

УДК 519.632.4

## УНИВЕРСАЛЬНАЯ МНОГОСЕТОЧНАЯ ТЕХНОЛОГИЯ ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

С. И. Мартыненко<sup>1</sup>

В статье рассматривается применение обобщенной универсальной многосеточной технологии к численному решению систем дифференциальных уравнений. Данная технология объединяет процессы адаптации уравнений к численным методам, их дискретизации методом контрольного объема и последующего применения многосеточных итераций. Технология эффективна для решения линейных и нелинейных систем на неразнесенных и разнесенных сетках. Показано, что многосеточный сегрегированный алгоритм является конкурентоспособным с совместным алгоритмом. Представлены новые способы адаптации решаемых задач к многосеточной технологии.

**1. Введение.** В [1] предложена универсальная многосеточная технология (УМТ), основанная на объединении адаптации задач к численным методам, дискретизации методом контрольного объема и многосеточных итераций. Целью данной статьи является исследование применения УМТ к численному решению систем дифференциальных уравнений в частных производных. Сначала будет изучено четыре многосеточных алгоритма для выявления наиболее подходящего из них. Далее полученный алгоритм будет апробирован на модельной задаче, которая отражает отдельные особенности уравнений Навье–Стокса.

Данная статья предполагает знание основных компонент УМТ (многосеточная структура, оригинальное построение грубых сеток, отображение индексов {}, проблемно-независимые операторы переходов, пилообразный цикл, эквивалентное число итераций  $\hat{\nu}$ ,  $\Sigma$ -модификация, раздельная дискретизация и т.д.) [1].

**2. Многосеточные алгоритмы для систем.** Рассмотрим применение УМТ к решению модельной системы линейных эллиптических уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \gamma V(x, y) + \gamma Z(x, y) = F(x, y), \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \gamma U(x, y) + \gamma Z(x, y) = F(x, y), \\ \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} + \gamma U(x, y) + \gamma V(x, y) = F(x, y), \end{cases} \quad (1)$$

$$U|_{\Omega} = 0, \quad V|_{\Omega} = 0, \quad Z|_{\Omega} = 0$$

в  $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ . Данная система рассмотрена исключительно для упрощения последующего теоретического анализа.  $\Sigma$ -модификация решения

$$\begin{aligned} U(x, y) &= C_u(x, y) + \hat{U}(x, y), \\ V(x, y) &= C_v(x, y) + \hat{V}(x, y), \\ Z(x, y) &= C_z(x, y) + \hat{Z}(x, y) \end{aligned}$$

<sup>1</sup> Центральный Институт Авиационного Моторостроения им. П.И. Баранова, ул. Авиамоторная, 2, 111250, Москва; e-mail: martyn\_s@mail.ru

позволяет переписать модельную систему в  $\Sigma$ -модифицированной форме

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 C_u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C_u}{\partial y^2} + \gamma C_v(x, y) + \gamma C_z(x, y) = r_u(x, y), \\ \frac{\partial^2 C_v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C_v}{\partial y^2} + \gamma C_u(x, y) + \gamma C_z(x, y) = r_v(x, y), \\ \frac{\partial^2 C_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C_z}{\partial y^2} + \gamma C_u(x, y) + \gamma C_v(x, y) = r_z(x, y), \end{cases}$$

$$C_u|_{\Omega} = -\hat{U}|_{\Omega}, \quad C_v|_{\Omega} = -\hat{V}|_{\Omega}, \quad C_z|_{\Omega} = -\hat{Z}|_{\Omega},$$

где

$$\begin{aligned} r_u(x, y) &= F(x, y) - \frac{\partial^2 \hat{U}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \hat{U}}{\partial y^2} - \gamma \hat{V}(x, y) - \gamma \hat{Z}(x, y), \\ r_v(x, y) &= F(x, y) - \frac{\partial^2 \hat{V}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \hat{V}}{\partial y^2} - \gamma \hat{U}(x, y) - \gamma \hat{Z}(x, y), \\ r_z(x, y) &= F(x, y) - \frac{\partial^2 \hat{Z}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \hat{Z}}{\partial y^2} - \gamma \hat{U}(x, y) - \gamma \hat{V}(x, y). \end{aligned}$$

Функции  $\hat{U}$ ,  $\hat{V}$ ,  $\hat{Z}$  будут приближениями к решению  $U$ ,  $V$ ,  $Z$ , а функции  $C_u$ ,  $C_v$ ,  $C_z$  будут поправками в последующих многосеточных итерациях.

Вторым этапом УМТ является построение многосеточной структуры [1]. Самая мелкая вычислительная сетка для дискретизации методом контрольного объема состоит из двух систем сеточных точек  $G^v = G_x^v \cup G_y^v$  и  $G^f = G_x^f \cup G_y^f$ , где

$$\begin{aligned} G_x^v &= \{x_i^v : x_i^v = \Delta(i-1), \quad i = 1, \dots, N_0 + 1, \quad \Delta = H_0^{-1}\}, \\ G_x^f &= \{x_i^f : x_i^f = 0.5(x_i^v + x_{i+1}^v), \quad i = 1, \dots, N_0\}, \\ G_y^v &= \{y_j^v : y_j^v = \Delta(j-1), \quad j = 1, \dots, N_0 + 1, \quad \Delta = H_0^{-1}\}, \\ G_y^f &= \{y_j^f : y_j^f = 0.5(y_j^v + y_{j+1}^v), \quad j = 1, \dots, N_0\}. \end{aligned}$$

Предположим, что функции  $U$ ,  $V$  и  $Z$  заданы в сеточных точках  $(x^v, y^v)$ . Интегрирование  $\Sigma$ -модифицированной системы по контрольному объему  $\Omega_{\{ij\}}$

$$\Omega_{\{ij\}} = \left\{ (x, y) \mid x_{\{i-1\}}^f \leq x \leq x_{\{i\}}^f; \quad y_{\{j-1\}}^f \leq y \leq y_{\{j\}}^f \right\}$$

