УДК 519.6

МЕТОД ОТСЕЧЕНИЯ ВЫПУКЛЫХ МНОГОГРАННИКОВ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ К НЕКОРРЕКТНЫМ ЗАДАЧАМ

В. Н. Титаренко[1], А. Г. Ягола[1]

Рассматриваются линейные некорректные задачи на компактных множествах специальной структуры. Предлагаются два подхода для оценки погрешности приближенного решения, основанные на методе отсечения выпуклых многогранников. Строится область, которой принадлежит точное решение обратной задачи для уравнения теплопроводности.

1. Постановка задачи. Особенностью некорректных задач является невозможность оценить близость приближенного решения задачи к точному [1], [2]. Однако если известно, что точное решение задачи принадлежит некоторому компактному множеству, то задача становится корректно поставленной и возможна оценка погрешности решения. В данной работе рассматриваются два подхода для оценки погрешности приближенного решения при условии принадлежности решения некоторому компактному множеству специальной структуры.

Многие линейные задачи можно свести к решению операторного уравнения

$$B\varphi = \psi, \quad \varphi \in \Phi, \quad \psi \in \Psi, \tag{1}$$

где B — линейный непрерывный оператор, действующий из линейного нормированного пространства Φ в линейное нормированное пространство Ψ. Вместо точных оператора B и правой части $\overline{\psi}$ имеются приближенные линейный непрерывный оператор B_h и правая часть ψ_δ, такие, что $\forall \varphi \in \Phi$: $\|B\varphi - B_h\varphi\|_\Psi \leqslant h\|\varphi\|_\Phi$, $\|\overline{\psi} - \psi_\delta\|_\Psi \leqslant \delta$, где $h \geqslant 0$ — погрешность оператора, $\delta \geqslant 0$ — погрешность правой части.

2. Приближенное решение. Пусть априори известно, что точное решение $\overline{\varphi}$ задачи (1) принадлежит некоторому компакту M, а оператор B взаимно однозначно отображает M на $BM \subset \Psi$. Как показано в монографии [2], в качестве множества приближенных решений задачи (1) можно принять множество

$$\Phi_M \equiv \{\varphi \in M : \|B_h\varphi - \psi_\delta\|_\Psi \leqslant h\|\varphi\|_\Phi + \delta\}.$$

Если обозначить $\eta = (h, \delta)$, то $\forall \varphi_\eta \in \Phi_M$: $\varphi_\eta \to \overline{\varphi}$ в Φ при $\eta \to 0$.

Для нахождения приближенного решения φ_η задачи (1) удобно перейти к конечномерным евклидовым пространствам. Можно найти такие n-мерное евклидово пространство Z^n и k-мерное евклидово пространство U^k, что элементы пространств Φ и Ψ могут быть записаны как линейные функции от векторов $z \in Z^n$ и $u \in U^k$ соответственно, т.е. как $\varphi(z)$ и $\psi(u)$. При этом оператор B_h переходит в оператор A, представляющий матрицу размеров $n \times k$, а приближенная правая часть ψ_δ операторного уравнения (1) — в вектор $u_\Delta \in U^k$. Тогда задача нахождения приближенного решения задачи (1) сводится к нахождению элемента

$$z_\eta \in \{z \in Z_M \subset Z^n : \|Az - u_\Delta\| \leqslant \Delta(B_h, \psi_\delta, h, \delta, M)\}. \tag{2}$$

3. Первый подход к оценке погрешности. Из условия принадлежности $\overline{\varphi}$ компактному множеству M следует существование множества Z_M априорных ограничений для вектора z в Z^n. Будем считать, что Z_M является выпуклым в пространстве Z^n. В монографии [2] показано, что при кусочно-линейной аппроксимации выпуклых или монотонных функций, ограниченных на отрезке сверху и снизу некоторыми константами, векторы z сеточных значений данных функций образуют множества Z_M, являющиеся выпуклыми многогранниками.

