big|. \tag{28}$$

Обозначим $x_i = \tau_{n+1-i}$, $n - i = j$. Тогда вторую сумму в (28) можно представить в виде

$$\sum_{i=m+1}^{n-1}\big|f(\tau_{n+1-i}) - f(\tau_{n-i})\big| = \sum_{j=1}^{n-m-1}\big|f(\tau_{j+1}) - f(\tau_j)\big|. \tag{29}$$

Точки x_i при изменении i от 0 до m (в первой сумме(28)) монотонно возрастают от -1 до 1. Точки τ_j при изменении j от 1 до $n-m-1$ (в правой сумме (29)) также монотонно возрастают от -1 до 1. Первая сумма в (28) ограничена сверху полным изменением функции $f(x)$ на сегменте $[\,-1,\,1\,]$, т.е. величиной $\mathop{\mathbf{V}}\limits_{-1}^{1} f(x)$. Сумма в (29), а следовательно, и вторая сумма в (28) также ограничены этой величиной. Таким образом, для произвольного разбиения (26) сегмента $[-\pi,\ \pi]$ сумма $V[\{t_i\}]$ в (27) ограничена сверху, а именно:

$$V\big[\{t_i\}\big] \leqslant 2 \mathop{\mathbf{V}}_{-1}^{1} f(x). \tag{30}$$

Следовательно, функция $\varphi(t) = f(\cos t)$ является непрерывной функцией в промежутке $[-\pi,\ \pi]$, удовлетворяет условию $\varphi(-\pi) = \varphi(\pi)$ и имеет в нем ограниченное изменение. Поэтому по признаку Дирихле–Жордана ее тригонометрический ряд Фурье (23) с коэффициентами (24) или, что то же самое, ряд (10) с коэффициентами (7) сходится к ней равномерно на сегменте $[-\pi,\ \pi]$. Значит, и совпадающий с ним ряд Чебышёва (9) функции $f(x)$ сходится к $f(x)$ равномерно на сегменте $[-1,\ 1]$.

Точки $x_i' = \cos^2 \dfrac{t_i}{2}$ при изменении i от 0 до n пробегают отрезок $[0,\ 1]$ два раза: слева направо и справа налево. Аналогично доказывается, что для произвольного разбиения (26) сумма

$$V\big[\{t_i\}\big] = \sum_{i=0}^{n-1} \big|\psi(t_{i+1}) - \psi(t_i)\big| = \sum_{i=0}^{n-1} \Big| f\Big(\cos^2 \frac{t_{i+1}}{2}\Big) - f\Big(\cos^2 \frac{t_i}{2}\Big)\Big| = \sum_{i=0}^{n-1} \big|f(x_{i+1}') - f(x_i')\big| \tag{31}$$

для функции $\psi(t) = f\Big(\cos^2 \dfrac{t}{2}\Big)$ также ограничена сверху, а именно:

$$V\big[\{t_i\}\big] \leqslant 2 \mathop{\mathbf{V}}_{0}^{1} f(x). \tag{32}$$

Следовательно, функция $\psi(t) = f\Big(\cos^2 \dfrac{t}{2}\Big)$ является непрерывной функцией в промежутке $[-\pi,\ \pi]$, удовлетворяет условию $\psi(-\pi) = \psi(\pi)$ и имеет в нем ограниченное изменение. Поэтому по признаку Дирихле–Жордана ее тригонометрический ряд Фурье (23) с коэффициентами (24) или, что то же самое, ряд (21) с коэффициентами (19) сходится к ней равномерно на сегменте $[-\pi,\ \pi]$. Значит, и совпадающий с ним смещенный ряд Чебышёва (15) функции $f(x)$ сходится к $f(x)$ равномерно на сегменте $[0,\ 1]$. Теорема доказана.

Теорема 2. *Если модуль непрерывности функции* $f(x)$ *на сегменте* $[-1,\ 1]$ *имеет порядок*

$$\omega(f, \delta) = o\Big(\frac{1}{\ln(1/\delta)}\Big), \tag{33}$$

то ее ряд Чебышёва (9) *сходится к* $f(x)$ *равномерно на сегменте* $[-1,\ 1]$.

Если модуль непрерывности функции $f(x)$ *на сегменте* $[0,\ 1]$ *имеет порядок* (33), *то ее смещенный ряд Чебышёва* (15) *сходится к* $f(x)$ *равномерно на сегменте* $[0,\ 1]$.

Доказательство. Пусть $t', t'' \in [-\pi,\ \pi]$ и $|t' - t''| \leqslant \delta$. Для $x = \cos t$ и $\varphi(t) = f(\cos t)$ имеем:

$$|x' - x''| = |\cos t' - \cos t''| \leqslant |t' - t''| \leqslant \delta;$$

$$\big|\varphi(t') - \varphi(t'')\big| = \big|f(\cos t') - f(\cos t'')\big| = \big|f(x') - f(x'')\big| \leqslant \omega(f, \delta). \tag{34}$$

Из соотношения (34) следует, что между модулем непрерывности функции $\varphi(t) = f(\cos t)$ на сегменте $[-\pi,\ \pi]$ и модулем непрерывности функции $f(x)$ на сегменте $[-1,\ 1]$ выполняется неравенство

$$\omega(\varphi, \delta) \leqslant \omega(f, \delta). \tag{35}$$

Из (33) и (35) получаем

$$\omega(\varphi, \delta) = o\Big(\frac{1}{\ln(1/\delta)}\Big). \tag{36}$$

Таким образом, функция $\varphi(t) = f(\cos t)$ удовлетворяет условию $\varphi(-\pi) = \varphi(\pi)$ и ее модуль непрерывности на сегменте $[-\pi,\ \pi]$ имеет порядок (36). Поэтому по теореме Дини–Липшица ее тригонометрический ряд Фурье (23) с коэффициентами (24) или, что то же самое, ряд (10) с коэффициентами (7) сходится к ней равномерно на сегменте $[-\pi,\ \pi]$. Значит, и совпадающий с ним ряд Чебышёва (9) функции $f(x)$ сходится к $f(x)$ равномерно на сегменте $[-1,\ 1]$.

Для $x = \cos^2 \dfrac{t}{2}$ и $\psi(t) = f\Big(\cos^2 \dfrac{t}{2}\Big)$ имеем:

$$|x' - x''| = \Big|\cos^2 \frac{t'}{2} - \cos^2 \frac{t''}{2}\Big| = \Big|\frac{1 + \cos t'}{2} - \frac{1 + \cos t''}{2}\Big| = \frac{1}{2}\,|\cos t' - \cos t''| \leqslant \frac{1}{2}\,|t' - t''| \leqslant \frac{1}{2}\,\delta,$$

$$\left|\psi(t')-\psi(t'')\right|=\left|f\Big(\cos^2\frac{t'}{2}\Big)-f\Big(\cos^2\frac{t''}{2}\Big)\right|=\left|f(x')-f(x'')\right|\leqslant\omega\Big(f,\frac{\delta}{2}\Big)\leqslant\omega(f,\delta). \tag{37}$$

Из соотношения (37) следует, что между модулем непрерывности функции $\psi(t)=f\Big(\cos^2\dfrac{t}{2}\Big)$ на сегменте $[-\pi,\,\pi]$ и модулем непрерывности функции $f(x)$ на сегменте $[0,\,1]$ выполняется неравенство

$$\omega(\psi,\delta)\leqslant\omega(f,\delta). \tag{38}$$

Из (33) и (38) получаем

$$\omega(\psi,\delta)=o\Big(\frac{1}{\ln(1/\delta)}\Big). \tag{39}$$

Таким образом, функция $\psi(t)=f\Big(\cos^2\dfrac{t}{2}\Big)$ удовлетворяет условию $\psi(-\pi)=\psi(\pi)$ и ее модуль непрерывности на сегменте $[-\pi,\,\pi]$ имеет порядок (39). Поэтому по теореме Дини–Липшица ее тригонометрический ряд Фурье (23) с коэффициентами (24) или, что то же самое, ряд (21) с коэффициентами (19) сходится к ней равномерно на сегменте $[-\pi,\,\pi]$. Значит, и совпадающий с ним смещенный ряд Чебышёва (15) функции $f(x)$ сходится к $f(x)$ равномерно на сегменте $[0,\,1]$. Теорема доказана.

Следствие. *Если на сегменте* $[-1,\,1]$ *(соответственно на сегменте* $[0,\,1]$*):*

а) функция $f(x)$ *удовлетворяет условию Липшица*

$$\left|f(x')-f(x'')\right|\leqslant L|x'-x''|, \tag{40}$$

где $L=\text{const}$*,* x'*,* x'' *— любые точки сегмента, или*

б) функция $f(x)$ *дифференцируема на сегменте и ее производная ограничена на нем*

$$|f'(x)|\leqslant L, \tag{41}$$

то ряд Чебышёва (9) *функции* $f(x)$ *сходится к* $f(x)$ *равномерно на сегменте* $[-1,\,1]$ *(соответственно смещенный ряд Чебышёва (15) функции* $f(x)$ *сходится к* $f(x)$ *равномерно на сегменте* $[0,\,1]$*).*

Доказательство. Если на указанном сегменте выполнено условие (40) или (41), то на этом сегменте $f(x)$ является функцией с ограниченной вариацией. Ее модуль непрерывности на этом сегменте имеет порядок $\omega(f,\delta)=O(\delta)$. Следовательно, для функции $f(x)$ выполнены условия обеих теорем.

2. Формула численного интегрирования Маркова для отрезка $[0,\,1]$ с одним фиксированным узлом $a_1=0$ и весовой функцией $p(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$. Остановимся на задаче вычисления определенного интеграла

$$\int\limits_a^b p(x)f(x)\,dx, \tag{42}$$

где $p(x)$ — некоторая фиксированная неотрицательная на $[a,\,b]$ функция, могущая обращаться в нуль лишь в конечном числе точек, и такая, что интеграл $\int\limits_a^b p(x)|x|^m\,dx$ имеет конечное значение при $m=0,\,1,\,2,\,\ldots$. Рассмотрим квадратурную формулу, содержащую наперед заданные узлы $a_1,\,\ldots,a_m$ и имеющую вид

$$\int\limits_a^b p(x)f(x)\,dx=\sum_{i=1}^n A_if(x_i)+\sum_{l=1}^m D_lf(a_l)+R(f). \tag{43}$$

Эта формула содержит параметры A_i, x_i, $i=1,\,\ldots,\,n$, и D_l, $l=1,\,\ldots,\,m$. При любом расположении узлов x_i можно за счет выбора коэффициентов A_i и D_l достигнуть того, чтобы остаточный член $R(f)$ квадратурной формулы (43) обращался в нуль для всех алгебраических многочленов степени не выше $n+m-1$. Для этого достаточно, чтобы она была интерполяционной. Для того чтобы остаточный член $R(f)$ квадратурной формулы (43) обращался в нуль для многочленов более высокой степени, необходимо специальным образом выбирать узлы x_i. В (43) коэффициенты A_i, D_l и узлы x_i выбирают таким образом, чтобы $R(f)$ обращался в нуль для многочленов возможно более высокой степени.