позволяет получить следующую конечно-разностную схему:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\{ij\}}(C_u) + \gamma C_v\{ij\} + \gamma C_z\{ij\} &= J_u\{ij\}, \\ \mathcal{L}_{\{ij\}}(C_v) + \gamma C_u\{ij\} + \gamma C_z\{ij\} &= J_v\{ij\}, \\ \mathcal{L}_{\{ij\}}(C_z) + \gamma C_u\{ij\} + \gamma C_v\{ij\} &= J_z\{ij\}, \end{aligned}$$

где  $\mathcal{L}_{\{ij\}}$  есть стандартное пятиточечное представление Лапласиана

$$\mathcal{L}_{\{ij\}}(\phi) = \frac{\phi_{\{i-1j\}} - 2\phi_{\{ij\}} + \phi_{\{i+1j\}}}{\Delta^2 3^{2L}} + \frac{\phi_{\{ij-1\}} - 2\phi_{\{ij\}} + \phi_{\{ij+1\}}}{\Delta^2 3^{2L}}$$

и интегралы  $J_u$ ,  $J_v$ ,  $J_z$  определяются как

$$J_\epsilon\{ij\} = \frac{1}{\Delta^2 3^{2L}} \int_{x_{\{i-1\}}^f}^{x_{\{i\}}^f} \int_{y_{\{j-1\}}^f}^{y_{\{j\}}^f} r_\epsilon(x, y) dy dx, \quad \epsilon = \begin{pmatrix} u \\ v \\ z \end{pmatrix}.$$

Интегралы  $J_\epsilon$  могут быть вычислены на самой мелкой сетке ( $L = 0$ ) следующим образом:

$$\begin{aligned} (R_u^*)_{mk} &= F_{mk} - \mathcal{L}_{mk}(\hat{U}) - \gamma \hat{V}_{mk} - \gamma \hat{Z}_{mk} + o(\Delta^2), \\ (R_v^*)_{mk} &= F_{mk} - \mathcal{L}_{mk}(\hat{V}) - \gamma \hat{U}_{mk} - \gamma \hat{Z}_{mk} + o(\Delta^2), \\ (R_z^*)_{mk} &= F_{mk} - \mathcal{L}_{mk}(\hat{Z}) - \gamma \hat{U}_{mk} - \gamma \hat{V}_{mk} + o(\Delta^2). \end{aligned}$$

Дискретизированная модельная система может быть переписана в виде

$$\begin{cases} \mathbf{A} C_u + \gamma C_v + \gamma C_z = J_u, \\ \mathbf{A} C_v + \gamma C_u + \gamma C_z = J_v, \\ \mathbf{A} C_z + \gamma C_u + \gamma C_v = J_z, \end{cases} \quad (2)$$

где матрица  $\mathbf{A}$  соответствует пятиточечному представлению Лапласиана ( $\mathcal{L}_{\{ij\}}$ ). Рассмотрим следующие алгоритмы для решения дискретизированной модельной системы.

**Тест 1.** (*Классический Совместный Алгоритм*) Первый шаг в совместном алгоритме состоит в объединении всех разностных уравнений (2) в единую систему

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \gamma \mathbf{E} & \gamma \mathbf{E} \\ \gamma \mathbf{E} & \mathbf{A} & \gamma \mathbf{E} \\ \gamma \mathbf{E} & \gamma \mathbf{E} & \mathbf{A} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_u \\ C_v \\ C_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_u \\ J_v \\ J_z \end{pmatrix},$$

где  $\mathbf{E}$  есть единичная матрица. Матрица коэффициентов может быть представлена следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \gamma \mathbf{E} & \gamma \mathbf{E} \\ \gamma \mathbf{E} & \mathbf{A} & \gamma \mathbf{E} \\ \gamma \mathbf{E} & \gamma \mathbf{E} & \mathbf{A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_L + \mathbf{A}_D & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \gamma \mathbf{E} & \mathbf{A}_L + \mathbf{A}_D & \mathbf{0} \\ \gamma \mathbf{E} & \gamma \mathbf{E} & \mathbf{A}_L + \mathbf{A}_D \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{A}_U & \gamma \mathbf{E} & \gamma \mathbf{E} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_U & \gamma \mathbf{E} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_U \end{pmatrix},$$

где  $\mathbf{A}_D$ ,  $\mathbf{A}_L$  и  $\mathbf{A}_U$  есть диагональная, ниже- и верхнетреугольная части матрицы  $\mathbf{A}$  соответственно. Итерации Зейделя в совместном алгоритме определяются следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_L + \mathbf{A}_D & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \gamma \mathbf{E} & \mathbf{A}_L + \mathbf{A}_D & \mathbf{0} \\ \gamma \mathbf{E} & \gamma \mathbf{E} & \mathbf{A}_L + \mathbf{A}_D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_u \\ C_v \\ C_z \end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix} J_u \\ J_v \\ J_z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{A}_U & \gamma \mathbf{E} & \gamma \mathbf{E} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_U & \gamma \mathbf{E} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_U \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_u \\ C_v \\ C_z \end{pmatrix}^n.$$

В сегрегированных алгоритмах каждое неизвестное отыскивается из соответствующего уравнения при фиксированных значениях остальных неизвестных. В данной работе исследованы три сегрегированных алгоритма.