Введем множество

$$Z^\Delta \equiv \{z \in Z^n : \|Az - u_\Delta\| \leqslant \Delta\}.$$

Тогда в качестве приближенного решения задачи (2) берем любой элемент $z_\eta \in Z_M^\Delta \equiv Z^\Delta \cap Z_M$, если $Z_M^\Delta \neq \varnothing$. Множество Z^Δ представляет собой эллипсоид в пространстве Z^n. Поэтому множество Z_M^Δ является выпуклым

[1] Физический факультет, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, 119899 Москва, e-mail: yagola@inverse.phys.msu.su

как пересечение двух выпуклых множеств [3]. Необходимо найти множество Z_M^Δ или множество, близкое в некотором смысле к множеству Z_M^Δ. В качестве такого множества можно взять многогранник W, описанный около множества Z_M^Δ. Построим данный многогранник W.

Для этого сначала найдем хотя бы одну точку $z_\eta \in Z_M^\Delta$, например, с помощью алгоритмов, рассмотренных в монографии [2]. Будем считать, что точка $z_\eta \in Z_M^\Delta$ существует, в противном случае задача (1) не имеет решения на выбранном множестве M при заданной погрешности η.

Обычно при решении задачи из принадлежности точного решения $\overline{\varphi}$ множеству M следует ограниченность вектора z. Поэтому считаем, что можно построить многогранник V, такой, что $Z_M^\Delta \subset V$. Принимаем, что $W_0 \equiv V$.

Рассмотрим алгоритм построения многогранника W. Пусть построен многогранник $W_q \subset W_{q-1} \subset \ldots \subset W_0$, $q \geqslant 0$. Многогранник W_{q+1} строится следующим образом: выбирается вершина многогранника W_q, соединяется отрезком с точкой z_η; проводится касательная плоскость к поверхности Z_M^Δ через точку пересечения с построенным отрезком; из двух многогранников, полученных пересечением многогранника W_q касательной плоскостью, выбирается многогранник, содержащий точку z_η внутри себя (или, если точка z_η принадлежит обоим многогранникам, многогранник, не содержащий рассматриваемой вершины многогранника W_q). Все эти построения возможны и единственны в силу выпуклости рассматриваемых областей.

Так как многогранник W должен быть близок в некотором смысле к множеству Z_M^Δ, то при $q \to \infty$: $W_q - Z_M^\Delta \to \varnothing$. Поэтому для сходимости алгоритма следует правильно выбрать вершины многогранника W_q. Для этого можно поступить следующим образом. На некотором шаге Q запомнить все вершины многогранника, а на каждом последующем шаге $q > Q$ рассматривать эти вершины, если они принадлежат многограннику W_q. После того как будут рассмотрены все вершины, зафиксированные на шаге Q, можно снова запомнить вершины полученного многогранника и повторить процедуру.

4. Метод отсечения выпуклых многогранников. Рассмотрим теперь сам численный алгоритм для построения многогранника W_{q+1} из многогранника W_q путем пересечения с некоторым полупространством, задаваемым касательной плоскостью к Z_M^Δ. Назовем этот алгоритм методом отсечения выпуклых многогранников (МОВМ). Он основан на следующей теории.

Выпуклый многогранник можно рассматривать как пересечение полупространств, ограниченных плоскостями.

Определение 1. Гранью выпуклого многогранника называется пересечение данного многогранника с одной из плоскостей, его образовавшей.

Определение 2. Ребром выпуклого многогранника называется отрезок x_1x_2 данного многогранника, где x_1 и x_2 — его вершины, если любая внутренняя точка x отрезка x_1x_2 является граничной точкой для всех граней многогранника, содержащих данную точку.

Следует отметить, что в данном определении существенно, что точка x — внутренняя точка отрезка, так как если точка x совпадает с одной из вершин (x_1 или x_2), то такое определение не будет соответствовать интуитивным представлениям о ребре, что легко проверить для двумерного случая.