Обозначим

$$\Omega(x)=(x-a_1)\,\ldots\,(x-a_m),\qquad\omega(x)=(x-x_1)\,\ldots\,(x-x_n).$$

Справедлива следующая теорема из [5]:

Теорема. *Для того чтобы квадратурная формула*

$$\int_a^b p(x)f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^n A_i f(x_i) + \sum_{l=1}^m D_l f(a_l) \tag{44}$$

была точной для многочленов степени $2n+m-1$, *необходимо и достаточно, чтобы формула была интерполяционной и чтобы многочлен* $\omega(x)$ *был ортогонален на отрезке* $[a, b]$ *с весом* $p(x)\Omega(x)$ *к любому многочлену* $q(x)$ *степени, не превосходящей* $n-1$.

Доказательство теоремы приведено в [5].

Если функция $f(x)$ имеет на отрезке $[a, b]$ производную порядка $2n+m$, то остаточный член $R(f)$ будет равен [5]:

$$R(f) = \int_a^b p(x)\Omega(x)\omega^2(x)\frac{f^{(2n+m)}(\xi)}{(2n+m)!}\,dx, \qquad a<\xi<b. \tag{45}$$

Из теоремы следует, что для того чтобы построить квадратурную формулу (43) при любом n, надо построить многочлен $\omega(x)$, ортогональный на отрезке $[a, b]$ с весом $p(x)\Omega(x)$ ко всем многочленам степени не выше $n-1$.

Рассмотрим квадратурную формулу частного вида, а именно: формулу численного интегрирования А. А. Маркова.

Пусть $m=1$ и $a_1=a$. Тогда квадратурная формула (43) примет вид

$$\int_a^b p(x)f(x)\,dx = D\,f(a) + \sum_{i=1}^n A_i f(x_i) + R(f). \tag{46}$$

Алгебраическая степень точности этой формулы равна $2n$. Многочлен $\omega(x)$ будет принадлежать системе многочленов, ортогональных на отрезке $[a, b]$ с весом $\rho(x)=(x-a)p(x)$. Обозначим через $P_s(x)$, $s=0, 1, \ldots$, ортонормированную на отрезке $[a, b]$ с весом $p(x)$ систему многочленов, а через $\Pi_s(x)$, $s=0, 1, \ldots$, — систему многочленов, ортонормированную на том же отрезке $[a, b]$, но с другим весом $\rho(x)=(x-a)p(x)$ (s — степень многочленов $P_s(x)$ и $\Pi_s(x)$). Воспользуемся формулой преобразования ортогональной системы многочленов $P_s(x)$ при умножении веса $p(x)$ на многочлен $x-a$ (см. гл. 9, § 1, § 2 в [5]):

$$\Pi_n(x) = \frac{K_n}{x-a}\Big(P_{n+1}(x)P_n(a) - P_n(x)P_{n+1}(a)\Big), \tag{47}$$

где $K_n=\mathrm{const}\neq 0$. Многочлен $\omega(x)$ только постоянным множителем отличается от $\Pi_n(x)$. Пусть α_n — старший коэффициент многочлена

$$\Pi_n(x) = \alpha_n x^n + \cdots. \tag{48}$$

Тогда для коэффициентов A_i и D справедливы формулы (см. (9.2.2) и (9.2.3) в [5])

$$A_i = \frac{\alpha_n}{\alpha_{n-1}(x_i-a)\Pi_n'(x_i)\Pi_{n-1}(x_i)}, \qquad i=1, 2, \ldots, n, \tag{49}$$

$$D = \frac{1}{\Pi_n(a)}\int_a^b p(x)\Pi_n(x)\,dx. \tag{50}$$

Выражение $\Pi_n'(x_i)$ в (49) обозначает значение производной многочлена $\Pi_n(x)$ в точке x_i.

Предположим, что

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} \tag{51}$$

и отрезок $[a, b]$ совпадает с отрезком $[0, 1]$. Квадратурная формула Маркова (46) примет вид

$$\int_0^1 \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{x(1-x)}} = D\,f(0) + \sum_{i=1}^n A_i f(x_i) + R(f). \tag{52}$$

Построим систему многочленов $\Pi_s(x)$, ортонормированную на отрезке $[0, 1]$ с весом

$$\rho(x) = \sqrt{\frac{x}{1-x}}. \tag{53}$$

2.1. Система многочленов, ортонормированная на отрезке $[0, 1]$ с весом $\sqrt{\dfrac{x}{1-x}}$. Многочленами $P_s(x)$, ортогональными на отрезке $[0, 1]$ с весом (51), являются смещенные многочлены Чебышёва первого рода (11)

$$T_s^*(x) = T_s(2x-1), \qquad s = 0, 1, \ldots .$$

Подставляя в (47) смещенные многочлены Чебышёва и учитывая равенства

$$T_s^*(0) = T_s(-1) = (-1)^s, \qquad s = 0, 1, \ldots, \tag{54}$$

имеем (в дальнейшем вместо буквы s в качестве индекса многочлена T_s будем писать букву n):

$$\Pi_n(x) = K_n \frac{T_{n+1}^*(x)(-1)^n - T_n^*(x)(-1)^{n+1}}{x} = (-1)^n K_n \frac{T_{n+1}^*(x) + T_n^*(x)}{x}. \tag{55}$$

Получим для многочлена $\Pi_n(x)$ простое выражение через тригонометрические функции. Выразим сначала $\Pi_n(x)$ через обычные многочлены Чебышёва. Сделаем замену переменной

$$x = \frac{1+y}{2}, \qquad y \in [-1, 1].$$

Тогда

$$\Pi_n\Bigl(\frac{1+y}{2}\Bigr) = (-1)^n 2K_n \frac{T_{n+1}(y) + T_n(y)}{1+y}.$$

Положим $y = \cos\varphi$; тогда, учитывая (1),

$$\begin{aligned} \Pi_n\Bigl(\frac{1+\cos\varphi}{2}\Bigr) &= (-1)^n 2K_n \frac{\cos(n+1)\varphi + \cos n\varphi}{1+\cos\varphi} = (-1)^n 2K_n \frac{2\cos(n+1/2)\varphi \cdot \cos\varphi/2}{2\cos^2\varphi/2} = \\ &= (-1)^n 2K_n \frac{\cos(n+1/2)\varphi}{\cos\varphi/2}. \end{aligned} \tag{56}$$

При замене переменной

$$x = \frac{1+\cos\varphi}{2} \tag{57}$$

весовая функция $\rho(x)$ в (53) примет вид

$$\rho\Bigl(\frac{1+\cos\varphi}{2}\Bigr) = \sqrt{\frac{\dfrac{1+\cos\varphi}{2}}{1-\dfrac{1+\cos\varphi}{2}}} = \sqrt{\frac{1+\cos\varphi}{1-\cos\varphi}} = \frac{\cos\varphi/2}{\sin\varphi/2} = \frac{1+\cos\varphi}{\sin\varphi}. \tag{58}$$

Найдем коэффициент K_n в выражении (55) для $\Pi_n(x)$. Так как $\Pi_n(x)$ — ортонормированный на отрезке $[0, 1]$ с весом $\rho(x)$ из (53) многочлен, то должно выполняться равенство

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}}\, \Pi_n^2(x)\, dx = 1. \tag{59}$$

Вычислим интеграл с помощью правила замены переменной (57). Учитывая (56), (58), имеем:

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}}\, \Pi_n^2(x)\, dx = -4K_n^2 \int_\pi^0 \frac{1+\cos\varphi}{\sin\varphi} \frac{\cos^2(n+1/2)\varphi}{\cos^2\varphi/2} \frac{\sin\varphi}{2}\, d\varphi = 2K_n^2 \int_0^\pi \bigl(1+\cos(2n+1)\varphi\bigr)\, d\varphi = 2\pi K_n^2.$$

Отсюда и из (59) получаем

$$K_n^2 = \frac{1}{2\pi}, \qquad K_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}. \tag{60}$$

Так как K_n не зависит от n, то индекс n в K_n будем в дальнейшем опускать.

Итак, система многочленов, ортонормированная на отрезке $[\,0,\,1\,]$ с весом (53), задается следующими формулами, а именно: через смещенные многочлены Чебышёва

$$\Pi_n(x) = (-1)^n K\,\frac{T^*_{n+1}(x) + T^*_n(x)}{x}, \qquad n = 0,\,1,\,\ldots\,; \tag{61}$$

через обычные многочлены Чебышёва

$$\Pi_n(x) = (-1)^n K\,\frac{T_{n+1}(2x-1) + T_n(2x-1)}{x}, \qquad n = 0,\,1,\,\ldots\,; \tag{62}$$

при условии

$$x = \frac{1+\cos\varphi}{2} \tag{57}$$

имеем простое выражение $\Pi_n(x)$ через тригонометрические функции:

$$\Pi_n(x) = \Pi_n\Big(\frac{1+\cos\varphi}{2}\Big) = (-1)^n 2K\,\frac{\cos(n+1/2)\varphi}{\cos\varphi/2}, \qquad n = 0,\,1,\,\ldots\,. \tag{63}$$

Из (62) находим, что старший коэффициент многочлена $\Pi_n(x)$ равен

$$\alpha_n = (-1)^n K 2^{(n+1)-1}\cdot 2^{n+1} = (-1)^n K 2^{2n+1}. \tag{64}$$

Заметим, что многочлен $\dfrac{\Pi_n(x)}{\alpha_n}$ совпадает с многочленом Якоби n-ой степени $G_n(p,q,x)$ из системы многочленов, ортогональной на отрезке $[\,0,\,1\,]$ с весовой функцией $(1-x)^{p-q}\cdot x^{q-1}$, а именно:

$$\frac{\Pi_n(x)}{\alpha_n} = G_n\Big(1,\frac{3}{2},x\Big), \tag{65}$$

многочлены $G_n\Big(1,\dfrac{3}{2},x\Big)$ ортогональны на отрезке $[\,0,\,1\,]$ с весом $\sqrt{\dfrac{x}{1-x}}$ (см. формулу 22.2.2 при $p=1$, $q=3/2$ в [6]). Для многочленов $G_n(p,q,x)$ справедливо функциональное соотношение (см. формулу 22.5.2 в [6])

$$G_n(p,q,x) = \frac{n!\,\Gamma(n+p)}{\Gamma(2n+p)} P_n^{(p-q,\,q-1)}(2x-1), \tag{66}$$

где $P_n^{(\alpha,\beta)}(y)$ — многочлены Якоби, ортогональные на отрезке $[-1,\,1\,]$ с весом $(1-y)^\alpha(1+y)^\beta$ и равные

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(y) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}(1-y)^{-\alpha}(1+y)^{-\beta}\,\frac{d^n}{dy^n}\Big[(1-y)^{\alpha+n}(1+y)^{\beta+n}\Big], \qquad \alpha,\,\beta > -1 \tag{67}$$

(см. формулу 22.11.1 в [6]).