**Тест 2.** (*Классический Сегрегированный Алгоритм*) Следующая программа выполняет сегрегированные итерации и осуществляет проверку сходимости:

```

С
С      Классический Сегрегированный Алгоритм
С
      k = 0
      Начальное приближение:  $C_u^{(0)}$ ,  $C_v^{(0)}$  и  $C_z^{(0)}$ 
1    k = k + 1
       $\mathbf{A} C_u^{(k)} = J_u^{(k)} - \gamma C_v^{(k-1)} - \gamma C_z^{(k-1)} \rightarrow C_u^{(k)}$ 
       $\mathbf{A} C_v^{(k)} = J_v^{(k)} - \gamma C_u^{(k)} - \gamma C_z^{(k-1)} \rightarrow C_v^{(k)}$ 
       $\mathbf{A} C_z^{(k)} = J_z^{(k)} - \gamma C_u^{(k)} - \gamma C_v^{(k)} \rightarrow C_z^{(k)}$ 
С
С      Проверка сходимости; продолжение (Go To 1), если необходимо
      End

```

Каждое уравнение системы решается при помощи УМТ до тех пор пока не будет выполнено условие

$$\frac{\|R_\epsilon^*\|}{\|F\|} < 10^{-7}, \quad \epsilon = \begin{pmatrix} u \\ v \\ z \end{pmatrix},$$

где  $\|\cdot\|$  есть  $l_2$ -норма,  $R_u^*$ ,  $R_v^*$ ,  $R_z^*$  есть невязки, вычисленные на самой мелкой сетке, первого, второго и третьего уравнений соответственно;  $\|F\|$  есть  $l_2$ -норма правой части.

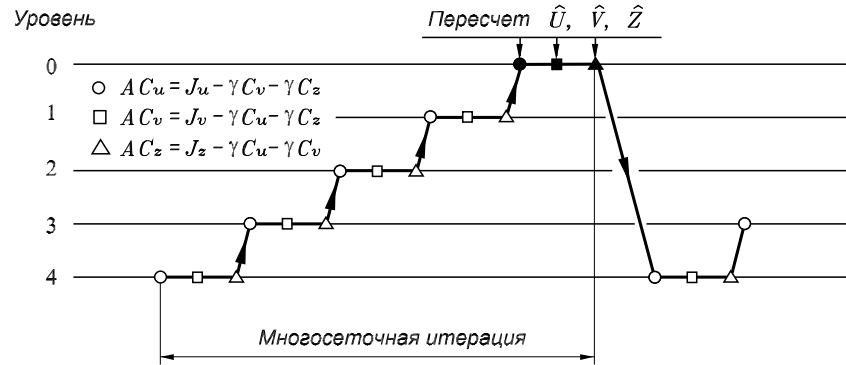


Рис. 1. Упрощенный Многосеточный Сегрегированный Алгоритм

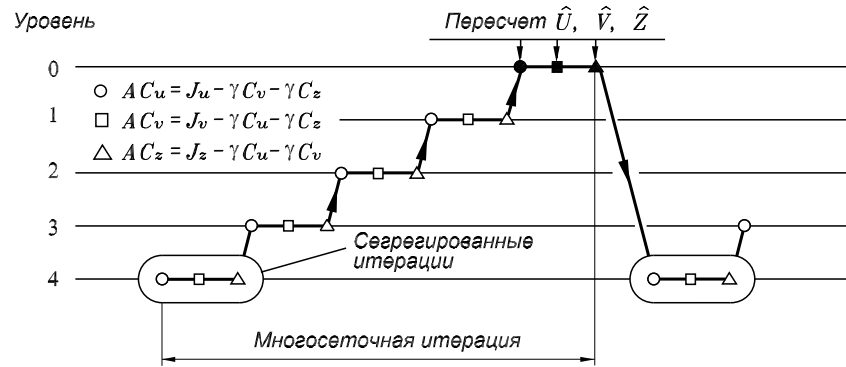


Рис. 2. Полный Многосеточный Сегрегированный Алгоритм

**Тест 3.** (Упрощенный Многосеточный Сегрегированный Алгоритм) Данный алгоритм выполняет сглаживающие итерации на многосеточной структуре, как показано на рис. 1.

**Тест 4.** (Полный Многосеточный Сегрегированный Алгоритм) Данный алгоритм выполняет сегрегированные итерации на уровне с самыми грубыми сетками ( $L^+$ ) и сглаживающие итерации на уровнях с более мелкими сетками, как показано на рис. 2.

Для вычислительного эксперимента принимались следующие соглашения.

1. Функция  $F$  выбрана таким образом, что точное решение модельной системы есть  $U_e(x, y) = V_e(x, y) = Z_e(x, y) = f(x)f(y)$ , где

$$f(\varrho) = 10(e^\varrho + (1 - e)\varrho - 1).$$

2. Начальное приближение равно нулю:  $U^{(0)} = V^{(0)} = Z^{(0)} = 0$ .

3. Самая мелкая равномерная сетка  $401 \times 401$ , соответствующая многосеточная структура имеет пять уровней.

4. Погрешность численного решения ( $E$ ) определялась в виде

$$E = \max(E_U; E_V; E_Z), \quad \text{где} \quad \begin{aligned} E_U &= \max_{ij} |U_e(x_i^y, y_j^y) - U_{ij}|, \\ E_V &= \max_{ij} |V_e(x_i^y, y_j^y) - V_{ij}|, \\ E_Z &= \max_{ij} |Z_e(x_i^y, y_j^y) - Z_{ij}|. \end{aligned}$$

5. Три сглаживающие итерации Alternating Line Gauss-Seidel выполнялись на уровнях с мелкими сетками.