Лемма. *Отрезок x_1x_2, соединяющий вершины x_1 и x_2 выпуклого многогранника W, является ребром этого многогранника тогда и только тогда, когда для любой внутренней точки x отрезка x_1x_2 и любых двух точек $\hat{x}_1$, $\hat{x}_2 \in W$, не лежащих на отрезке x_1x_2, точка x не принадлежит отрезку, соединяющему точки $\hat{x}_1$ и $\hat{x}_2$.*

Доказательство. Пусть отрезок x_1x_2 является ребром многогранника W, а x — внутренняя точка отрезка x_1x_2. Рассмотрим произвольные точки $\hat{x}_1$ и $\hat{x}_2$, такие, что точка x принадлежит отрезку $\hat{x}_1\hat{x}_2$. Пусть точка $\hat{x}_1$ принадлежит многограннику W и не лежит на ребре x_1x_2. Ребро x_1x_2 образовано пересечением нескольких плоскостей. Точка x принадлежит ребру x_1x_2, поэтому прямая, проходящая через точки $\hat{x}_1$ и $\hat{x}_2$, пересекает хотя бы одну из этих плоскостей, так как эта прямая не содержит ребро x_1x_2 многогранника W. Из этого следует, что точка $\hat{x}_2$ лежит вне многогранника W. Тогда для любых двух точек $\hat{x}_1$, $\hat{x}_2 \in W$, не лежащих на отрезке x_1x_2, точка x не принадлежит отрезку $\hat{x}_1\hat{x}_2$. Прямое утверждение доказано.

Докажем теперь обратное утверждение. Пусть для любых двух точек $\hat{x}_1$, $\hat{x}_2 \in W$, не лежащих на отрезке x_1x_2, внутренняя точка x отрезка x_1x_2 не принадлежит отрезку $\hat{x}_1\hat{x}_2$. Считаем, что выпуклый многогранник W рассматривается в n-мерном пространстве. Построим ε-окрестность точки x. Внутренние точки отрезка прямой, соединяющей точки x_1 и x_2, концы которого отстоят от точки x на расстоянии ε, являются точками многогранника W, лежащими в ε-окрестности точки x. Построим для данного ε точку P, лежащую в ε-окрестности точки x и не принадлежащую многограннику W. Рассмотрим произвольную точку P^* из ε-окрестности точки x, не принадлежащую отрезку x_1x_2. Если точка P^* не принадлежит многограннику W, то тогда точка P построена ($P = P^*$). Если же принадлежит, то проведем через точки P^* и x прямую и найдем отрезок этой прямой, внутренние точки которого лежат в ε-окрестности точки x. Этот отрезок разбивается точкой x на два равных отрезка, в качестве точки P возьмем любую внутреннюю точку одного из этих равных отрезков, который не содержит точку P^*. Предположим, что точка P принадлежит многограннику W, тогда, положив $\hat{x}_1 = P^*$ и $\hat{x}_2 = P$, получим, что точки $\hat{x}_1$, $\hat{x}_2 \in W$ и не лежат на отрезке x_1x_2, в то время как точка x принадлежит отрезку $\hat{x}_1\hat{x}_2$, что противоречит нашему предположению. Поэтому любая ε-окрестность точки x содержит точки, как принадлежащие многограннику W, так и не принадлежащие ему, а это по определению означает, что точка x является граничной точкой множества W. Граница выпуклого многогранника W образована пересечением плоскостей, и точка x принадлежит некоторым граням многогранника W. Грань представляет собой выпуклый многогранник в $(n-1)$-мерном пространстве, т.к. она образована пересечением плоскости и выпуклого многогранника W. Повторяем те же рассуждения, что и для n-мерного пространства. Таким образом, точка x является граничной точкой для рассматриваемой грани, а следовательно, и для всех граней, содержащих точку x. Поэтому отрезок x_1x_2 является ребром. Лемма доказана.

Теорема. *Для того чтобы вершины x_1 и x_2 выпуклого многогранника W соединялись ребром этого многогранника, необходимо и достаточно, чтобы для любой вершины многогранника W, не совпадающей с вершинами x_1 и x_2, множество плоскостей, проходящих через данную вершину, не содержало всех плоскостей, общих для точек x_1 и x_2.*

Доказательство. Пусть вершины x_1 и x_2 многогранника W соединяются с помощью ребра. Рассмотрим любую другую вершину многогранника W, обозначив ее как x_3. Плоскости, общие для точек x_1 и x_2, пересекаются по ребру x_1x_2. Любой отрезок с концом в точке x_3, пересекающий отрезок x_1x_2 в своей внутренней точке x, пересекает хотя бы одну из этих плоскостей. В противном случае существуют точки $\hat{x}_1 = x_3$, $\hat{x}_2 \in W$, не лежащие на прямой x_1x_2, такие, что $x \in \hat{x}_1\hat{x}_2$, а это по лемме означает, что x_1x_2 не является ребром. Поэтому множество плоскостей, проходящих через вершину x_3, не содержит в себе по крайней мере одну из плоскостей, общих для точек x_1 и x_2.