Полагая $p=1$, $q=3/2$, получаем

$$G_n\Big(1,\frac{3}{2},x\Big) = \frac{n!\,\Gamma(n+1)}{\Gamma(2n+1)} P_n^{(-1/2,1/2)}(2x-1) = \frac{(n!)^2}{(2n)!} P_n^{(-1/2,1/2)}(2x-1), \tag{68}$$

$$P_n^{(-1/2,\,1/2)}(2x-1) = \frac{(-1)^n}{n!}\sqrt{\frac{1-x}{x}}\,\frac{d^n}{dx^n}\big[(1-x)^{n-1/2}x^{n+1/2}\big]. \tag{69}$$

Таким образом, формулы (63), (65), (68) дают для многочлена Якоби (69) простое выражение через тригонометрические функции.

2.2. Абсциссы формулы Маркова. Найдем корни многочлена $\Pi_n(x)$. Воспользуемся его выражением через тригонометрические функции (63). Из (63) имеем

$$\cos\Big(n+\frac{1}{2}\Big)\varphi = 0,$$

$$\Big(n+\frac{1}{2}\Big)\varphi = -\frac{\pi}{2}+\pi i, \qquad i = 1, 2, \ldots,$$

$$\varphi = \frac{-\dfrac{\pi}{2}+\pi i}{n+\dfrac{1}{2}} = \frac{(2i-1)\pi}{2n+1}, \qquad i = 1, 2, \ldots .$$

Итак, корни многочлена $\Pi_n(x)$, а значит, и абсциссы x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, квадратурной формулы Маркова (52) будут равны

$$x_i = \frac{1+\cos\dfrac{(2i-1)\pi}{2n+1}}{2}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{70}$$

Заметим, что абсциссы (70) квадратурной формулы Маркова (52) являются нечетными нулями смещенного многочлена Чебышёва второго рода степени $2n$

$$U^*_{2n}(x) = U_{2n}(2x-1). \tag{71}$$

Здесь $U_s(x)$ — многочлен Чебышёва второго рода s-й степени, который при $|x| < 1$ может быть записан в виде

$$U_s(x) = \frac{\sin\big((s+1)\arccos x\big)}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad s = 0, 1, \ldots . \tag{72}$$

Нули многочлена Чебышёва второго рода $U_s(x)$ равны

$$u_{sj} = \cos\frac{j\pi}{s+1}, \quad s \geqslant 1, \quad j = 1, 2, \ldots, s; \tag{73}$$

нули смещенного многочлена Чебышёва второго рода $U^*_s(x)$ равны

$$u^*_{sj} = \frac{1+u_{sj}}{2} = \frac{1+\cos\dfrac{j\pi}{s+1}}{2}, \quad s \geqslant 1, \quad j = 1, 2, \ldots, s \tag{74}$$

(см., например, теорему 4.1 в [6]).

2.3. Коэффициенты формулы Маркова. Коэффициент D квадратурной формулы Маркова (52) вычисляем по формуле (50).

Для отыскания $\Pi_n(0)$ нельзя применить формулу (61) непосредственно, так как при $x = 0$ эта формула содержит неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$. Поэтому для вычисления $\Pi_n(0)$ применим первое правило Лопиталя. При этом нам потребуется формула для производной смещенного многочлена Чебышёва

$$(T^*_n(x))' = 2n\cdot U^*_{n-1}(x). \tag{75}$$

Эта формула следует из формулы (13) в теореме 1.2 в [1]

$$T'_n(x) = nU_{n-1}(x). \tag{76}$$

Кроме этого, нам понадобятся следующие формулы для значений многочлена Чебышёва второго рода:

$$U^*_n(0) = U_n(-1) = (-1)^n U_n(1) = (-1)^n\cdot(n+1), \quad U_n(1) = n+1, \tag{77}$$

которые вытекают из (17), (19) в теореме 4.4 в [1] при $m = 0$ (см. также формулы (1.6.13) и (1.6.14) в [7]). По правилу Лопиталя находим

$$\begin{aligned}\Pi_n(0) = {}& (-1)^n K\lim_{x\to 0}\big(T^*_{n+1}(x)+T^*_n(x)\big)' = (-1)^n K\lim_{x\to 0}\big[2(n+1)U^*_n(x)+2nU^*_{n-1}(x)\big] = \\ &= (-1)^n 2K\big[(n+1)U^*_n(0)+nU^*_{n-1}(0)\big] = (-1)^n 2K\big[(n+1)^2(-1)^n+n^2(-1)^{n-1}\big] = 2K(2n+1).\end{aligned}$$

Итак,

$$\Pi_n(0) = 2K(2n+1). \tag{78}$$

Теперь рассмотрим интеграл в (50). Вычислим его с помощью правила замены переменной $x = \dfrac{1+y}{2}$:

$$\int_0^1 p(x)\Pi_n(x)\,dx = (-1)^n K \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} \cdot \frac{T^*_{n+1}(x) + T^*_n(x)}{x}\,dx = (-1)^n 2K \int_{-1}^1 \frac{T_{n+1}(y) + T_n(y)}{(1+y)\sqrt{1-y^2}}\,dy. \tag{79}$$

Интеграл в (79) содержит ортогональные многочлены Чебышёва первого рода. Для его вычисления воспользуемся формулой 22.13.3 в [6]:

$$V.p. \int_{-1}^1 \frac{T_n(y)\,dy}{(y-x)\sqrt{1-y^2}} = \pi U_{n-1}(x). \tag{80}$$

Полагая в (80) $x=-1$, находим

$$\int_0^1 p(x)\Pi_n(x)\,dx = (-1)^n 2K\pi\bigl(U_n(-1) + U_{n-1}(-1)\bigr) = (-1)^n 2K\pi\bigl[(-1)^n(n+1) + (-1)^{n-1}n\bigr] = 2K\pi. \tag{81}$$

Подставляя (78), (81) в (50), окончательно находим коэффициент D:

$$D = \frac{\pi}{2n+1}. \tag{82}$$

Для вычисления коэффициентов A_i квадратурной формулы (52) обратимся к (49).

Найдем сначала производную $\Pi'_n(x_i)$. Из формулы (61), учитывая, что x_i — корень многочлена $\Pi_n(x)$, находим:

$$\Pi'_n(x_i) = (-1)^n K\,\frac{T^{*\prime}_{n+1}(x_i) + T^{*\prime}_n(x_i)}{x_i} = (-1)^n 2K\,\frac{(n+1)U_n(2x_i-1) + nU_{n-1}(2x_i-1)}{x_i}. \tag{83}$$

Из (70) следует

$$2x_i - 1 = \cos\frac{(2i-1)\pi}{2n+1}, \qquad x_i = \cos^2\frac{(2i-1)\pi}{2(2n+1)}. \tag{84}$$

Значения многочленов Чебышёва второго рода в (83) могут быть получены по формуле (72):

$$U_n(2x_i-1) = \frac{\sin\dfrac{(n+1)(2i-1)\pi}{2n+1}}{\sin\dfrac{(2i-1)\pi}{2n+1}}, \tag{85}$$

$$U_{n-1}(2x_i-1) = \frac{\sin\dfrac{n(2i-1)\pi}{2n+1}}{\sin\dfrac{(2i-1)\pi}{2n+1}}. \tag{86}$$

Упростим числитель в (85), (86):

$$\begin{aligned}\sin\frac{(n+1)(2i-1)\pi}{2n+1} &= \sin\frac{(2n+2)(2i-1)\pi}{2(2n+1)} = \sin\Bigl[(2i-1)\frac{\pi}{2} + \frac{(2i-1)\pi}{2(2n+1)}\Bigr] = \\ &= (-1)^{i-1}\cos\frac{(2i-1)\pi}{2(2n+1)} = (-1)^{i-1}\sqrt{x_i},\end{aligned} \tag{87}$$

$$\sin\frac{n(2i-1)\pi}{2n+1} = \sin\frac{2n(2i-1)\pi}{2(2n+1)} = \sin\Bigl[(2i-1)\frac{\pi}{2} - \frac{(2i-1)\pi}{2(2n+1)}\Bigr] = (-1)^{i-1}\cos\frac{(2i-1)\pi}{2(2n+1)} = (-1)^{i-1}\sqrt{x_i}. \tag{88}$$

В (87), (88) мы учли второе равенство из (84). Подставляя (85)–(88) в (83), приходим к следующему значению производной многочлена $\Pi_n'(x_i)$:

$$\Pi_n'(x_i) = (-1)^{n+i-1} \cdot 2K(2n+1) \cdot \frac{1}{\sqrt{x_i}\sin\dfrac{(2i-1)\pi}{2n+1}}. \tag{89}$$

Теперь найдем значение многочлена $\Pi_{n-1}(x_i)$. Воспользуемся представлением $\Pi_{n-1}(x_i)$ через тригонометрические функции. Заменяя в (63) n на $n-1$, имеем

$$\Pi_{n-1}(x_i) = \Pi_{n-1}\left(\frac{1+\cos\dfrac{(2i-1)\pi}{2n+1}}{2}\right) = (-1)^{n-1}2K\,\frac{\cos\dfrac{(2n-1)(2i-1)\pi}{2(2n+1)}}{\cos\dfrac{(2i-1)\pi}{2(2n+1)}} =$$

$$= (-1)^{n-1}2K\,\frac{\cos\dfrac{(2n-1)(2i-1)\pi}{2(2n+1)}}{\sqrt{x_i}}.$$

Упростим числитель и получим окончательное выражение для значения многочлена $\Pi_{n-1}(x_i)$:

$$\Pi_{n-1}(x_i) = (-1)^{n-1}2K\frac{1}{\sqrt{x_i}}\cos\Big[(2i-1)\frac{\pi}{2} - \frac{(2i-1)\pi}{2n+1}\Big] = (-1)^{n+i}2K\frac{1}{\sqrt{x_i}}\sin\frac{(2i-1)\pi}{2n+1}. \tag{90}$$

Отношение старших коэффициентов $\dfrac{\alpha_n}{\alpha_{n-1}}$ находим с учетом (64):

$$\frac{\alpha_n}{\alpha_{n-1}} = -4. \tag{91}$$

Подставляя (89), (90) и (91) в (49), находим коэффициент A_i:

$$A_i = -4\cdot\frac{1}{x_i}\cdot\frac{(-1)^{n+i-1}\sqrt{x_i}\sin\dfrac{(2i-1)\pi}{2n+1}}{2K(2n+1)}\cdot\frac{(-1)^{n+i}\sqrt{x_i}}{2K\sin\dfrac{(2i-1)\pi}{2n+1}} = \frac{1}{K^2(2n+1)}. \tag{92}$$

Итак, мы доказали, что коэффициенты A_i квадратурной формулы Маркова (52) равны между собой:

$$A_i = \frac{2\pi}{2n+1}, \qquad i = 1,\, 2,\, \ldots,\, n. \tag{93}$$

2.4. Остаточный член формулы Маркова. Если функция $f(x)$ имеет непрерывную производную порядка $2n+1$, то остаточный член $R(f)$ формулы (52), согласно (45) и формуле среднего значения, может быть представлен в виде

$$R(f) = \frac{f^{(2n+1)}(\eta)}{(2n+1)!}\int\limits_0^1 \frac{x\omega^2(x)}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx = \frac{f^{(2n+1)}(\eta)}{(2n+1)!}\int\limits_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}}\,\omega^2(x)\,dx, \quad 0 \leqslant \eta \leqslant 1. \tag{94}$$