6. Глобальный критерий останова задавался в виде

$$\frac{\max(\|R_u^*\|; \|R_v^*\|; \|R_z^*\|)}{\|F\|} < 10^{-7}.$$

Для сравнения скорости сходимости четырех рассмотренных выше алгоритмов определим эффек-

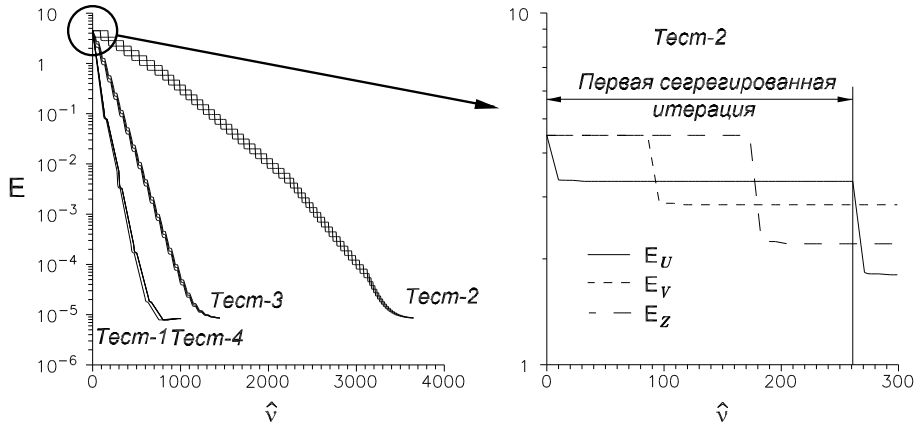


Рис. 3. Изменение погрешности численного решения в четырех тестах

Таблица 1

Сравнение эффективности четырех алгоритмов на примере первой модельной системы (Тесты 1, 2, 3, 4)

	$\gamma$	0	0,5	1	3	5	7
Тест 1	$\hat{\nu}_\Sigma$	272	280	288	406	516	949
	$\Xi$	1	0,971	0,944	0,670	0,558	0,287
Тест 2	$\hat{\nu}_\Sigma$	272	660	770	1254	1958	3649
	$\Xi$	1	0,412	0,353	0,217	0,139	0,075
Тест 3	$\hat{\nu}_\Sigma$	272	340	343	482	827	1448
	$\Xi$	1	0,800	0,793	0,564	0,329	0,188
Тест 4	$\hat{\nu}_\Sigma$	272	284	293	417	539	1006
	$\Xi$	1	0,958	0,928	0,652	0,505	0,270

тивность алгоритма ( $\Xi$ ) как

$$\Xi = \frac{\hat{\nu}_\Sigma(0)}{\hat{\nu}_\Sigma(\gamma)},$$

где  $\hat{\nu}_\Sigma$  есть число эквивалентных сглаживающих итераций. Если модельная система (1) решена при помощи некоторого алгоритма так же быстро, как три независимых алгоритма ( $\gamma = 0$ ), то эффективность данного алгоритма стремится к единице:  $\Xi \rightarrow 1$  при  $\hat{\nu}_\Sigma(\gamma) \rightarrow \hat{\nu}_\Sigma(0)$ . Однако медленная сходимость алгоритма соответствует эффективности близкой к нулю:  $\Xi \rightarrow 0$  при  $\hat{\nu}_\Sigma(\gamma) \gg \hat{\nu}_\Sigma(0)$ . Скорость сходимости в проведенном вычислительном эксперименте показана на рис. 3 и приведена в табл. 1.

Оценим скорость сходимости сегрегированного алгоритма. Вектор  $U^{(1)}$ , полученный после первой итерации, удовлетворяет следующему уравнению:

$$\mathbf{A}U^{(1)} = F - \gamma V^{(0)} - \gamma Z^{(0)}. \tag{3}$$

Текущие погрешности численного решения определим в виде

$$\delta_U^{(k)} = U - U^{(k)}, \quad \delta_V^{(k)} = V - V^{(k)}, \quad \delta_Z^{(k)} = Z - Z^{(k)}.$$

Тогда уравнение (3) может быть переписано в виде

$$\mathbf{A}\delta_U^{(1)} = -\gamma\delta_V^{(0)} - \gamma\delta_Z^{(0)}.$$

Погрешность  $\delta_U^{(1)}$  оценивается следующим образом:

$$\delta_U^{(1)} = -\gamma\mathbf{A}^{-1}(\delta_V^{(0)} + \delta_Z^{(0)}) \Rightarrow \|\delta_U^{(1)}\| \leq \gamma\|\mathbf{A}^{-1}\|\|\delta_V^{(0)} + \delta_Z^{(0)}\|. \tag{4}$$

Аналогичная оценка для решения  $U$  имеет вид

$$\|\mathbf{A}\| \|U\| \geq \|F - \gamma V - \gamma Z\|. \quad (5)$$

Соотношения (4)–(5) приводят к следующей оценке:

$$\frac{\|\delta_U^{(1)}\|}{\|U\|} \leq \gamma \|\mathbf{A}^{-1}\| \|\mathbf{A}\| \frac{\|\delta_V^{(0)} + \delta_Z^{(0)}\|}{\|F - \gamma V - \gamma Z\|}. \quad (6)$$

Произведение  $\|\mathbf{A}^{-1}\| \|\mathbf{A}\|$  имеет следующее асимптотическое поведение [2]:

$$\|\mathbf{A}^{-1}\| \|\mathbf{A}\| \rightarrow \left(\frac{2}{\pi\Delta}\right)^2 \quad \text{при} \quad \Delta \rightarrow 0.$$

Одним из критериев выбора модельной системы дифференциальных уравнений является возможность аналитического вычисления произведения данных норм. Теперь оценка (6) может быть записана в виде

$$\frac{\|U - U^{(1)}\|}{\|U\|} \leq \left(\frac{2}{\pi\Delta}\right)^2 \frac{\|\delta_V^{(0)} + \delta_Z^{(0)}\|}{\|F - \gamma V - \gamma Z\|} \gamma.$$

С учетом очевидных соотношений

$$\|\delta_V^{(0)} + \delta_Z^{(0)}\| \leq \|\delta_V^{(0)}\| + \|\delta_Z^{(0)}\| \leq (K-1)\delta_{\max}, \quad \delta_{\max} = \max(\|\delta_V^{(0)}\|; \|\delta_Z^{(0)}\|),$$

где  $K$  есть число уравнений системы, оценка (6) принимает окончательный вид

$$\frac{\|U - U^{(1)}\|}{\|U\|} \leq \left(\frac{2}{\pi\Delta}\right)^2 \frac{(K-1)\gamma\delta_{\max}}{\|F - \gamma V - \gamma Z\|}. \quad (7)$$

Число сегрегированных итераций зависит сильно от начального приближения ( $\delta_{\max}$ ), числа дифференциальных уравнений в системе ( $K$ ), шага сетки ( $\Delta$ ) и параметра  $\gamma$ . Сильная взаимосвязь уравнений в системе приводит к замедлению сходимости.

