УДК 517.968.21 doi 10.26089/NumMet.v19r322

О СПЕЦИАЛЬНОМ ВАРИАНТЕ МЕТОДА ПОДОБЛАСТЕЙ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ФРЕДГОЛЬМА ВТОРОГО РОДА

С. А. Соловьева[1]

Предложен и теоретически обоснован специальный вариант метода подобластей на базе полиномов Канторовича приближенного решения интегральных уравнений Фредгольма второго рода в пространстве гладких функций.

Ключевые слова: интегральные уравнения Фредгольма второго рода, пространство гладких функций, приближенные решения, метод подобластей, полиномы Канторовича.

Введение. Многие задачи математики и ее приложений (см., например, [1–5]) сводятся к интегральным уравнениям Фредгольма второго рода вида

$$(Ax)(t) \equiv x(t) + (Kx)(t) = y(t), \tag{1}$$

где $(Kx)(t) = \int\limits_0^1 K(t,s)x(s)\,ds$, $t \in I = [0,1]$; $K(t,s) \in C^{(m)}\big(I^2\big)$, $y(t) \in C^{(m)}(I)$ — известные функции, а $x(t) \in C^{(m)}(I)$ — искомая функция. Теория точных и приближенных методов решения таких уравнений хорошо разработана. Однако широко применяемые классические приближенные проекционные методы не учитывают структурные свойства исходных данных уравнения (1). В работе [6] показано, что точность приближенных решений, полученных при помощи классических методов, по норме пространства $C^{(m)}(I)$ ниже, чем по норме пространства $C(I)$. В связи с этим появляется задача разработки таких приближенных методов решения уравнения (1), которые учитывают дифференциальные свойства исходных данных.

В работах [7–10] предложены специальные варианты методов коллокации и моментов, имеющие более высокую точность приближения в пространстве гладких функций по сравнению с соответствующими классическими методами.

В настоящей статье предложен и теоретически обоснован в смысле [11, гл. 1] специальный вариант метода подобластей на базе полиномов Канторовича в пространстве непрерывно дифференцируемых функций. При этом были использованы идеи и результаты работ [7–10, 12–15].

В первой части статьи введено функциональное пространство и построены элементы теории приближения в нем. Во второй — предложен метод приближенного решения уравнения (1) в этом пространстве. Третья часть посвящена вопросам устойчивости и хорошей обусловленности рассматриваемого метода.

1. Основное пространство. Пусть $C = C(I)$ — класс непрерывных на сегменте I функций с обычной max-нормой. Будем обозначать через $Y = C^{(m)}$, $m \in \mathbb{N}\bigcup\{0\}$, пространство функций, имеющих непрерывные производные до порядка m включительно. Очевидно, что $C^{(0)} = C$. Следуя [12], наделим это пространство нормой

$$\|y\|_Y = \|Dy\|_C + \sum_{i=0}^{m-1} \left|y^{(i)}(0)\right|, \quad y \in Y, \tag{2}$$

где $Dy = y^{(m)}(t)$, $y \in Y$. Если $m = 0$, то $Dy = y$ и $\|y\|_Y = \|y\|_C$. Известно (см., например, [12]), что функции y принадлежат пространству Y тогда и только тогда, когда

$$y = \Phi(t) + \sum_{i=0}^{m-1} c_i t^i, \tag{3}$$

где $\Phi(t) = (JDy)(t) \in Y$, $y \in Y$, $(J\varphi)(t) = \dfrac{1}{(m-1)!}\int\limits_0^t (t-s)^{m-1}\varphi(s)\,ds$, $\varphi \in C$, $c_i = y^{(i)}(0)/i!$, $i = \overline{0, m-1}$.

При $m = 0$ считаем, что $J\varphi = \varphi$. Кроме того, Y по норме (2) вложено в C и полно (см., например, [12]).