Докажем обратное утверждение. Рассмотрим любую грань, которой принадлежит точка x. Так как точка x принадлежит отрезку x_1x_2, то точка x может быть либо граничной точкой, либо внутренней для рассматриваемой грани. Проведем через любую вершину многогранника W, принадлежащую данной грани и не совпадающую с вершинами x_1 и x_2 (обозначим данную вершину как x_3), луч x_3x. Любая точка данного луча, не лежащая на отрезке x_3x, не принадлежит многограннику W, так как из исходного положения следует, что луч x_3x пересекает хотя бы одну из плоскостей, ограничивающую многогранник W. Поэтому x — граничная точка для всех граней многогранника W, содержащих данную точку. Тогда по определению отрезок x_1x_2 является ребром выпуклого многогранника. Теорема доказана.

Обратимся непосредственно к МОВМ. Многогранник W_q задаем с помощью координат его вершин, номеров граней, которым принадлежит любая вершина, и номеров вершин, с которыми любая вершина соединяется ребром. Этой информации достаточно для построения многогранника W_{q+1}.

Определение 3. Вершина многогранника W_q называется точкой отсечения, если она лежит вне полупространства, пересечением с которым многогранник W_q образует многогранник W_{q+1}.

Определение 4. Вершина многогранника W_q называется граничной точкой, если она принадлежит плоскости, пересечением с которой многогранник W_q образует многогранник W_{q+1}.

Определение 5. Вершина многогранника W_q называется внутренней точкой, если она лежит внутри полупространства, пересечением с которым многогранник W_q образует многогранник W_{q+1}.

Если все вершины многогранника W_q являются точками отсечения или граничными точками, не принадлежащими одной грани, то многогранник W_{q+1} является пустым множеством.

Определение 6. Точка многогранника W_q называется новой точкой, если она образована пересечением ребра, соединяющего пару "внутренняя точка – точка отсечения", и плоскости, пересечением с которой многогранник W_q образует многогранник W_{q+1}.

Занумеруем все новые точки. Если внутренняя точка образует пару "внутренняя точка – точка отсечения", то она соединяется ребром с новой точкой, которая лежит на соответствующем отрезке "внутренняя точка – точка отсечения". Поэтому заменяем для внутренней точки номер соответствующей точки отсечения, с которой она соединяется ребром, на номер новой точки. Тогда число вершин, с которыми внутренняя точка соединяется ребром многогранника W_q, сохраняется и для многогранника W_{q+1}.

Отметим следующие легкодоказуемые утверждения.

1. Если две граничные точки многогранника W_q соединяются ребром, то они будут соединяться ребром и в многограннике W_{q+1}.

2. Если в n-мерном пространстве при нахождении пар вершин многогранника, соединяющихся ребром, для рассматриваемой вершины сумма числа вершин, с которыми она соединяется ребром, и числа вершин, которые еще не были проверены, равна n, то все еще не проверенные вершины соединяются ребром с рассматриваемой вершиной.

3. Если для рассматриваемой пары вершин число общих плоскостей меньше $n-1$, где n — размерность

пространства, то данная пара не соединяется ребром.

Последнее утверждение очевидно, если вспомнить, что прямая описывается однопараметрическим уравнением.

Замечание. Для двух- и трехмерных пространств третье утверждение является необходимым и достаточным критерием отбора пар вершин: пара вершин соединяется ребром тогда и только тогда, когда число общих граней равно $n-1$. Для пространств большей размерности ($n \geqslant 4$) последнее утверждение не выполняется.

Пример. Единичный четырехмерный куб с вершиной в начале координат и ребрами, параллельными осям координат, пересекается с полупространством $x_1 - 2x_2 - 2x_3 \leqslant 0$. Точки $(0,0,0,0)$ и $(0,0,0,1)$ соединяются ребром и принадлежат четырем общим плоскостям: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0$.