Рис. 3 и табл. 1 показывают медленную сходимость классического сегрегированного алгоритма (Тест 2). Первая сегрегированная итерация уменьшает погрешность решения  $U$  в  $\alpha^q$  раз

$$\|\delta_U^{(q)}\| \leq \alpha^q \|\delta_U^{(0)}\|, \quad \alpha \in (0, 1) \Rightarrow q \leq \frac{1}{\ln \alpha^{-1}} \ln \frac{\|\delta_U^{(0)}\|}{\gamma \|\mathbf{A}^{-1}(\delta_V^{(0)} + \delta_Z^{(0)})\|},$$

где  $q$  есть число многосеточных итераций. Введем обозначение

$$q^* = \left\lceil \frac{1}{\ln \alpha^{-1}} \ln \frac{\|\delta_U^{(0)}\|}{\gamma \|\mathbf{A}^{-1}(\delta_V^{(0)} + \delta_Z^{(0)})\|} \right\rceil + 1,$$

где квадратные скобки обозначают целую часть числа. Когда  $q \leq q^*$  многосеточные итерации в классическом сегрегированном алгоритме приводят к уменьшению погрешности численного решения. Однако когда  $q > q^*$  многосеточные итерации приводят только к уменьшению невязки сеточных уравнений без уменьшения погрешности (рис. 3). Поэтому критерий останова для классического сегрегированного алгоритма должен зависеть от погрешности правой части (т.е.  $\delta_{\max}$ ).

Близость численных решений, которые получены на соседних сеточных уровнях, приводит к ускорению сегрегированного алгоритма:  $\delta_{\max} \downarrow \Rightarrow \Xi \uparrow$  (оценка (7) и Тест 3).

Дальнейшее развитие сегрегированных алгоритмов связано с дальнейшей минимизацией  $\delta_{\max}$ , что неизбежно приведет к ускорению сходимости итераций к решению (Тест 4). Рассмотрим структуру, которая состоит из двух уровней, и предположим, что решение на уровне с самыми грубыми сетками было получено. Точность решения может быть оценена как

$$\begin{aligned} M_e(x_i^y, y_j^y) - M_{ij}^{L=0} &= \Delta^2 S_{ij}^M + o(\Delta^4), \\ M_e(x_i^y, y_j^y) - M_{ij}^{L=1} &= 9\Delta^2 S_{ij}^M + o(\Delta^4), \end{aligned} \quad M = \begin{pmatrix} U \\ V \\ Z \end{pmatrix},$$

следовательно,

$$M_{ij}^{L=0} - M_{ij}^{L=1} = \delta_M^{(0)} = 8\Delta^2 S_{ij}^M + o(\Delta^4) \Rightarrow \|\delta_M^{(0)}\| \leq 8\Delta^2 S_{\max}^M,$$

где  $S^M$  есть некоторая ограниченная функция:  $\max_{ij} |S_{ij}^M| \leq S_{\max}$ . Норма погрешности правой части может быть оценена следующим образом:

$$\|\delta_V^{(0)} + \delta_Z^{(0)}\| \leq \|\delta_V^{(0)}\| + \|\delta_Z^{(0)}\| \leq 8\Delta^2(K-1)S_{\max},$$

и оценка (7) принимает вид

$$\frac{\|U - U^{(1)}\|}{\|U\|} \leq \frac{32}{\pi^2} \frac{(K-1)\gamma S_{\max}}{\|F - \gamma V - \gamma Z\|}.$$

Очевидно, что скорость сходимости алгоритма не зависит от величины шага сетки  $\Delta$ . Таким образом, установлено, что именно близость решений полученных на соседних сеточных уровнях приводит к существенному ускорению сходимости многосеточного сегрегированного алгоритма (Тест 4). Этот факт наиболее заметен при сравнении результатов первого и четвертого тестов. Следует особо подчеркнуть, что ускорение сходимости возникает благодаря многосеточной структуре и не зависит от выбора итерационного метода.

Также заметим, что матрица коэффициентов в проведенных тестах не имела диагонального преобладания, поэтому скорость сходимости рассмотренных алгоритмов сильно уменьшалась при возрастании параметра  $\gamma$  (табл. 1). Поэтому для демонстрации ускорения сходимости сегрегированного алгоритма рассмотрена вторая модельная система

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - 2\gamma U(x, y) + \gamma V(x, y) + \gamma Z(x, y) = F(x, y), \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - 2\gamma V(x, y) + \gamma U(x, y) + \gamma Z(x, y) = F(x, y), \\ \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} - 2\gamma Z(x, y) + \gamma U(x, y) + \gamma V(x, y) = F(x, y), \end{cases} \quad (8)$$

которая имеет то же точное решение, что и первая. Полученная в результате дискретизации второй модельной системы матрица коэффициентов имеет диагональное преобладание вне зависимости от параметра  $\gamma$ . Для решения второй модельной системы были применены те же алгоритмы, которые были рассмотрены ранее. Вычислительные процедуры в Тестах 1\*, 2\*, 3\*, 4\* для второй модельной системы являются точно такими же, как и приведенные ранее Тесты 1, 2, 3, 4. Результаты данного вычислительного эксперимента приведены в табл. 2.