[1] Казанский (Приволжский) федеральный университет, Набережночелнинский институт (филиал), просп. Мира, 68/19, 423810, г. Набережные Челны; доцент, e-mail: solovjeva_sa@mail.ru

Обозначим через $P_n^D = P_{n+m}^D : Y \to H_{n+m}$ линейный оператор, определяемый по закону

$$\big(P_n^D y\big)(t) = (JP_n Dy)(t) + \sum_{i=0}^{m-1} y^{(i)}(0) t^i / i!, \tag{4}$$

где $P_n : C \to H_n$ — оператор, который любой непрерывной функции ставит в соответствие полином Канторовича (например, [13])

$$(P_n \varphi)(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} (n+1) \int\limits_{\nu_k}^{\nu_{k+1}} \varphi(t)\, dt. \tag{5}$$

Здесь $\displaystyle\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ — биномиальные коэффициенты; система узлов $\{\nu_k\}_0^{n+1}$ задается по формуле

$$\nu_k = \nu_k^{(n)} = \frac{k}{n+1}\,, \quad k = \overline{0, n+1}. \tag{6}$$

Лемма. *Для любой функции $y \in Y$ справедлива оценка*

$$\big\|y - P_n^D y\big\|_Y \leqslant \Big(1 + \sqrt{2}\Big)\, \omega \left(Dy; (n+1)^{-1/2}\right).$$

Доказательство. Учитывая (3), (4), (2) и оценку [13]

$$\|\varphi - P_n \varphi\|_C \leqslant \Big(1 + \sqrt{2}\Big)\, \omega \left(\varphi; (n+1)^{-1/2}\right), \quad \varphi \in C, \tag{7}$$

получим

$$\big\|y - P_n^D y\big\|_Y = \|JDy - JP_n Dy\|_Y = \|Dy - P_n Dy\|_C \leqslant \Big(1 + \sqrt{2}\Big)\, \omega \left(Dy; (n+1)^{-1/2}\right).$$

2. Специальный вариант метода подобластей (СВМП) на базе полиномов Канторовича. Пусть в уравнении (1) исходные данные удовлетворяют условиям

$$g(t,s) = (D_t K)(t,s) \in C\big(I^2\big), \quad y \in Y, \tag{8}$$

а $x(t)$ — искомая функция вида (3).

Приближенное решение уравнения (1) ищем в виде

$$x_n(t) = (J z_n)(t) + \sum_{i=0}^{m-1} c_{n+1+i} t^i, \tag{9}$$

$$z_n(t) = \sum_{k=0}^{n} c_k \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}. \tag{10}$$

Неизвестные коэффициенты c_i, $i = \overline{0, n+m}$, согласно предлагаемому методу находим из системы линейных алгебраических уравнений

$$c_k = (n+1) \int\limits_{\nu_k}^{\nu_{k+1}} (Dy - DKx_n)(t)\, dt, \quad k = \overline{0, n}, \quad (Ax_n - y)^{(i)}(0) = 0, \quad i = \overline{0, m-1}, \tag{11}$$

где ν_k определяются по формуле (6).

Теорема 1. *Пусть уравнение (1) имеет единственное решение при любой правой части $y \in Y$. Тогда при достаточно больших n приближенные решения x_n^*, построенные на основе условий (9)–(11), существуют, единственны и сходятся по норме пространства Y к точному решению $x^* = A^{-1}y$, причем*

$$\big\|x^* - x_n^*\big\|_Y \leqslant \Big(1 + \sqrt{2}\Big) \Big(\omega_t\big(g; (n+1)^{-1/2}\big) + \omega\big(Dy; (n+1)^{-1/2}\big)\Big). \tag{12}$$

Доказательство. Интегральное уравнение (1) будем рассматривать как операторное уравнение вида

$$Ax \equiv x + Kx = y \quad (x, y \in Y). \tag{13}$$

Обозначим через $Y_n \subset Y$ класс H_{n+m}. Предварительно убедимся, что система (11) эквивалентна операторному уравнению вида

$$A_n x_n \equiv x_n + P_n^D K x_n = P_n^D y \quad \bigl(x_n,\, P_n^D y \in Y_n\bigr). \tag{14}$$