Напомним, что многочлен $\omega(x)$ степени n принадлежит системе многочленов, ортогональных на отрезке $[\,0,\,1\,]$ с весом

$$\rho(x) = \sqrt{\frac{x}{1-x}}. \tag{53}$$

Многочлен $\omega(x)$ отличается от многочлена $\Pi_n(x)$ (61) только постоянным множителем, равным обратной величине старшего коэффициента α_n, а именно:

$$\omega(x) = \frac{1}{\alpha_n}\,\Pi_n(x) \tag{95}$$

и

$$R(f) = \frac{1}{\alpha_n^2}\cdot\frac{f^{(2n+1)}(\eta)}{(2n+1)!}\int\limits_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}}\,\Pi_n^2(x)\,dx, \qquad 0 \leqslant \eta \leqslant 1. \tag{96}$$

Многочлен $\Pi_n(x)$ — ортонормированный на отрезке $[0,1]$ с весом (53); интеграл в (96), являющийся квадратом нормы этого многочлена, равен 1 (см. формулу (59)). Поэтому, с учетом (64) и (60),

$$R(f)=\frac{1}{\alpha_n^2}\cdot\frac{f^{(2n+1)}(\eta)}{(2n+1)!}=\frac{2\pi}{2^{4n+2}}\frac{f^{(2n+1)}(\eta)}{(2n+1)!}=\frac{\pi}{2^{4n+1}}\frac{f^{(2n+1)}(\eta)}{(2n+1)!},\qquad 0\leqslant\eta\leqslant 1. \tag{97}$$

Таким образом, квадратурная формула Маркова (52) для отрезка $[0,1]$ с одним наперед заданным узлом $a_1=0$ и весовой функцией

$$p(x)=\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$$

имеет вид

$$\int_0^1\frac{f(x)\,dx}{\sqrt{x(1-x)}}=\frac{\pi}{2n+1}f(0)+\frac{2\pi}{2n+1}\sum_{i=1}^n f(x_i)+\frac{\pi}{2^{4n+1}}\cdot\frac{f^{(2n+1)}(\eta)}{(2n+1)!},\qquad 0\leqslant\eta\leqslant 1, \tag{98}$$

или, пользуясь обозначением (8) п. 1,

$$\int_0^1\frac{f(x)\,dx}{\sqrt{x(1-x)}}=\frac{2\pi}{2n+1}\sum_{i=0}^{n}{}' f(x_i)+\frac{\pi}{2^{4n+1}}\frac{f^{(2n+1)}(\eta)}{(2n+1)!},\qquad 0\leqslant\eta\leqslant 1. \tag{99}$$

Абсциссы квадратуры (99) вычисляются по формулам:

$$x_0=0, \tag{100}$$

$$x_i=\frac{1+\cos\dfrac{(2i-1)\pi}{2n+1}}{2},\qquad i=1,\,2,\,\ldots,\,n.$$

Узлы x_i, $i=1,\,2,\,\ldots,\,n$, являются нулями многочлена Якоби $G_n\left(1,\dfrac{3}{2},x\right)$ или многочлена $P_n^{(-1/2,\,1/2)}(2x-1)$ (см. формулы (68), (69)) и совпадают с нечетными нулями смещенного многочлена Чебышёва второго рода степени $2n$

$$U_{2n}^*(x)=U_{2n}(2x-1).$$

Алгебраическая степень точности формулы (99) равна $2n$.

3. Формула численного интегрирования Маркова для интегралов вида $\displaystyle\int_a^b\frac{f(x)\,dx}{\sqrt{(b-x)(x-a)}}$**.**

Приведем отрезок интегрирования $[a,b]$ к отрезку $[0,1]$ линейным преобразованием

$$x=(b-a)\alpha+a,\qquad 0\leqslant\alpha\leqslant 1. \tag{101}$$

Обратное преобразование дается формулой

$$\alpha=\frac{x-a}{b-a}. \tag{102}$$

При преобразовании (101) функция

$$h(x)=\frac{b-a}{\sqrt{(b-x)(x-a)}} \tag{103}$$

преобразуется в функцию

$$p(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{\alpha(1-\alpha)}}. \tag{104}$$

Найдем интеграл, применяя правило замены переменной:

$$\int_a^b\frac{f(x)\,dx}{\sqrt{(b-x)(x-a)}}=\int_0^1\frac{f\big[(b-a)\alpha+a\big]}{\sqrt{\alpha(1-\alpha)}}\,d\alpha. \tag{105}$$

Вычисляя интеграл по отрезку $[0,1]$ от функции $\varphi(\alpha) = f\big[(b-a)\alpha + a\big]$ переменной α с помощью (99) и применяя для определения остаточного члена $R(\varphi)$ правило дифференцирования сложной функции

$$\varphi^{(2n+1)}(\alpha) = (b-a)^{2n+1} f^{(2n+1)}\big[(b-a)\alpha + a\big], \tag{106}$$

получаем квадратурную формулу Маркова следующего вида:

$$\int\limits_a^b \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{(b-x)(x-a)}} = \frac{2\pi}{2n+1} {\sum_{i=0}^{n}}' f(x_i) + \frac{\pi}{2^{4n+1}}(b-a)^{2n+1} \cdot \frac{f^{(2n+1)}(\eta)}{(2n+1)!}, \qquad a \leqslant \eta \leqslant b. \tag{107}$$

Абсциссы квадратуры (107) есть:

$$x_0 = a, \tag{108}$$

$$x_i = (b-a)\alpha_i + a, \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{109}$$

$$\alpha_i = \frac{1 + \cos\dfrac{(2i-1)\pi}{2n+1}}{2}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{110}$$

Символ $\sum'$ определен формулой (8) п. 1. Для весовой функции (103) квадратурная формула будет иметь вид:

$$\int\limits_a^b \frac{(b-a)f(x)\,dx}{\sqrt{(b-x)(x-a)}} = \frac{2\pi(b-a)}{2n+1} {\sum_{i=0}^{n}}' f(x_i) + \frac{\pi}{2^{4n+1}}(b-a)^{2n+2} \cdot \frac{f^{(2n+1)}(\eta)}{(2n+1)!}, \qquad a \leqslant \eta \leqslant b. \tag{111}$$

4. Сходимость квадратурного процесса по формулам Маркова. Обозначим $Q_n(f)$ квадратурную сумму в (107):

$$Q_n(f) = \frac{2\pi}{2n+1} {\sum_{i=0}^{n}}' f\big(x_i^{(n)}\big), \tag{112}$$

где $x_i^{(n)} = x_i$ (x_i определены по формулам (108)–(110)), а через $I(f)$ — интеграл в (107):

$$I(f) = \int\limits_a^b \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{(b-x)(x-a)}}. \tag{113}$$

Докажем, что для любой непрерывной на $[a,b]$ функции $f(x)$ квадратурный процесс по формулам Маркова

$$I(f) = Q_n(f) + R_n(f), \qquad n = 1, 2, \ldots, \tag{114}$$

сходится, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} Q_n(f) = I(f). \tag{115}$$

Доказательство. Так как $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то по теореме Вейерштрасса (см., например, гл. 4, §3, п. 1 в [8]) для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такой многочлен $P(x)$, что для всех $x \in [a,b]$ будет выполняться неравенство

$$\big|f(x) - P(x)\big| < \varepsilon.$$

Пусть m — степень этого многочлена. Рассмотрим остаток квадратуры (114) при $2n \geqslant m$:

$$R_n(f) = I(f) - Q_n(f) = \big[I(f) - I(P)\big] + \big[I(P) - Q_n(P)\big] + \big[Q_n(P) - Q_n(f)\big]. \tag{116}$$

Абсолютная величина первого слагаемого не превышает

$$\varepsilon \int\limits_a^b \frac{dx}{\sqrt{(b-x)(x-a)}} = \varepsilon\pi.$$

Так как степень многочлена $P(x)$ не превосходит алгебраической степени точности квадратурной формулы (114), то $I(P) = Q_n(P)$, и второе слагаемое в (116) равно нулю. Абсолютная величина третьего слагаемого (116) также не превышает $\varepsilon\pi$. Отсюда получаем, что

$$\left|R_n(f)\right| = \left|I(f) - Q_n(f)\right| < 2\varepsilon\pi.$$

Следовательно, остаток квадратуры $R_n(f)$ может быть сделан сколь угодно малым. Это доказывает существование предела (115), а значит, и сходимость квадратурного процесса, определяемого равенством (114).

5. Приближенное вычисление коэффициентов смещенного ряда Чебышёва по формуле численного интегрирования Маркова. Вернемся теперь к вопросу о вычислении коэффициентов

$$a_i^*[f] = a_i^* = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} f(x)T_i^*(x)\,dx, \quad i = 0, 1, \dots,$$

смещенного ряда Чебышёва функции $f(x)$

$$\sum_{i=0}^{\infty}{}' a_i^*[f]\cdot T_i^*(x).$$

Здесь символ $\sum'$ определен формулой (8) п. 1. Применим квадратурную формулу Маркова (99) для вычисления интеграла (16), принимая в качестве интегрируемой функции произведение $f(x)T_i^*(x)$:

$$a_i^* = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^1 \frac{f(x)T_i^*(x)}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx = \frac{2}{\pi}\Big[\frac{2\pi}{2n+1}\sum_{j=0}^{n}{}' f(x_j)T_i^*(x_j) + \frac{\pi}{2^{4n+1}}\frac{(f\cdot T_i^*)^{(2n+1)}(\eta)}{(2n+1)!}\Big]$$

или

$$a_i^* = \frac{4}{2n+1}\sum_{j=0}^{n}{}' f(x_j)T_i^*(x_j) + R(f\cdot T_i^*), \qquad i = 0, 1, \dots, \tag{117}$$

где

$$R(f\cdot T_i^*) = \frac{1}{2^{4n}}\frac{(f\cdot T_i^*)^{(2n+1)}(\eta)}{(2n+1)!}, \qquad 0 \leqslant \eta \leqslant 1. \tag{118}$$

Абсциссы x_j, входящие в (117), есть

$$x_0 = 0, \tag{119}$$

$$x_j = \frac{1 + \cos\dfrac{(2j-1)\pi}{2n+1}}{2}, \qquad j = 1, 2, \dots, n. \tag{120}$$

Значения смещенного многочлена Чебышёва в (117) равны:

$$T_i^*(0) = T_i(-1) = (-1)^i, \tag{121}$$

$$T_i^*(x_j) = T_i(2x_j - 1) = \cos\frac{i(2j-1)\pi}{2n+1}, \qquad j = 1, 2, \dots, n. \tag{122}$$

Подставим (121), (122) в (117):

$$a_i^* = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^1 \frac{f(x)T_i^*(x)}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx = \frac{(-1)^i 2}{2n+1}f(0) + \frac{4}{2n+1}\sum_{j=1}^{n}\cos\frac{i(2j-1)\pi}{2n+1}f(x_j) + R(f\cdot T_i^*), \quad i = 0, 1, \dots. \tag{123}$$

Отбрасывая остаточный член $R(f\cdot T_i^*)$, получаем приближенное значение коэффициента смещенного ряда Чебышёва

$$a_i^* = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^1 \frac{f(x)T_i^*(x)}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx \approx \frac{(-1)^i 2}{2n+1}f(0) + \frac{4}{2n+1}\sum_{j=1}^{n}\cos\frac{i(2j-1)\pi}{2n+1}f(x_j), \qquad i = 0, 1, \dots. \tag{124}$$

Формула (124) будет давать точное значение коэффициента Чебышёва a_i^* функции $f(x)$, если $f(x)$ является многочленом степени не выше $2n - i$.