Результаты вычислительных экспериментов и теоретического анализа показывают, что Полный Многосеточный Сегрегированный Алгоритм (Тесты 4, 4\*) практически не уступает по эффективности Классическому Совместному Алгоритму (Тесты 1, 1\*). Однако сегрегированный алгоритм не требует глобальной линеаризации нелинейных сеточных уравнений и проще для программирования. В дальнейшем этот алгоритм, рассмотренный в Тестах 4, 4\*, будет называться *Многосеточным Сегрегированным Алгоритмом* или, кратко, MDA (Multigrid Decoupled Algorithm).

**3. Модельные системы нелинейных уравнений.** Течение жидкости и конвективный теплообмен описываются системами дифференциальных уравнений, которые выражают перенос массы, импульса, тепла и других скалярных величин. Рассмотрим модельную систему в области  $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$

$$\begin{cases} \frac{\partial(u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(vu)}{\partial y} = \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + F_u(x, y), \\ \frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{\partial(v^2)}{\partial y} = \varepsilon \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \varepsilon \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + F_v(x, y), \end{cases} \quad u|_{\Omega} = 0, \quad v|_{\Omega} = 0. \quad (9)$$

Данная система может быть переписана в  $\Sigma$ -модифицированной форме

$$\begin{cases} -\frac{\partial(c_u^2 + 2\hat{u}c_u)}{\partial x} - \frac{\partial((c_v + \hat{v})c_u)}{\partial y} + \varepsilon \frac{\partial^2 c_u}{\partial x^2} + \varepsilon \frac{\partial^2 c_u}{\partial y^2} = r_u(x, y), \\ -\frac{\partial((c_u + \hat{u})c_v)}{\partial x} - \frac{\partial(c_v^2 + 2\hat{v}c_v)}{\partial y} + \varepsilon \frac{\partial^2 c_v}{\partial x^2} + \varepsilon \frac{\partial^2 c_v}{\partial y^2} = r_v(x, y), \end{cases}$$

Таблица 2

Сравнение эффективности четырех алгоритмов на примере второй модельной системы (Тесты 1\*, 2\*, 3\*, 4\*)

	$\gamma$	0	0,5	1	3	5	7	10
Тест 1*	$\hat{\nu}_\Sigma$	272	276	276	288	295	300	312
	$\Xi$	1	0,986	0,986	0,944	0,922	0,907	0,872
Тест 2*	$\hat{\nu}_\Sigma$	272	638	770	1029	1260	1413	1674
	$\Xi$	1	0,426	0,353	0,264	0,216	0,192	0,162
Тест 3*	$\hat{\nu}_\Sigma$	272	335	332	378	480	522	560
	$\Xi$	1	0,806	0,819	0,720	0,567	0,521	0,486
Тест 4*	$\hat{\nu}_\Sigma$	272	276	283	295	308	322	340
	$\Xi$	1	0,986	0,961	0,922	0,883	0,845	0,800

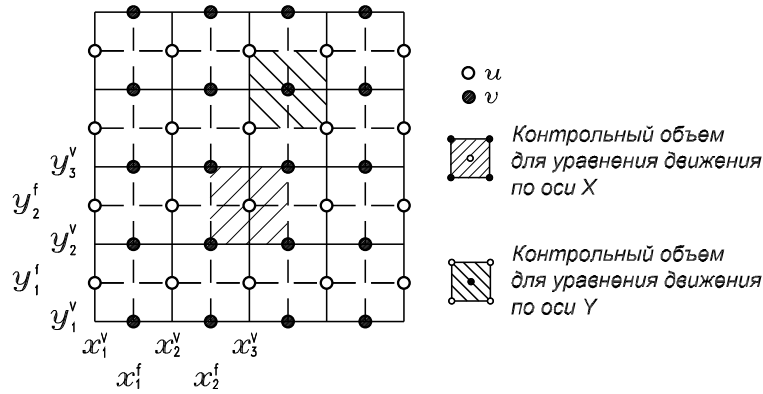


Рис. 4. Разнесенная сетка и расположение контрольных объемов

где

$$r_u(x, y) = \frac{\partial(\hat{u})^2}{\partial x} + \frac{\partial(v\hat{u})}{\partial y} - \varepsilon \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2} - \varepsilon \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial y^2} - F_u(x, y),$$

$$r_v(x, y) = \frac{\partial(u\hat{v})}{\partial x} + \frac{\partial(\hat{v})^2}{\partial y} - \varepsilon \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial x^2} - \varepsilon \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial y^2} - F_v(x, y).$$

Разнесенные сетки, предложенные Харлоу и Велчем, часто применяются в вычислительной гидродинамике. Самый очевидный способ построения контрольных объемов состоит в размещении их граней посередине между соседними узлами [3]. В случае использования разнесенных сеток, функции  $u$  и  $v$  задаются в точках  $(x_i^v, y_j^v)$  и  $(x_i^f, y_j^f)$ , как показано на рис. 4 (т.е.  $u_{ij} \in G_x^v \cup G_y^f$  и  $v_{ij} \in G_x^f \cup G_y^v$ ).

Рассмотрим дискретизацию методом контрольного объема первого уравнения модельной системы. Поскольку дискретизированная система будет решаться при помощи MDA, сеточные уравнения могут быть получены посредством интегрирования по контрольному объему, показанному на рис. 4,

$$-\frac{1}{\Delta 3L} \left( (c_u)_{\{j\}}^2 + \frac{2}{\Delta 3L} \int_{y_{\{j\}}^v}^{y_{\{j+1\}}^v} \hat{u} dy \cdot (c_u)_{\{j\}} \right) \Bigg|_{x_{\{i-1\}}^f}^{x_{\{i\}}^f} -$$

$$-\frac{1}{\Delta 3L} \left( \frac{1}{\Delta 3L} \int_{x_{\{i-1\}}^f}^{x_{\{i\}}^f} (c_v + \hat{v}) dx \cdot (c_u)_{\{i\}} \right) \Bigg|_{y_{\{j\}}^v}^{y_{\{j+1\}}^v} + \varepsilon \mathcal{L}_{\{ij\}}(c_u) = (J_u)_{\{ij\}}.$$