Пусть x_n^* — решение уравнения (14), т.е. $P_n^D\bigl(Ax_n^* - y\bigr) \equiv 0$. Учитывая (4), (3) и (9), получим

$$\begin{aligned}
&\Bigl(JP_nD\bigl(Ax_n^* - y\bigr)\Bigr)(t) + \sum_{i=0}^{m-1} \bigl(Ax_n^* - y\bigr)^{(i)}(0)t^i/i! \equiv 0;\\
&\Bigl(P_nD\bigl(x_n^* + Kx_n^* - y\bigr)\Bigr)(t) \equiv 0, \quad \bigl(Ax_n^* - y\bigr)^{(i)}(0) = 0, \quad i = \overline{0, m-1};\\
&z_n^* = \Bigl(P_nD\bigl(y - Kx_n^*\bigr)\Bigr)(t), \quad \bigl(Ax_n^* - y\bigr)^{(i)}(0) = 0, \quad i = \overline{0, m-1}.
\end{aligned} \tag{15}$$

Первое из условий (15) с учетом соотношений (10) и (5) преобразуется в равенство

$$c_k^* = (n+1) \int\limits_{\nu_k}^{\nu_{k+1}} \bigl(Dy - DKx_n^*\bigr)(t)\, dt, \quad k = \overline{0, n}.$$

Таким образом, решение операторного уравнения (14) является решением системы (11). Проведя те же вычисления в обратном порядке, убедимся, что решение системы уравнений (11) является решением уравнения (14).

Покажем теперь близость операторов A и A_n. Учитывая (13), (14), (2), (4), (8)–(10) и (7), последовательно получим

$$\begin{aligned}
\|Ax_n - A_nx_n\|_Y &= \bigl\|Kx_n - P_n^D Kx_n\bigr\|_Y = \|DKx_n - P_nDKx_n\|_C =\\
&= \max_{t\in I} \left| \int\limits_0^1 (g - P_ng)(t, s)(Jz_n)(s)\, ds + \sum_{i=0}^{m-1} c_{n+1+i} \int\limits_0^1 (g - P_ng)(t, s)s^i\, ds \right| \leqslant\\
&\leqslant \bigl(1 + \sqrt{2}\bigr)\, \omega_t\left(g; (n+1)^{-1/2}\right) \left(\|z_n\|_C + \sum_{i=0}^{m-1} |c_{n+1+i}| \right) =\\
&= \bigl(1 + \sqrt{2}\bigr)\, \omega_t\left(g; (n+1)^{-1/2}\right) \|x_n\|_Y.
\end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\varepsilon^n \equiv \|A - A_n\|_{Y_n \to Y} = \Bigl(1 + \sqrt{2}\Bigr)\, \omega_t\left(g; (n+1)^{-1/2}\right). \tag{16}$$

Теперь из теоремы 7 ([11], с. 19) на основании леммы и оценки (16) получается утверждение теоремы 1 с оценкой (12).

Замечание. Если $m = 0$, то уравнение (1) превращается в уравнение Фредгольма второго рода в пространстве непрерывных функций, а рассматриваемый метод — в метод подобластей на базе полиномов Канторовича [13], причем $g(t, s) \equiv K(t, s)$, $(Dy)(t) \equiv y(t)$. Поэтому оценка (12) хорошо согласуется с оценкой [13] метода подобластей на основе полиномов Канторовича.

3. Устойчивость и обусловленность СВМП.

Теорема 2. *В условиях теоремы 1 справедливы следующие утверждения:*

i) *СВМП устойчив относительно малых возмущений системы* (11);

ii) *пусть существуют числа обусловленности* η *для уравнения* (1), *тогда при достаточно больших* n *существуют числа обусловленности* η_n *приближенного уравнения* (14), *причем*

$$\eta_n \leqslant c\eta \quad (1 \leqslant c \leqslant 1 + \varepsilon, \quad \varepsilon > 0), \qquad \lim_{n\to\infty} \eta_n = \eta.$$

Доказательство следует из теорем 11 и 13 [11, с. 22–25] с учетом того, что в условиях теоремы 1 при достаточно больших n аппроксимирующие операторы A_n^{-1} удовлетворяют условию $\bigl\|A_n^{-1}\bigr\| = O(1)$.