Предположим, что $f(x)$ — многочлен степени k. Ряд Чебышёва многочлена степени k тождественно совпадает со своей k-й частичной суммой и многочлен $f(x)$ будет равен этой частичной сумме:

$$f(x) = {\sum_{i=0}^{k}}' a_i^* \cdot T_i^*(x). \tag{125}$$

Здесь $a_k^* \cdot T_k^*(x)$ — член ряда Чебышёва с максимальным номером, содержащийся в частичной сумме, a_k^* — коэффициент Чебышёва с максимальным номером, входящий в частичную сумму. При вычислении a_k^* под знаком интеграла в (124) будет многочлен $f(x)T_k^*(x)$ степени $2k$. Для того чтобы коэффициент a_k^* вычислялся точно по квадратурной формуле Маркова (124), необходимо, чтобы алгебраическая степень точности квадратуры (124) была не менее $2k$, т.е.

$$2n \geqslant 2k, \qquad n \geqslant k. \tag{126}$$

Поэтому число нефиксированных узлов квадратурной формулы (124) должно быть не менее степени многочлена $f(x)$ или, другими словами, не менее максимального номера коэффициента Чебышёва.

6. Частичная сумма смещенного ряда Чебышёва, коэффициенты которого вычислены по квадратурной формуле Маркова. Рассмотрим k-ую частичную сумму смещенного ряда Чебышёва функции $f(x)$

$${\sum_{i=0}^{k}}' a_i^*[f] \cdot T_i^*(x), \qquad k > 0. \tag{127}$$

Пусть коэффициенты a_i^* вычислены по квадратурной формуле Маркова (117) или (124) с числом нефиксированных узлов $n = k$. Подставляя квадратурную сумму (117) при $n = k$ в (127), получим

$$J_k(x) = {\sum_{i=0}^{k}}' \Big(\frac{4}{2k+1} {\sum_{j=0}^{k}}' f(x_j) T_i^*(x_j) \Big) \cdot T_i^*(x), \tag{128}$$

где

$$x_0 = 0, \tag{129}$$

$$x_j = \frac{1 + \cos \dfrac{(2j-1)\pi}{2k+1}}{2}, \qquad j = 1, 2, \ldots, k. \tag{130}$$

Напомним, что x_j, $j = 1, 2, \ldots, k$, являются нечетными нулями смещенного многочлена Чебышёва U_{2k}^* второго рода (71) степени $2k$, а числа

$$u_{2k,2j-1} = 2x_j - 1 = \cos \frac{(2j-1)\pi}{2k+1}, \qquad j = 1, 2, \ldots, k, \tag{131}$$

являются нечетными нулями обычного многочлена Чебышёва U_{2k} второго рода (72).

Для дальнейшего нам понадобится тождество для смещенных многочленов Чебышёва первого рода.

6.1. Тождество Кристоффеля–Дарбу для смещенных многочленов Чебышёва первого рода. Воспользуемся тождеством Кристоффеля–Дарбу для обычных многочленов Чебышёва $T_i(x)$ (см. формулу (51) в теореме 2.8 в [1] при $n = k$):

$$2(x - y) {\sum_{i=0}^{k}}' T_i(x) T_i(y) = T_{k+1}(x) T_k(y) - T_k(x) T_{k+1}(y). \tag{132}$$

Положим $x = 2t - 1$, $y = 2\tau - 1$. Тогда $x - y = 2(t - \tau)$. Подставим в (132) и, учитывая, что $T_i(2t-1) = T_i^*(t)$, получим

$$4(t - \tau) {\sum_{i=0}^{k}}' T_i^*(t) T_i^*(\tau) = T_{k+1}^*(t) T_k^*(\tau) - T_k^*(t) T_{k+1}^*(\tau).$$

Заменим в полученном равенстве t на x, τ на y:

$$4(x-y)\sum_{i=0}^{k}{}' T_i^*(x)T_i^*(y) = T_{k+1}^*(x)T_k^*(y) - T_k^*(x)T_{k+1}^*(y). \tag{133}$$

Это и есть тождество Кристоффеля–Дарбу для смещенных многочленов Чебышёва первого рода. Формулу (133) можно записать в виде

$$4(x-y)\sum_{i=0}^{k}{}' T_i(2x-1)T_i(2y-1) = T_{k+1}(2x-1)T_k(2y-1) - T_k(2x-1)T_{k+1}(2y-1). \tag{134}$$

6.2. Связь частичной суммы ряда Чебышёва с интерполированием. Частичная сумма (128) смещенного ряда Чебышёва функции $f(x)$ представляет собой многочлен степени k. Преобразуем формулу (128) к виду

$$J_k(x) = \sum_{j=0}^{k}{}' \frac{4}{2k+1}\Big(\sum_{i=0}^{k}{}' T_i^*(x_j)T_i^*(x)\Big) f(x_j). \tag{135}$$

Докажем, что многочлен (135) является интерполяционным многочленом Лагранжа для функции $f(x)$ с узлами интерполирования x_0, x_j, $j = 1, 2, \ldots, k$, определяемыми формулами (129), (130).

Вычислим выражение

$$Q_j(x) = \frac{4}{2k+1}\sum_{i=0}^{k}{}' T_i^*(x_j)T_i^*(x) \tag{136}$$

при $x = x_l$, $l = 0, 1, \ldots, k$.

1-й случай. Пусть $l \neq j$, $j \neq 0$ и $l \neq 0$. Значение суммы в (136) найдем, если воспользуемся тождеством Кристоффеля–Дарбу (133), (134) при $x = x_j$ и $y = x_l$:

$$\begin{aligned} 4(x_j - x_l)\sum_{i=0}^{k}{}' T_i^*(x_j)T_i^*(x_l) &= T_{k+1}\Big(\cos\frac{(2j-1)\pi}{2k+1}\Big)\cdot T_k\Big(\cos\frac{(2l-1)\pi}{2k+1}\Big) - \\ &- T_k\Big(\cos\frac{(2j-1)\pi}{2k+1}\Big)\cdot T_{k+1}\Big(\cos\frac{(2l-1)\pi}{2k+1}\Big). \end{aligned} \tag{137}$$

Выразим значения многочленов Чебышёва в правой части (137) через тригонометрические функции:

$$T_{k+1}\Big(\cos\frac{(2j-1)\pi}{2k+1}\Big) = \cos\frac{(k+1)(2j-1)\pi}{2k+1} = \cos\Big(j\pi + \frac{(j-k-1)\pi}{2k+1}\Big) = (-1)^j\cos\frac{(j-k-1)\pi}{2k+1},$$

$$T_k\Big(\cos\frac{(2l-1)\pi}{2k+1}\Big) = \cos\frac{k(2l-1)\pi}{2k+1} = \cos\Big(l\pi - \frac{(l+k)\pi}{2k+1}\Big) = (-1)^l\cos\frac{(l+k)\pi}{2k+1}.$$

Правая часть (137) будет равна

$$(-1)^{j+l}\cos\frac{(j-k-1)\pi}{2k+1}\cos\frac{(l+k)\pi}{2k+1} - (-1)^{j+l}\cos\frac{(l-k-1)\pi}{2k+1}\cos\frac{(j+k)\pi}{2k+1}.$$

Преобразуем произведение косинусов в сумму косинусов и получим следующее значение для правой части (137):

$$(-1)^{j+l}\frac{1}{2}\Big[\cos\frac{(-2k-1+j-l)\pi}{2k+1} - \cos\frac{(-2k-1+l-j)\pi}{2k+1}\Big] =$$

$$= (-1)^{j+l}\frac{1}{2}\Big[\cos\Big(-\pi + \frac{(j-l)\pi}{2k+1}\Big) - \cos\Big(-\pi + \frac{(l-j)\pi}{2k+1}\Big)\Big] = 0.$$

Следовательно, левая часть (137) равна нулю, т.е.

$$(x_j - x_l)\sum_{i=0}^{k}{}' T_i^*(x_j)T_i^*(x_l) = 0.$$

Так как, по предположению, $j \neq l$, а значит, $x_j \neq x_l$, то сумма в левой части (137) равна нулю. Таким образом, $Q_j(x_l) = 0$ при $l \neq j,\ j \neq 0$ и $l \neq 0$.

2-*й случай.* Пусть $l = 0,\ j \neq 0$. Тогда сумма в (136) при $x = x_0$ будет равна

$$\sum_{i=0}^{k}{}' T_i^*(x_j)T_i^*(0) = \sum_{i=0}^{k}{}' (-1)^i T_i^*(x_j) = \sum_{i=0}^{k}{}' (-1)^i T_i\Big(\cos\frac{(2j-1)\pi}{2k+1}\Big). \tag{138}$$

Будем применять обозначение

$$\sum_{i=l}^{m}{}'' a_i = \frac{1}{2}\,a_l + a_{l+1} + \cdots + a_{m-1} + \frac{1}{2}\,a_m, \quad m > l. \tag{139}$$

Сумму с одним штрихом в (138) преобразуем в сумму с двумя штрихами:

$$\sum_{i=0}^{k}{}'(-1)^i T_i\Big(\cos\frac{(2j-1)\pi}{2k+1}\Big) = \sum_{i=0}^{k}{}''(-1)^i T_i\Big(\cos\frac{(2j-1)\pi}{2k+1}\Big) + \frac{1}{2}(-1)^k T_k\Big(\cos\frac{(2j-1)\pi}{2k+1}\Big). \tag{140}$$

Воспользуемся тождеством (63) из теоремы 2.8 в [1]:

$$\sum_{i=0}^{k}{}''(-1)^i T_i(y) = \frac{1}{2}(-1)^k (y-1) U_{k-1}(y). \tag{141}$$

Заменим сумму $\sum''$ в правой части (140) с помощью тождества (141) при $y = \cos\dfrac{(2j-1)\pi}{2k+1}$, при этом правая часть (140) примет вид:

$$\frac{(-1)^k}{2}\Big[\Big(\cos\frac{(2j-1)\pi}{2k+1} - 1\Big)\cdot U_{k-1}\Big(\cos\frac{(2j-1)\pi}{2k+1}\Big) + \cos\frac{k(2j-1)\pi}{2k+1}\Big]. \tag{142}$$

Значение многочлена Чебышёва второго рода может быть получено по формуле (72). Подстановка этого значения, которое равно

$$\frac{\sin\dfrac{k(2j-1)\pi}{2k+1}}{\sin\dfrac{(2j-1)\pi}{2k+1}},$$

приведет выражение в квадратных скобках в (142) к следующему виду:

$$\Big[\cos\frac{(2j-1)\pi}{2k+1}\cdot\sin\frac{k(2j-1)\pi}{2k+1} - \sin\frac{k(2j-1)\pi}{2k+1} + \sin\frac{(2j-1)\pi}{2k+1}\cdot\cos\frac{k(2j-1)\pi}{2k+1}\Big]\Big(\sin\frac{(2j-1)\pi}{2k+1}\Big)^{-1}.$$

Простые преобразования выражения в квадратных скобках дают:

$$\sin\frac{(k+1)(2j-1)\pi}{2k+1} - \sin\frac{k(2j-1)\pi}{2k+1} = 2\cos\Big(\frac{2k+1}{2}\cdot\frac{(2j-1)\pi}{2k+1}\Big)\cdot\sin\frac{(2j-1)\pi}{2(2k+1)} = 0.$$

Значит, $Q_j(x_0) = 0$ при $j \neq 0$. Равенство $Q_0(x_l) = 0$ при $l \neq 0$ доказывается аналогично.