Рассмотрим новые и граничные точки и определим, с какими точками они соединяются ребрами. Граничные точки, которые соединялись ребрами с граничными или внутренними точками, будут соединяться с соответствующими вершинами и в W_{q+1}. Каждая новая точка будет соединяться ребром с одной внутренней точкой из соответствующей пары "внутренняя точка – точка отсечения". Найдем пары точек, которые соединяются ребрами, только среди граничных и новых точек. Для каждой пары найдем число общих плоскостей и их номера, при этом новая плоскость не считается. Если это число меньше $n-2$, то рассматриваемая пара ребром в многограннике W_{q+1} не соединяется. Если же оно не меньше $n-2$, то, рассмотрев все остальные граничные и новые точки, определим, существует ли такая вершина, которая также принадлежит этим общим плоскостям. Если такой вершины не существует, то рассматриваемая пара вершин соединяется ребром, в противном случае не соединяется. Так как после отсечения часть вершин (точки отсечения) и часть граней могут не принадлежать многограннику W_{q+1}, то следует перенумеровать вершины и плоскости. После этого можно переходить к следующему отсечению.

Данный метод хорошо работает для задач небольшой размерности. Для задач большой размерности приходится работать с большими массивами, что существенно снижает скорость решения задачи. Поэтому для таких задач лучше применять метод, описанный ниже.

5. Второй подход к оценке погрешности. Обычно при решении некорректных задач требуется не само множество Z_M^Δ, а максимальное значение линейной функции вида $f(z) = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i z_i = (c, z)$. Поэтому можно предложить метод решения задачи линейного программирования на выпуклых множествах, которые можно представить в виде пересечения выпуклого многогранника и некоторого выпуклого тела, ограниченного гладкой поверхностью. Для многих некорректных задач это выпуклое тело является эллипсоидом.

Пусть на некотором этапе построена точка z^p, найдем точку z^{p+1}. Для этого проведем через z^p луч с направляющим вектором c и найдем точку его пересечения z^* с поверхностью S выпуклого множества Z_M^Δ. После этого строим луч r, ортогональный вектору c, с началом в точке z^*, пересекающий S в точке $\tilde{z} \neq z^*$. Рассмотрим точку $\breve{z} = \frac{1}{2}(z^* + \tilde{z})$. Если $n > 2$, то следует построить прямую, проходящую через $\breve{z}$, направляющий вектор которой ортогонален лучу r и вектору c. Находим точки пересечения данной прямой с S и берем их полусумму в качестве новой точки $\breve{z}$. Аналогично строим новую прямую, ортогональную этим трем векторам, и так $n-2$ раза. Данная процедура построения точки $\breve{z}$ существенно ускоряет сходимость алгоритма. Полагаем $z^{p+1} = \breve{z}$. Для последовательности $\{z^p\}$ справедливо: $\lim\limits_{p\to\infty} f(z^p) = \max\limits_{z \in Z_M^\Delta} f(z)$.

При численной реализации данного метода следует использовать МОВМ по следующим двум причинам. Первая причина заключается в том, что для некоторых задач может оказаться, что точка z^* близка или принадлежит области пересечения нескольких граней выпуклого многогранника Z_M. Тогда при неудачном выборе векторов r точки z^p не будут достаточно быстро максимизировать функционал $f(z)$, что приведет либо к существенному замедлению работы программы, либо к ее остановке, при которой значение функционала $f(z)$ может значительно отличаться от максимума. Вторая причина заключается в желании реализовать критерий остановки программы, когда для найденной точки z^p значение функционала $f(z^p)$ близко к максимальному.

Поэтому для удачного нахождения вектора r следует построить некоторый многогранник X, содержащий точку z^* внутри, а затем рассмотреть пересечение данного многогранника со всеми полупространствами, граничные плоскости которых находятся на некотором расстоянии $R > 0$ от точки z^*. В качестве исходного многогранника X можно выбрать прямоугольную пирамиду, так как у пирамиды $(n+1)$ вершина, что очень важно при больших n. При этом следует выбрать оптимальное значение параметра R, чтобы в построенном многограннике $\widetilde{X}$ перебором вершин можно было легко построить достаточно длинный вектор r, но при этом работать как можно с меньшим числом плоскостей. Для построения вектора r учитываются только очень близкие грани многогранника Z_M, поэтому ясно, что если выбрать значение R очень маленьким, то при наличии других, близких к точке z^* граней построенная с помощью вектора r точка $\tilde{z}$ будет близка к точке z^* и число итераций для нахождения максимума $f(z)$ возрастет. Если же значение R велико, то придется работать с большими массивами, что тоже увеличивает время работы программы.