Заключение. В настоящей статье построена модификация метода подобластей на базе полиномов Канторовича, приспособленная к решению интегральных уравнений Фредгольма второго рода в пространстве гладких функций. Теоретическое обоснование этого метода проведено на основе варианта общей теории приближенных методов анализа, предложенного Б. Г. Габдулхаевым. Оценена скорость сходимости приближенных решений интегрального уравнения к точному; установлены устойчивость и хорошая обусловленность разработанного метода. На базе результатов данной работы возможна разработка других проекционных методов решения уравнений второго рода в классе непрерывно дифференцируемых функций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Самохин А.Б., Самохина А.С.* Объемные интегральные уравнения Фредгольма для задач рассеяния на диэлектрических структурах // Дифференц. уравнения. 2016. **52**, № 9. 1221–1230.
2. *Пожарский Д.А.* Полосовой разрез в составном упругом клине // Прикладная математика и механика. 2016. **80**, № 4. 489–495.
3. *Malits P.* The static Reissner–Sagoci problem for an inhomogeneous finite cylinder // Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics. 2017. **70**, N 4. 519–552.
4. *Tayyar I.H., Çolak B.* Plane wave scattering by a dielectric loaded slit in a thick impedance screen // Journal of Electromagnetic Waves and Applications. 2017. **31**, N 6. 604–626.
5. *Song Y., Hu H., Rudnicki J.W.* Dynamic stress intensity factor (Mode I) of a permeable penny-shaped crack in a fluid-saturated poroelastic solid // International Journal of Solids and Structures. 2017. **110–111**. 127–136.
6. *Габдулхаев Б.Г.* Заметка об общей теории приближенных методов анализа // Функциональный анализ и теория функций. Вып. 3. Учен. зап. Казан. ун-та. **125**, № 2. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1965. 18–31.
7. *Габбасов Н.С., Касакина И.П.* К численному решению интегральных уравнений второго рода в классе гладких функций // Труды Всерос. науч. конф. “Матем. моделирование и краевые задачи”. Ч. 3. “Дифференц. уравнения и краевые задачи”. Самара: Изд-во СамГТУ, 2004. 48–51.
8. *Соловьева С.А.* К вопросу о решении интегральных уравнений второго рода // Научно-технический вестник Поволжья. 2014. **1**. 37–40.
9. *Соловьева С.А.* Специальный вариант метода моментов для интегральных уравнений Фредгольма второго рода // Наука и образование: научное издание МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2015. **8**. 239–251.
10. *Соловьева С.А.* Об одном варианте метода коллокации для интегральных уравнений Фредгольма второго рода // Вычислительные методы и программирование. 2017. **18**. 187–191.
11. *Габдулхаев Б.Г.* Оптимальные аппроксимации решений линейных задач. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1980.
12. *Габбасов Н.С.* Коллокационный метод решения интегральных уравнений первого рода в классе обобщенных функций // Изв. вузов. Математика. 1993. **2**. 12–20.
13. *Уждавинис И.В.* О сходимости метода типа подобластей // Дифференц. уравнения и их применение. 1971. **1**. 73–83.
14. *Габбасов Н.С.* Методы решения интегральных уравнений Фредгольма в пространствах обобщенных функций. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2006.
15. *Габбасов Н.С., Соловьева С.А.* О специальном варианте метода подобластей для одного класса интегральных уравнений третьего рода // Изв. вузов. Математика. 2014. **7**. 49–55.