3-*й случай.* Пусть $l = j \neq 0$. Тогда

$$Q_j(x_j) = \frac{4}{2k+1}\sum_{i=0}^{k}{}'\big[T_i^*(x_j)\big]^2 = \frac{4}{2k+1}\sum_{i=0}^{k}{}' T_i^2(2x_j - 1). \tag{143}$$

Для вычисления суммы квадратов многочленов Чебышёва воспользуемся тождеством (65) из теоремы 2.9 в [1]:

$$\sum_{i=0}^{k} T_i^2(y) = \frac{1}{4}\big(U_{2k}(y) + 2k + 3\big). \tag{144}$$

Преобразуем сумму со штрихом в (143) в сумму без штриха:

$$\sum_{i=0}^{k}{}' T_i^2(2x_j-1)=\sum_{i=0}^{k} T_i^2(2x_j-1)-\frac{1}{2}\,T_0^2,\qquad T_0=1.$$

Заменим сумму квадратов на равную ей правую часть из (144) при $y=2x_j-1$:

$$\sum_{i=0}^{k}{}' T_i^2(2x_j-1)=\frac{1}{4}\Big[U_{2k}(2x_j-1)+2k+3\Big]-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}\Big[U_{2k}(2x_j-1)+2k\Big]+\frac{1}{4}. \tag{145}$$

Учтем, что $2x_j-1$ есть нечетный корень многочлена Чебышёва второго рода U_{2k}. Поэтому

$$\sum_{i=0}^{k}{}' T_i^2(2x_j-1)=\frac{2k+1}{4}. \tag{146}$$

Подставляя полученную сумму (146) в (143), имеем

$$Q_j(x_j)=1\qquad\text{при}\qquad j\neq 0.$$

4-*й случай.* Пусть $l=j=0$. Как и в третьем случае, здесь будет выполняться равенство (145). Значение многочлена Чебышёва второго рода может быть найдено из (77):

$$U_{2k}(-1)=2k+1.$$

Поэтому

$$\sum_{i=0}^{k}{}' T_i^2(-1)=\frac{4k+1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{2k+1}{2}. \tag{147}$$

Подставляя полученную сумму (147) в (143), получаем

$$Q_0(x_0)=2.$$

Напомним, что многочлен $Q_0(x)$ входит в сумму (135) для $J_k(x)$ с дополнительным коэффициентом, равным $\dfrac{1}{2}$.

Итак, мы доказали, что

$$Q_j(x_l)=0\qquad\text{при}\qquad j\neq l,\qquad j=0,1,\ldots,k,\quad l=0,1,\ldots,k, \tag{148}$$

$$Q_j(x_j)=1\qquad\text{при}\qquad j=1,2,\ldots,l, \tag{149}$$

$$Q_0(x_0)=2. \tag{150}$$

Из (148)–(150) следует, что многочлен $J_k(x)$, определенный формулой (128), удовлетворяет условиям

$$J_k(x_l)=f(x_l),\qquad l=0,1,\ldots,k, \tag{151}$$

где x_l задаются формулами (129), (130), и, следовательно, является интерполяционным полиномом для функции $f(x)$ с узлами интерполирования (129), (130). Многочлен, определяемый по формуле (135), является интерполяционным многочленом Лагранжа для функции $f(x)$.

6.3. Зависимость между коэффициентами Чебышёва и их приближенными значениями, вычисленными по формуле Маркова. Установим зависимость коэффициентов Чебышёва $a_i^*[J_k]$ интерполяционного полинома $J_k(x)$ (128) функции $f(x)$ от коэффициентов Чебышёва самой функции.

Формула (128) дает простое выражение для коэффициентов Чебышёва многочлена $J_k(x)$:

$$a_i^*[J_k]=\frac{4}{2k+1}\sum_{j=0}^{k}{}' f(x_j)T_i^*(x_j),\qquad i=0,1,\ldots,k, \tag{152}$$

здесь x_j вычисляются по (129), (130), а символ $\sum'$ определен формулой (8) в п. 1. Подставим в (152) разложение функции $f(x)$ в смещенный ряд Чебышёва

$$f(x) = \sum_{l=0}^{\infty}{}' a_l^*[f] \cdot T_l^*(x). \tag{153}$$

Получим

$$a_i^*[J_k] = \frac{4}{2k+1} \sum_{j=0}^{k}{}' \Big(\sum_{l=0}^{\infty}{}' a_l^*[f] \cdot T_l^*(x_j) \Big) T_i^*(x_j), \qquad i = 0, 1, \ldots, k. \tag{154}$$

Поменяем местами порядок суммирования:

$$a_i^*[J_k] = \frac{4}{2k+1} \sum_{l=0}^{\infty}{}' a_l^*[f] \sum_{j=0}^{k}{}' T_l^*(x_j) T_i^*(x_j), \qquad i = 0, 1, \ldots, k. \tag{155}$$

Рассмотрим интеграл

$$\int_0^1 \frac{T_r^*(x) T_i^*(x)}{\sqrt{x(1-x)}}\, dx, \qquad i, r = 0, 1, \ldots, k. \tag{156}$$

Так как $r + i \leqslant 2k$, то в квадратурной формуле Маркова (99) при $n = k$ и $f(x) = T_r^*(x) \cdot T_i^*(x)$ остаточный член обращается в нуль, т.е.

$$\int_0^1 \frac{T_r^*(x) T_i^*(x)}{\sqrt{x(1-x)}}\, dx = \frac{2\pi}{2k+1} \sum_{j=0}^{k}{}' T_r^*(x_j) T_i^*(x_j); \tag{157}$$

абсциссы x_j, $j = 0, 1, \ldots, k$, определены по (129), (130). В силу (13), (14) левая часть (157), а следовательно, и правая часть (157) будут равны

$$\frac{2\pi}{2k+1} \sum_{j=0}^{k}{}' T_r^*(x_j) T_i^*(x_j) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad r \neq i, \\ \pi & \text{при} \quad r = i = 0, \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{при} \quad r = i > 0. \end{cases}$$

Отсюда

$$\frac{4}{2k+1} \sum_{j=0}^{k}{}' T_r^*(x_j) T_i^*(x_j) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad r \neq i, \\ 2 & \text{при} \quad r = i = 0, \\ 1 & \text{при} \quad r = i > 0. \end{cases} \tag{158}$$

Рассмотрим

$$T_l^*(x_j) = T_l(2x_j - 1) = T_l\Big(\cos\frac{(2j-1)\pi}{2k+1}\Big) = \cos\frac{l(2j-1)\pi}{2k+1}.$$

Пусть $l = q(2k+1) \pm r$, где q и r – произвольные целые неотрицательные числа. Тогда

$$T_l^*(x_j) = \cos\frac{\big[q(2k+1) \pm r\big](2j-1)\pi}{2k+1} = \cos\Big[q(2j-1)\pi \pm \frac{r(2j-1)\pi}{2k+1}\Big].$$

Воспользуемся формулами приведения и получим:

$$T_l^*(x_j) = \begin{cases} \cos\dfrac{r(2j-1)\pi}{2k+1}, & \text{если} \quad q \text{ — четное}, \\ -\cos\dfrac{r(2j-1)\pi}{2k+1}, & \text{если} \quad q \text{ — нечетное}. \end{cases} \tag{159}$$

Косинус в правой части (159) равен $T_r^*(x_j)$. Таким образом, для произвольных целых неотрицательных чисел q и r справедливо равенство

$$T_{q(2k+1)\pm r}^*(x_j) = \begin{cases} T_r^*(x_j), & \text{если} \quad q \text{ — четное}, \\ -T_r^*(x_j), & \text{если} \quad q \text{ — нечетное}. \end{cases} \tag{160}$$

Для каждого $l \geqslant 0$ существуют такие целые числа $q \geqslant 0$ и $0 \leqslant r < 2k+1$, что

$$l = q(2k+1) + r. \tag{161}$$

Если $0 \leqslant r \leqslant k$, то положим $l = q(2k+1) + r$. Если $k < r$, то преобразуем (161) следующим образом:

$$l = \big[q(2k+1) + (2k+1)\big] - (2k+1) + r = (q+1)(2k+1) - (2k+1-r).$$

Обозначим $r_1 = 2k+1-r$. Тогда $0 < r_1 \leqslant k$ и $l = (q+1)(2k+1) - r_1$. Таким образом, для каждого $l \geqslant 0$ существуют такие целые числа $\bar q \geqslant 0$ и $-k \leqslant \bar r \leqslant k$, что

$$l = \bar q(2k+1) + \bar r, \tag{162}$$

где

$$\bar q = \begin{cases} q, & \text{если} \quad r \leqslant k, \\ q+1, & \text{если} \quad r > k, \end{cases} \qquad \bar r = \begin{cases} r, & \text{если} \quad r \leqslant k, \\ -r_1 = -(2k+1-r), & \text{если} \quad r > k. \end{cases} \tag{163}$$

Из (160) следует, что

$$T_l^*(x_j) = T^*_{\bar q(2k+1)+\bar r}(x_j) = \begin{cases} T^*_{|\bar r|}(x_j), & \text{если} \quad \bar q \text{ — четное}, \\ -T^*_{|\bar r|}(x_j), & \text{если} \quad \bar q \text{ — нечетное}. \end{cases} \tag{164}$$

Вернемся теперь к формуле (155) для коэффициента Чебышёва $a_i^*[J_k]$. Ввиду (158) для фиксированного $0 < i \leqslant k$ внутренняя сумма в (155) отлична от нуля только при

$$l = i, \quad 2k+1-i, \quad 2k+1+i, \quad 2(2k+1)-i, \quad 2(2k+1)+i, \ \ldots\,,$$

т.е. при

$$l = i, \quad 2k+1-i, \quad 2k+1+i, \quad 4k+2-i, \quad 4k+2+i, \ \ldots\ .$$

Из (155), (164), (158) вытекает, что

$$a_i^*[J_k] = a_i^*[f] - a^*_{2k+1-i}[f] - a^*_{2k+1+i}[f] + a^*_{4k+2-i}[f] + a^*_{4k+2+i}[f] - \cdots\ . \tag{165}$$

В частности, при $i = k$ внутренняя сумма в (155) отлична от нуля только при

$$l = k, \quad 2k+1-k, \quad 2k+1+k, \quad 2(2k+1)-k, \quad 2(2k+1)+k, \ldots$$

и

$$a_k^*[J_k] = a_k^*[f] - a^*_{k+1}[f] - a^*_{3k+1}[f] + a^*_{3k+2}[f] + a^*_{5k+2}[f] - \cdots\ . \tag{166}$$

Ввиду (158) для $i = 0$ внутренняя сумма в правой части (155) отлична от нуля только при

$$l = 0, \quad 2k+1, \quad 2(2k+1), \quad 3(2k+1), \quad 4(2k+1), \ \ldots\ .$$

Из (155), (164), (158) получаем

$$a_0^*[J_k] = a_0^*[f] - 2a^*_{2k+1}[f] + 2a^*_{4k+2}[f] - 2a^*_{6k+3}[f] + 2a^*_{8k+4}[f] - \cdots\ . \tag{167}$$

На основании формул (165), (167) можно сделать вывод о том, что если последовательность $\{a_i^*[f]\}$ достаточно регулярно стремится к нулю, то коэффициент

$$a_i^*[J_k] \approx a_i^*[f]$$

и имеет наибольшую абсолютную погрешность при $i = k$; при $i = k-1,\ k-2,\ \ldots, 2, 1$ эта погрешность меньше; наименьшую погрешность имеет коэффициент $a_0^*[J_k]$.