Заметим, что неизвестное  $c_u$  рассматривается при фиксированных значениях  $c_v, \hat{v}, \hat{u}$ , т.е. взятых с предыдущей итерации. Следующие интегралы

$$\frac{2}{\Delta 3^L} \int_{y_{\{j\}}^{\check{y}_{\{j+1\}}}}^{y_{\{j+1\}}^{\check{y}_{\{j+1\}}}} \hat{u} dy, \quad \frac{1}{\Delta 3^L} \int_{x_{\{i-1\}}^f}{x_{\{i\}}^f} (c_v + \hat{v}) dx, \quad (J_u)_{\{ij\}} = \frac{1}{\Delta^2 3^{2L}} \int_{x_{\{i-1\}}^f}{x_{\{i\}}^f} \int_{y_{\{j\}}^{\check{y}_{\{j+1\}}}}^{y_{\{j+1\}}^{\check{y}_{\{j+1\}}}} r_u(x, y) dx dy$$

должны быть вычислены на самой мелкой сетке для получения точной формулировки дискретных задач на грубых сетках. Ложная диффузия может быть уничтожена при помощи отдельной дискретизации оператора в левой части уравнения (10) и интеграла  $J_u$  в правой части. Конвективные члены в уравнении (10) должны аппроксимироваться при помощи разностей против потока для придания конечно-разностной схеме свойства монотонности. Однако интегралы  $J_u$  в правой части должны быть вычислены на самой мелкой сетке следующим образом:

$$(R_u^*)_{mk} = \frac{(\hat{u})_e^2 - (\hat{u})_w^2}{\Delta} + \frac{v_n \hat{u}_n - v_s \hat{u}_s}{\Delta} - \varepsilon \mathcal{L}_{mk}(\hat{u}) - (F_u)_{mk} + o(\Delta^2),$$

где

$$\begin{aligned} \hat{u}_e &= 0,5(\hat{u}_{mk} + \hat{u}_{m+1k}) + o(\Delta^2), & \hat{u}_w &= 0,5(\hat{u}_{mk} + \hat{u}_{m-1k}) + o(\Delta^2), \\ \hat{u}_n &= 0,5(\hat{u}_{mk} + \hat{u}_{m, k+1}) + o(\Delta^2), & \hat{u}_s &= 0,5(\hat{u}_{mk} + \hat{u}_{m, k-1}) + o(\Delta^2), \\ v_n &= 0,5(v_{m-1, k+1} + v_{m, k+1}) + o(\Delta^2), & v_s &= 0,5(v_{m-1, k} + v_{m, k}) + o(\Delta^2). \end{aligned}$$

К сожалению, существуют примеры, для которых метод Ньютона, применяемый для решения нелинейных сеточных уравнений, расходится и сходимость может иметь место только при надлежащем выборе начального приближения. Для иллюстрации рассмотрим простейший пример:

$$\frac{du^2}{dx} = \varepsilon \frac{d^2u}{dx^2} + 2\pi \sin(4\pi x) + 4\pi^2 \varepsilon \sin(2\pi x), \quad u(0) = u(1) = 0.$$

Точное решение данного уравнения есть  $u_\varepsilon(x) = \sin(2\pi x)$ . Стартуя с нулевого начального приближения  $u^{(0)} = 0$ , первое приближение к решению  $u^{(1)}$ , полученное методом Ньютона, принимает вид

$$u^{(1)} = \frac{1}{8\pi\varepsilon} \sin(4\pi x) + \sin(2\pi x).$$

Очевидно, что итерации метода Ньютона будут расходиться при  $\varepsilon \rightarrow 0$ :

$$\max_{[0,1]} |u_\varepsilon(x) - u^{(0)}| = \max_{[0,1]} |\sin(2\pi x)| = 1 \ll \max_{[0,1]} |u_\varepsilon(x) - u^{(1)}| = \frac{1}{8\pi\varepsilon} \max_{[0,1]} |\sin(4\pi x)| = \frac{1}{8\pi\varepsilon}.$$

Как следует из анализа первого приближения, сходимость метода Ньютона критически зависит от величины параметра  $\varepsilon$ : если  $\varepsilon \rightarrow +\infty$  (преобладание диффузии), то сходимость итераций Ньютона не зависит от выбора начального приближения; если  $\varepsilon \rightarrow 0$  (преобладание конвекции), то сходимость сильно зависит от выбора начального приближения.

С точки зрения УМТ, глобальная сходимость метода Ньютона может быть достигнута посредством решения серии однотипных задач с переменным малым параметром  $\varepsilon$ . Данная вычислительная процедура начинается при достаточно больших значениях  $\varepsilon$  для того, чтобы обеспечить сходимость итераций Ньютона с произвольно выбранного начального приближения. Далее величина параметра  $\varepsilon$  постепенно уменьшается до заданного значения. Решение, полученное при большем значении  $\varepsilon$ , рассматривается как начальное приближение для решения, полученного при меньшем значении  $\varepsilon$ .