Поступила в редакцию
21.04.2018

A Special Variant of the Subdomain Method for Solving the Fredholm Integral Equations of the Second Kind

S. A. Solov'eva[1]

[1] *Kazan (Volga Region) Federal University, Naberezhnye Chelny Institute (Branch); prospekt Mira 68/19, Naberezhnye Chelny, 423810, Russia; Ph.D., Associate Professor, e-mail: solovjeva_sa@mail.ru*

Received April 21, 2018

Abstract: A special variant of the subdomain method based on Kantorovich polynomials is proposed and theoretically substantiated for the approximate solution of Fredholm integral equations of the second kind in the space of smooth functions.

Keywords: Fredholm integral equations of the second kind, space of smooth functions, approximate solutions, subdomain method, Kantorovich polynomials.

References

1. A. B. Samokhin and A. S. Samokhina, "3D Fredholm Integral Equations for Scattering by Dielectric Structures," Differ. Uravn. **52** (9), 1221–1230 (2016) [Differ. Equ. **52** (9), 1178–1187 (2016)].

2. D. A. Pozharskii, "A Strip Cut in a Composite Elastic Wedge," Prikl. Mat. Mekh. **80** (4), 489–495 (2016) [J. Appl. Math. Mech. **80** (4), 345–350 (2016)].

3. P. Malits, "The Static Reissner–Sagoci Problem for an Inhomogeneous Finite Cylinder," Quart. J. Mech. Appl. Math. **70** (4), 519–552 (2017).

4. I. H. Tayyar and B. Çolak, "Plane Wave Scattering by a Dielectric Loaded Slit in a Thick Impedance Screen," J. Electromagnet. Waves Appl. **31** (6), 604–626 (2017).

5. Y. Song, H. Hu, and J. W. Rudnicki, "Dynamic Stress Intensity Factor (Mode I) of a Permeable Penny-Shaped Crack in a Fluid-Saturated Poroelastic Solid," Int. J. Solids Struct. **110–111**, 127–136 (2017).

6. B. G. Gabdulkhaev, "A Note on the General Theory of Approximate Methods in Analysis," Uchen. Zap. Kazan. Univ. **125** (2), 18–31 (1965).

7. N. S. Gabbasov and I. P. Kasakina, "On the Numerical Solution of Integral Equations of the Second Kind in the Class of Smooth Functions," in *Proc. All-Russian Sci. Conf. on Mathematical Modeling and Boundary Value Problems, Samara, Russia, May 26–28, 2004* (Samara State Tech. Univ., Samara, 2004), Part 3, pp. 48–51.

8. S. A. Solov'eva, "On the Solution of Fredholm Integral Equations of the Second Kind," Nauch.-Tekh. Vestn. Povolzh'ya **1**, 37–40 (2014).

9. S. A. Solov'eva, "A Special Version of the Moments Method for Integral Fredholm Equations of the Second Kind," Nauka i Obrazovanie: Nauch. Izd. MGTU im. N.E. Baumana **8**, 239–251 (2015).

10. S. A. Solov'eva, "A Variant of the Collocation Method for the Fredholm Integral Equations of the Second Kind," Vychisl. Metody Programm. **18**, 187–191 (2017).

11. B. G. Gabdulkhaev, *Optimal Approximations of Solutions of Linear Problems* (Kazan Gos. Univ., Kazan, 1980) [in Russian].

12. N. S. Gabbasov, "The Collocation Method for Solving Integral Equations of the First Kind in the Class of Generalized Functions," Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved., Mat., No. 2, 12–20 (1993) [Russ. Math. **37** (2), 10–18 (1993)].

13. I. V. Uzhdavinis, "Convergence of a Subdomain-Type Method," Differ. Uravn. Primen., No. 1, 73–83 (1971).

14. N. S. Gabbasov, *Methods for Solving the Fredholm Integral Equations in the Space of Distributions* (Kazan Gos. Univ., Kazan, 2006) [in Russian].

15. N. S. Gabbasov and S. A. Solov'eva, "Special Version of the Subdomain Method for a Class of Integral Equations of the Third Kind in the Space of Distributions," Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved., Mat., No. 7, 49–55 (2014) [Russ. Math. **58** (7), 42–47 (2014)].