7. О погрешности приближения функции частичной суммой ряда Чебышёва. Оценим с помощью *неравенства Лебега* остаток $r_k(x,f)$ смещенного ряда Чебышёва функции $f(x)$, $0 \leqslant x \leqslant 1$,

$$f(x) = {\sum_{i=0}^{k}}' a_i^*[f] \cdot T_i^*(x) + r_k(x,f), \tag{168}$$

где
$$r_k(x,f)=\sum_{i=k+1}^{\infty} a_i^*[f]\cdot T_i^*(x), \tag{169}$$

Преобразуем частичную сумму смещенного ряда Чебышёва функции $f(x)$:
$$S_k(x,f)={\sum_{i=0}^{k}}' a_i^*[f]\cdot T_i^*(x)={\sum_{i=0}^{k}}' \frac{2}{\pi}\int_0^1 p(\gamma)f(\gamma)T_i^*(\gamma)\,d\gamma\cdot T_i^*(x)=\int_0^1 p(\gamma)f(\gamma)\Bigl(\frac{2}{\pi}{\sum_{i=0}^{k}}' T_i^*(\gamma)T_i^*(x)\Bigr)\,d\gamma;$$
здесь
$$p(\gamma)=\frac{1}{\sqrt{\gamma(1-\gamma)}}.$$
Обозначим
$$K_k(x,\gamma)=\frac{2}{\pi}{\sum_{i=0}^{k}}' T_i^*(x)T_i^*(\gamma). \tag{170}$$
Тогда
$$S_k(x,f)=\int_0^1 p(\gamma)f(\gamma)K_k(x,\gamma)\,d\gamma. \tag{171}$$

Пусть $Q_k(x)$ — алгебраический многочлен наилучшего равномерного приближения функции $f(x)$ на сегменте $[\,0,1\,]$ степени не выше k. Преобразуем k-й остаток смещенного ряда Чебышёва:
$$r_k(x,f)=f(x)-S_k(x,f)=\bigl[f(x)-Q_k(x)\bigr]+\bigl[Q_k(x)-S_k(x,f)\bigr]. \tag{172}$$
Рассмотрим разность $f(x)-Q_k(x)$. Для любого $x\in[\,0,\,1]$ справедливо неравенство
$$\bigl|f(x)-Q_k(x)\bigr|\leqslant E_k(f), \tag{173}$$
где $E_k(f)$ — *наилучшее равномерное приближение функции* $f(x)$ многочленом степени не выше k на сегменте $[\,0,1\,]$, или *погрешность наилучшего приближения степени* k. Оценим сверху погрешность наилучшего приближения. Для этого воспользуемся так называемыми прямыми теоремами о наилучших приближениях непрерывных функций алгебраическими многочленами. Приведем (без доказательства) одну из таких теорем.

7.1. О порядке наилучшего равномерного приближения.

Теорема. *Если функция* $f(x)$ *непрерывно дифференцируема* p *раз на сегменте* $[\,a,b\,]$, *то при* $n>p$ *справедливо неравенство*
$$E_n(f)\leqslant\frac{c_p}{n^p}\,\omega\Bigl(f^{(p)},\frac{b-a}{2(n-p)}\Bigr),$$
где
$$c_p=\frac{1}{p!2^p}\,11^{p+1}p^p(b-a)^p. \tag{174}$$
Здесь $\omega(f^{(p)},\delta)$ — модуль непрерывности p-й производной функции $f(x)$ на сегменте $[\,a,\,b\,]$ (доказательство теоремы см. в [7], гл. IX, § 6, теорема 9.10).

Из этой теоремы следует, что если функция $f(x)$ дифференцируема на $[\,a,b\,]$ $p+1$ раз, причем $(p+1)$-я производная удовлетворяет условию
$$\bigl|f^{p+1}(x)\bigr|\leqslant M_{p+1}$$
при $x\in[\,a,\,b\,]$, то
$$E_n(f)\leqslant\frac{c_p(b-a)M_{p+1}}{n^p2(n-p)}\leqslant\frac{c_p(b-a)M_{p+1}}{2n^p}\cdot\frac{p+1}{n}. \tag{175}$$
Подставив в (175) значение константы c_p из (174), получаем оценку
$$E_n(f)\leqslant\frac{11^{p+1}p^p(p+1)M_{p+1}}{2^{p+1}p!n^{p+1}}\,(b-a)^{p+1},\qquad n>p. \tag{176}$$

(См. также теорему о порядке наилучшего равномерного приближения непрерывных функций, приведенную в гл. 4, § 5, стр. 363, 364 в [8].)

Еще одну оценку для погрешности наилучшего приближения можно получить, если обратиться к теории интерполирования.

Пусть $f(x)$ имеет на $[a, b]$ производную $(n+1)$-ого порядка, причем

$$\left|f^{(n+1)}(x)\right| \leqslant M_{n+1}.$$

Напомним оценку погрешности интерполяционного многочлена Лагранжа $L_n(x)$ функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$, если в качестве узлов интерполирования взять числа

$$x_i = \frac{1}{2}\big[(b-a)\xi_i + b + a\big], \qquad i = 0, 1, \dots, n,$$

где ξ_i являются корнями многочлена Чебышёва $T_{n+1}(\xi)$ на $[-1, 1]$. Оценка для этого случая будет такая:

$$\left|f(x) - L_n(x)\right| \leqslant \frac{M_{n+1}(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}(n+1)!}, \qquad x \in [a, b] \tag{177}$$

(см. гл. 2, § 3, п. 2, формула (4) в [8]). Но если неравенство (177) выполняется на всем отрезке $[a, b]$ для некоторого многочлена степени n, то оно тем более будет выполняться для многочлена наилучшего равномерного приближения степени n функции $f(x)$ на $[a, b]$. Таким образом, отсюда следует оценка сверху наилучшего равномерного приближения степени n на сегменте $[a, b]$, а именно:

$$E_n(f) \leqslant \frac{M_{n+1}(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}(n+1)!}. \tag{178}$$

В качестве примера использования приведенных оценок рассмотрим решение задачи Коши (I), (II). Допустим, что правая часть $f(x, y, y')$ дифференциального уравнения (I) имеет в рассматриваемой области изменения аргументов x, y, y' непрерывные ограниченные частные производные по аргументам x, y, y' $(p+1)$-го порядка. Тогда функция $F(x) = f(x, y(x), y'(x))$ имеет непрерывную ограниченную производную порядка $p+1$ на $[x_0, x_0+X]$, т.е. выполняется условие

$$\left|F^{(p+1)}(x)\right| \leqslant M_{p+1}, \qquad x \in [x_0, x_0+X]. \tag{179}$$

Мы обсуждаем решение задачи Коши (I), (II) на сегменте $[x_0, x_0+h]$, $h \leqslant X$. На этом сегменте правую часть уравнения (II), взятую на решении задачи, рассмотрим как функцию переменной α:

$$F(x) = F(x_0 + \alpha h) = \Phi(\alpha), \qquad \alpha \in [0, 1].$$

$\Phi(\alpha)$ имеет на $[0, 1]$ непрерывную и ограниченную производную до $(p+1)$-го порядка включительно. По правилу дифференцирования сложной функции имеем

$$\Phi^{(p+1)}(\alpha) = h^{p+1}F^{(p+1)}(x)$$

и

$$\left|\Phi^{(p+1)}(\alpha)\right| \leqslant h^{p+1}M_{p+1}. \tag{180}$$

Применим оценку сверху (176) для наилучшего приближения к функции $\Phi(\alpha)$ на $[0, 1]$ для $n = k > p$:

$$E_k(\Phi) \leqslant \frac{11^{p+1}p^p(p+1)M_{p+1}}{2^{p+1}p!k^{p+1}}\, h^{p+1}, \qquad k > p. \tag{181}$$

Аналогично оценка (178), применимая к $\Phi(\alpha)$ для $n = k = p$, дает:

$$E_k(\Phi) \leqslant \frac{M_{k+1}h^{k+1}}{2^{2k+1}(k+1)!}. \tag{182}$$

Очевидно, что применение оценок (176) и (178) к функции $\Phi(\alpha)$ на сегменте $[0, 1]$ равносильно их применению к функции $F(x)$ на сегменте $[x_0, x_0+h]$.

Оценка (181) дает порядок стремления $E_k(F)$ к нулю при $k \to \infty$. Она же и оценка (182) показывают порядок наилучшего равномерного приближения $E_k(F)$ относительно длины h частичного отрезка $[\,x_0,\, x_0+h\,]$ при $h \to 0$.

7.2. Оценки остаточного члена ряда Чебышёва. Рассмотрим вторую разность в (172), а именно: разность между многочленом $Q_k(x)$ наилучшего равномерного приближения функции $f(x)$ и k-й частичной суммой ее смещенного ряда Чебышёва. Заметим, что многочлен $Q_k(x)$ совпадает с k-й частичной суммой своего ряда Чебышёва. Из интегрального представления частичной суммы (171) следует, что

$$Q_k(x) - S_k(x,f) = \int\limits_0^1 p(\gamma)\big[Q_k(\gamma) - f(\gamma)\big]\,K_k(x,\gamma)\,d\gamma.$$

Отсюда имеем неравенство

$$\big|Q_k(x) - S_k(x,f)\big| \leqslant E_k(f)\cdot \int\limits_0^1 p(\gamma)\big|K_k(x,\gamma)\big|\,d\gamma. \tag{183}$$

Обозначим

$$L_k(x) = \int\limits_0^1 p(\gamma)\big|K_k(x,\gamma)\big|\,d\gamma = \int\limits_0^1 p(\gamma)\bigg|\frac{2}{\pi}\sideset{}{'}\sum_{i=0}^{k} T_i^*(x)T_i^*(\gamma)\bigg|\,d\gamma. \tag{184}$$