Может оказаться, что на некотором этапе все вершины построенного многогранника $\widetilde{X}$ лежат на расстоянии $R_0 < R$ от точки z^*. Тогда можно считать, что найдена точка, максимизирующая функционал $f(z)$. Таким образом, с помощью МОВМ можно обеспечить критерий остановки программы.

Данные способ построения вектора r и критерий остановки программы следует дополнить следующим. Рассматриваемая задача заключается в максимизации функционала $f(z)$ на множестве $Z_M^\Delta = Z_M \cap Z^\Delta$, а не на Z_M. Но при построении многогранника около точки z^* учитываются только грани многогранника Z_M и не учитывается наличие границы гладкой поверхности множества Z^Δ. Поэтому надо поступить следующим образом: построить рассматриваемый многогранник только с учетом границы множества Z_M, а если у полученного многогранника будут вершины, лежащие вне множества Z^Δ, то с помощью этих вершин и точки z^* построить многогранник способом, предложенным в методе построения описанного около Z_M^Δ выпуклого многогранника W.

6. Обратная задача для уравнения теплопроводности. В качестве примера можно рассмотреть обратную задачу для уравнения теплопроводности

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, \\ u(0,t) = 0, \\ u(\pi,t) = 0, \end{cases} \quad \begin{array}{l} u(x,0) = \varphi(x), \\ u(x,T) = \psi(x), \end{array} \quad \varphi(x),\ \psi(x) \in L_2[0,\pi].$$

Задана функция $\psi(x)$, следует найти функцию $\varphi(x)$ на множестве выпуклых вверх на отрезке $[0,\pi]$ функций, ограниченных сверху константой $C > 0$.

Воспользуемся методом разделения переменных и разложением функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ в ряды по синусам. После этого можно записать:

$$\varphi(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{l=1}^{\infty} S_l \sin(lx), \quad \psi(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{r=1}^{\infty} U_r \sin(rx), \quad S_l = \int_0^\pi \varphi(x)\sin(lx)\,dx, \quad U_r = \int_0^\pi \psi(x)\sin(rx)\,dx.$$

Так как $U_l = S_l e^{-l^2T}$, то введем $(n \times k)$-матрицу A, переводящую вектор z сеточных значений $\{z_i\}_1^n$ функции $\varphi(x)$, заданных на сетке $\{x_i\}_1^n$, в вектор первых k коэффициентов Фурье функции $\psi(x)$:

$$A_{li} = \frac{1}{l^2}\left(\frac{\sin(lx_i) - \sin(lx_{i+1})}{x_{i+1} - x_i} + \frac{\sin(lx_i) - \sin(lx_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}\right) e^{-l^2T}, \quad l = \overline{1,k}, \quad i = \overline{1,n}.$$

Таким образом, совершен переход от квадратично интегрируемых на отрезке $[0,\pi]$ функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ к вектору сеточных значений и вектору первых k коэффициентов Фурье соответственно. Именно такой переход (от функции $\psi(x)$ к вектору первых k коэффициентов Фурье), а не переход от функции $\psi(x)$ к вектору сеточных значений, который используется во многих монографиях, позволяет найти погрешность δ, используя в качестве исходной информации сеточные значения $\{y_j\}_1^m$ функции $\psi_\delta(x)$ на сетке $\{\hat{x}_j\}_1^m$ и вектор $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)$, такие, что

$$|y_j - \psi_\delta(\hat{x}_j)| \leqslant \xi_j, \quad j = \overline{1,m}.$$

Будем считать, что функция $\overline{\psi}(x)$ представима в виде конечного ряда Фурье: $\overline{\psi}(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{l=1}^{k} V_l \sin(lx)$. Такое предположение не уменьшает общности, так как в силу ограниченности функции $\varphi(x)$ на отрезке $[0,\pi]$ сеточные значения любой функции $\psi_\delta(x)$ можно рассматривать как сеточные значения функции $\psi_\delta(x)$, представимой в виде конечного ряда Фурье, но с измененным вектором погрешностей $\breve{\xi}$. Запишем новый вектор погрешностей:

$$\breve{\xi}_j = \xi_j + \frac{2}{\pi}\sum_{l=k+1}^{\infty} |S_l|_{\max} e^{-l^2T} |\sin(lx_j)|, \quad j = \overline{1,m}.$$