**Тест 5.** Самая мелкая сетка  $411 \times 411$  ( $L^+ = 4$ ). Функции  $F_u$  и  $F_v$  выбраны таким образом, что точное решение модельной задачи принимает вид  $u_\varepsilon(x, y) = v_\varepsilon(x, y) = 2\varepsilon \sin(2\pi x) \sin(2\pi y)$ , где  $\varepsilon = 2^{-10}$ . Вычислительный алгоритм в данном тесте может быть представлен в виде следующей программы:

```

С
С      Глобально сходящаяся модификация метода Ньютона
С
      DO k = 0,10
      εk = 2-k
      IF(k.Eq.0) Начальное приближение: uij(0)(εk) = vij(0)(εk) = 0
  
```

Таблица 3

Сходимость многосеточной технологии в пятом тесте

$k$	$\varepsilon_k$	$q$	$\Xi$	$E_u$	$\rho_q^u$	$E_v$	$\rho_q^v$
0	$2^{+0}$	1	0,67	$1,999 \cdot 10^{+0}$	0,008	$1,998 \cdot 10^{+0}$	0,008
1	$2^{-1}$	1	0,65	$1,026 \cdot 10^{+0}$	0,244	$1,024 \cdot 10^{+0}$	0,245
2	$2^{-2}$	1	0,65	$5,013 \cdot 10^{-1}$	0,256	$4,994 \cdot 10^{-1}$	0,258
3	$2^{-3}$	1	0,66	$2,494 \cdot 10^{-1}$	0,245	$2,484 \cdot 10^{-1}$	0,247
4	$2^{-4}$	1	0,66	$1,240 \cdot 10^{-1}$	0,246	$1,236 \cdot 10^{-1}$	0,248
5	$2^{-5}$	1	0,66	$6,108 \cdot 10^{-2}$	0,248	$6,084 \cdot 10^{-2}$	0,250
6	$2^{-6}$	1	0,66	$2,958 \cdot 10^{-2}$	0,247	$2,946 \cdot 10^{-2}$	0,249
7	$2^{-7}$	1	0,66	$1,384 \cdot 10^{-2}$	0,247	$1,378 \cdot 10^{-2}$	0,249
8	$2^{-8}$	1	0,66	$5,978 \cdot 10^{-3}$	0,247	$5,950 \cdot 10^{-3}$	0,249
9	$2^{-9}$	1	0,66	$2,067 \cdot 10^{-3}$	0,247	$2,054 \cdot 10^{-3}$	0,249
10	$2^{-10}$	5	0,81	$4,644 \cdot 10^{-8}$	0,093	$4,639 \cdot 10^{-8}$	0,093

IF(k.No.0) Начальное приближение:  $u_{ij}^{(0)}(\varepsilon_k) = u_{ij}(\varepsilon_{k-1})$ 

$$v_{ij}^{(0)}(\varepsilon_k) = v_{ij}(\varepsilon_{k-1})$$

Решение задачи (9)  $\Rightarrow u_{ij}(\varepsilon_k)$  и  $v_{ij}(\varepsilon_k)$ 

End DO

End

Эффективность MDA в пятом тесте определялась как  $\Xi = \hat{\nu}_\Sigma / (2\hat{\nu}_\Sigma^*)$ , где  $\hat{\nu}_\Sigma^*$  есть число эквивалентных итераций, необходимых для решения единственного уравнения

$$\frac{\partial(u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(v_e u)}{\partial y} = \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + F_u(x, y).$$

Результаты вычислительного эксперимента приведены в табл. 3. Следует подчеркнуть, что УМГ эффективна как для неразнесенных, так и для разнесенных сеток. Основные компоненты УМГ (многосеточная структура, оригинальное построение грубых сеток, идентификация индексов, операторы переходов, пилообразный цикл и др.) не зависят от определения контрольных объемов и расположения сеточных функций на самой мелкой сетке. В противоположность данному обстоятельству, эффективность классических многосеточных методов зависит от расположения контрольных объемов. Например, один из вариантов классических методов, выполненный по принципу черного ящика, оказался неэффективным при решении задач на разнесенных сетках [4].

**4. Классификация решаемых задач.** С точки зрения УМГ, все решаемые задачи могут быть классифицированы с точки зрения количества модификаций для адаптации к УМГ. Уравнение Пуассона, анизотропное уравнение, уравнение с разрывными коэффициентами [1] и модельные системы (1), (8) являются примерами задач первого порядка сложности, поскольку они требуют только одну  $\Sigma$ -модификацию для адаптации к УМГ.  $\Pi$ -модификация выглядит предпочтительнее для некоторых нелинейных задач.

Сингулярно возмущенные задачи имеют второй порядок сложности. Помимо  $\Sigma$ -модификации, они требуют дополнительную  $\varepsilon$ -модификацию для адаптации к УМГ. Разложение в ряд Тейлора позволяет получить

$$u(x, y, \varepsilon_k) = u(x, y, \varepsilon_{k-1}) + 2\varepsilon_k \left. \frac{\partial u}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon_k} + o(\varepsilon_k^2), \quad \varepsilon_k = \frac{\varepsilon_{k-1}}{2}.$$

Поправка  $c_k^{(0)}(x, y)$  в вычислительной процедуре, использованной в Тесте 5, может быть оценена как

$$\max |c_k^{(0)}(x, y)| = \max |u(x, y, \varepsilon_k) - u(x, y, \varepsilon_{k-1})| = O(\varepsilon_k).$$

В противоположность функции  $u(x, y, \varepsilon)$ , эта поправка не имеет особенностей типа пограничного слоя.

В общем случае уравнения Навье–Стокса представляют задачу третьего порядка сложности. Во-первых, эти уравнения должны быть модифицированы для получения сильной взаимосвязи между давлением и компонентами скорости. Во-вторых, уравнения Навье–Стокса должны быть адаптированы к УМГ. И в-третьих,  $\varepsilon$ -модификация позволит избежать расходимости итераций Ньютона.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Мартыненко С. И.* Универсальная многосеточная технология для численного решения дифференциальных уравнений в частных производных на структурированных сетках // Вычислительные методы и программирование. 2000. **1**, раздел 1. 83–102. (<http://www.srcc.msu.ru/num-meth> или <http://num-meth.srcc.msu.ru/>).
2. *Hageman L. A., Young D. M.* Applied Iterative Methods. New York: Academic Press, 1981.
3. *Patankar S.* Numerical Heat Transfer and Fluid Flow. New York: Hemisphere, 1980.
4. *Dendy Jr. J. E.* Black box multigrid for systems // Appl. Math. Comput. 1986. **19**. 57–74.

Поступила в редакцию  
26.10.2000

---