Величина $L_k(x)$ называется *функцией Лебега порядка* k ортонормированной системы $\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\,T_0^*(x)$, $\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\,T_n^*(x)$, $n = 1, 2, \ldots$. Тогда неравенство (183) принимает вид

$$\big|Q_k(x) - S_k(x,f)\big| \leqslant E_k(f)L_k(x). \tag{185}$$

Из равенства (172) и неравенства (185) следует, что k-й остаток смещенного ряда Чебышёва функции $f(x)$ можно оценить сверху следующим образом:

$$\big|r_k(x,f)\big| \leqslant E_k(f)\big(1 + L_k(x)\big). \tag{186}$$

Неравенство (186) называется *неравенством Лебега.*

Преобразуем интеграл $L_k(x)$, применяя правило замены переменной. Положим

$$x = \cos^2\frac{u}{2}, \qquad \gamma = \cos^2\frac{t}{2}.$$

Тогда, учитывая (18), (20),

$$T_i^*(x) = T_{2i}\Big(\cos\frac{u}{2}\Big) = \cos\Big(2i\cdot\frac{u}{2}\Big) = \cos\, iu, \qquad T_i^*(\gamma) = \cos\, it.$$

Так как $p(\gamma)\,d\gamma = -dt$, то из (184) находим

$$L_k\Big(\cos^2\frac{u}{2}\Big) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\Big|\sideset{}{'}\sum_{i=0}^{k}\cos\, iu\cdot\cos\, it\Big|\,dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\Big|\sideset{}{'}\sum_{i=0}^{k}\big(\cos\, i(t-u) + \cos\, i(t+u)\big)\Big|\,dt. \tag{187}$$

Обозначим

$$D_k(v) = \sideset{}{'}\sum_{i=0}^{k}\cos\, iv. \tag{188}$$

Вспомогательная функция $D_k(v)$ называется *ядром Дирихле.* Тогда

$$L_k\Big(\cos^2\frac{u}{2}\Big) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\big|D_k(t-u) + D_k(t+u)\big|\,dt. \tag{189}$$

Найдем максимум функции Лебега. Из (189) имеем

$$L_k\Big(\cos^2\frac{u}{2}\Big) \leqslant \frac{1}{\pi}\Big(\int\limits_0^\pi \big|D_k(t-u)\big|\,dt + \int\limits_0^\pi \big|D_k(t+u)\big|\,dt\Big) = \frac{1}{\pi}\Big(\int\limits_{-u}^{\pi-u} \big|D_k(v)\big|\,dv + \int\limits_u^{\pi+u} \big|D_k(v)\big|\,dv\Big). \qquad (190)$$

Поскольку $D_k(v)$ является четной и периодической с периодом 2π функцией, то интеграл от $\big|D_k(v)\big|$ по сегменту $[-u,\,0]$ равен интегралу от этой функции по сегменту $[0,\,u]$, а интеграл по сегменту $[\pi,\,\pi+u]$ равен интегралу по сегменту $[\pi-u,\,\pi]$. Поэтому из (190) вытекает неравенство

$$L_k\Big(\cos^2\frac{u}{2}\Big) \leqslant \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi \big|D_k(v)\big|\,dv. \qquad (191)$$

Положим в (189) $u=0$; тогда

$$L_k(1) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi \big|D_k(t)\big|\,dt.$$

Отсюда и из (191) следует соотношение для максимума функции Лебега

$$L_k = \max_{u\in[0,\pi]} L_k\Big(\cos^2\frac{u}{2}\Big) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi \big|D_k(v)\big|\,dv. \qquad (192)$$

Максимум функции Лебега порядка k называется *постоянной Лебега порядка* k. Для интеграла (192) известна асимптотика (см., например, формулу (31) из § 7 в [1])

$$L_k = \big\|L_k(x)\big\|_\infty = \frac{4}{\pi^2}\ln k + O(1), \qquad k\to\infty. \qquad (193)$$

Оценка (193) дает скорость возрастания постоянных Лебега для смещенных многочленов Чебышёва с ростом k.

Из неравенства Лебега (186) с учетом (193) имеем оценку

$$\big\|r_k(x,f)\big\|_\infty \leqslant c_1\cdot\ln k\cdot E_k(f), \qquad c_1 = \mathrm{const}. \qquad (194)$$

Обратимся теперь, в качестве примера использования оценки (194), к задаче Коши (I), (II) на сегменте $[x_0,\,x_0+h]$. Правую часть уравнения (I), взятую на решении задачи и рассматриваемую как функция переменной α

$$F(x) = f\big(x, y(x), y'(x)\big) = F(x_0+\alpha h) = \Phi(\alpha), \qquad \alpha\in[0,\,1], \qquad (195)$$

аппроксимируем k-й частичной суммой смещенного ряда Чебышёва. Используя оценку наилучшего равномерного приближения (181), из (194) получаем неравенство для остаточного члена

$$r_k(\alpha,\Phi) = r_k\big(x_0+\alpha h, F(x_0+\alpha h)\big) = r_k(x,F)$$

ряда Чебышёва правой части уравнения (I)

$$\max_{\alpha\in[0,1]}\big|r_k(\alpha,\Phi)\big| = \max_{x\in[x_0,x_0+h]}\big|r_k(x,F)\big| \leqslant \frac{c_p M_{p+1}\ln k}{k^{p+1}}\,h^{p+1}, \qquad k>p, \qquad (196)$$

где c_p — постоянная, зависящая от p и не зависящая от k.

Из (196) видно, что если функция $F(x)$ достаточно гладкая, то $r_k(x,F)$ стремится к нулю очень быстро при $k\to\infty$. Используя оценку наилучшего равномерного приближения (182), из (194) имеем

$$\max_{\alpha\in[0,1]}\big|r_k(\alpha,\Phi)\big| = \max_{x\in[x_0,x_0+h]}\big|r_k(x,F)\big| \leqslant \frac{c_1 M_{k+1}\ln k}{2^{2k+1}(k+1)!}\,h^{k+1}. \qquad (197)$$

Оценки (196), (197) показывают также порядок остаточного члена ряда Чебышёва функции $\Phi(\alpha) = F(x_0+\alpha h)$ относительно длины частичного сегмента $[x_0,\,x_0+h]$ при $h\to 0$.

7.3. Суммарная погрешность, складывающаяся из остаточного члена ряда Чебышёва и ошибок в приближенных значениях его коэффициентов. Выразим коэффициенты Чебышёва, входящие в частичную сумму ряда (168), по квадратурной формуле Маркова (117) с остаточным членом (118) при $n = k$. С учетом обозначений, принятых в (128), (152), имеем

$$f(x) = \sum_{i=0}^{k}{}' \big(a_i^*[J_k] + R_i\big) T_i^*(x) + r_k(x, f) = J_k(x) + \sum_{i=0}^{k}{}' R_i T_i^*(x) + r_k(x, f), \tag{198}$$

где

$$J_k(x) = \sum_{i=0}^{k}{}' a_i^*[J_k] \cdot T_i^*(x), \tag{199}$$

$$R_i = R(f \cdot T_i^*) = \frac{1}{2^{4k}} \frac{(f \cdot T_i^*)^{(2k+1)}(\eta)}{(2k+1)!} = \frac{1}{2^{4k}(2k+1)!} \sum_{l=0}^{i} C_{2k+1}^{l} f^{(2k+1-l)}(\eta) \cdot T_i^{*(l)}(\eta). \tag{200}$$

Отсюда

$$f(x) - J_k(x) = \sum_{i=0}^{k}{}' R_i T_i^*(x) + r_k(x, f). \tag{201}$$

Поскольку многочлен $J_k(x)$, определяемый формулой (128) или, что то же самое, формулами (199) и (152), является одновременно интерполяционным полиномом для функции $f(x)$ с узлами интерполирования (129), (130), совпадающими с корнями многочлена $\dfrac{1}{\alpha_k} x\Pi_k(x)$ (α_k задается формулой (64) при $n = k$), то для оценки разности $f(x) - J_k(x)$ можно воспользоваться хорошо известным выражением остаточного члена интерполяционной формулы Лагранжа (см. гл. 2, § 3, п. 1, формула (1) в [8] или гл. II, § 3, формула (1) в [9]). В нашем случае эта формула примет вид:

$$f(x) - J_k(x) = \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!} \frac{x\Pi_k(x)}{\alpha_k} = \frac{(-1)^k \sqrt{2\pi}}{2^{2k+1}} \frac{f^{(k+1)}(\xi) x\Pi_k(x)}{(k+1)!}, \qquad \xi \in [0, \max\{x, x_1\}]. \tag{202}$$

Обратимся снова, в качестве примера использования соотношений (201) и (202), к задаче Коши (I), (II) на сегменте $[x_0, x_0+h]$. Будем рассматривать правую часть уравнения (I), взятую на решении задачи, как функцию $\Phi(\alpha)$ переменной α. Разложим $\Phi(\alpha)$ в смещенный ряд Чебышёва. Тогда формула (198) для функции $\Phi(\alpha)$ примет вид:

$$\Phi(\alpha) = J_k(\alpha) + \sum_{i=0}^{k}{}' R_i T_i^*(\alpha) + r_k(\alpha, \Phi). \tag{203}$$

Заметим, что, как следует из (200), при $h \to 0$ $R_i = O(h^{2k+1-i})$; в частности, $R_k = O(h^{k+1})$. Поэтому второе слагаемое в (203) имеет порядок $O(h^{k+1})$ при $h \to 0$, т.е.

$$\Big\| \sum_{i=0}^{k}{}' R_i T_i^*(\alpha) \Big\|_\infty = O(h^{k+1}). \tag{204}$$

Из (203) имеем

$$\big\|\Phi(\alpha) - J_k(\alpha)\big\| \leqslant \Big\| \sum_{i=0}^{k}{}' R_i T_i^*(\alpha) \Big\| + \big\|r_k(\alpha, \Phi)\big\|.$$

Отсюда, а также из (197) и (204) следует оценка погрешности аппроксимации функции $\Phi(\alpha)$ (195) частичной суммой смещенного ряда Чебышёва, коэффициенты которого вычислены по квадратурной формуле Маркова, а именно:

$$\big\|\Phi(\alpha) - J_k(\alpha)\big\|_\infty = O(h^{k+1}), \qquad h \to 0. \tag{205}$$

Выражение остаточного члена интерполяционной формулы Лагранжа (202), выписанного для функции $\Phi(\alpha) = F(x_0 + \alpha h)$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, принимает вид

$$\Phi(\alpha) - J_k(\alpha) = \frac{(-1)^k \sqrt{2\pi}}{2^{2k+1}} \frac{h^{k+1} F^{(k+1)}(x_0 + \xi h) \alpha \Pi_k(\alpha)}{(k+1)!}. \tag{206}$$

Видно, что правые части в (205) и (206) имеют один и тот же порядок относительно длины h частичного сегмента $[\,x_0,\, x_0+h\,]$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Пашковский С.* Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышёва. М.: Наука, 1983.
2. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том III. М.: Наука, 1970.
3. *Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х.* Математический анализ. Начальный курс. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1985.
4. *Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х.* Математический анализ. Продолжение курса. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1987.
5. *Крылов В.И.* Приближенное вычисление интегралов. М.: Наука, 1967.
6. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и таблицами / Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. М.: Наука, 1979.
7. *Суетин П.К.* Классические ортогональные многочлены. М.: Наука, 1979.
8. *Березин И.С., Жидков Н.П.* Методы вычислений. Т. 1. М.: Физматгиз, 1962.
9. *Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.* Численные методы. М.: Наука, 1987.

Поступила в редакцию
27.06.2001