С учетом сеточных значений y_j, $j = \overline{1,m}$, и измененного вектора погрешностей $\breve{\xi}_j$, $j = \overline{1,m}$, можно записать, что

$$Y_1 \leqslant Du \leqslant Y_2, \quad Y_1 \leqslant Dv \leqslant Y_2, \tag{3}$$

где

$$u = (U_1, U_2, \ldots, U_k), \quad Y_{1j} = y_j - \breve{\xi}_j, \quad Y_{2j} = y_j + \breve{\xi}_j, \quad D_{ji} = \frac{2}{\pi}\sin(ix_j), \quad j = \overline{1,m}, \quad i = \overline{1,k}.$$

Для погрешности δ выполняется: $\delta^2 = \frac{2}{\pi}\sum_{l=1}^{k}(U_l - V_l)^2$. В силу ограниченности функции $\varphi(x)$ на отрезке $[0,\pi]$ можно построить векторы $v_{\min}$ и $v_{\max}$, такие, что

$$v_{\min} \leqslant u \leqslant v_{\max}, \quad v_{\min} \leqslant v \leqslant v_{\max}. \tag{4}$$

Условия (3), (4) позволяют по заданным сеточным значениям $\{y_j\}_1^m$ и вектору погрешностей ξ найти погрешность δ, построив с помощью метода отсечения выпуклых многогранников область M_V, которой принадлежат векторы u и v, и взяв вектор u таким образом, что

$$\delta \equiv \sup_{v\in M_V} \sum_{l=1}^{k} (U_l - V_l)^2 = \inf_{u^*\in U^k} \left(\sup_{v\in M_V} \sum_{l=1}^{k} (U_l^* - V_l)^2 \right).$$

Задача нахождения погрешности δ и вектора u сводится к нахождению вершин многогранника M_V или, при грубой оценки погрешности, — к нахождению минимального и максимального значения каждой координаты точек многогранника M_V. В последнем случае можно записать, что

$$\delta^2 = \frac{1}{2\pi} \sum_{l=1}^{k} (V_{l\,\max} - V_{l\,\min})^2, \quad U_l = \frac{1}{2} (V_{l\,\max} + V_{l\,\min}).$$

7. Пример.

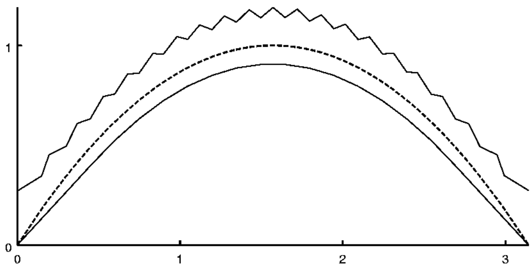

Рис. 1. Точное решение и область, которой оно может принадлежать при погрешности $\Delta = 0{,}29$

Пусть точное решение $\varphi(x) = \dfrac{4}{\pi^2} (\pi - x)\, x$, в качестве правой части возьмем $\psi(x) = B\,\varphi(x)$. Полагаем $T = 10^{-2}$, $\Delta = 0{,}29$, $C = 1{,}2$, $k = 10$, $n = 20$. На Рис. 1 показаны точное решение и область, которой оно принадлежит. Данная область построена с помощью метода, описанного в пятом разделе.

Все описанные выше алгоритмы были реализованы на языке программирования Fortran 90 (Microsoft Fortran PowerStation 4.0).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тихонов А.Н., Леонов А.С., Ягола А.Г.* Нелинейные некорректные задачи. М.: Наука, 1995.
2. *Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г.* Численные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1990.
3. *Васильев Ф.П.* Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1980.

Поступила в редакцию
17.04.2000