УДК 517.968.21 doi 10.26089/NumMet.v18r216

ОБ ОДНОМ ВАРИАНТЕ МЕТОДА КОЛЛОКАЦИИ ДЛЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ФРЕДГОЛЬМА ВТОРОГО РОДА

С. А. Соловьева[1]

Предложен и теоретически обоснован специальный вариант метода коллокации на базе полиномов Бернштейна приближенного решения интегральных уравнений Фредгольма второго рода в пространстве гладких функций.

Ключевые слова: интегральные уравнения Фредгольма второго рода, пространство гладких функций, приближенные решения, метод коллокации, полиномы Бернштейна.

Введение. Рассматривается линейное интегральное уравнение Фредгольма второго рода (ИУФВР)

$$x(t) + \int_0^1 K(t,s)x(s)\,ds = y(t), \tag{1}$$

где $t \in I = [0,1]$, $K(t,s) \in C^{(m)}\big(I^2\big)$, $y(t) \in C^{(m)}(I)$ — известные функции, а $x(t) \in C^{(m)}(I)$ — искомая функция. Уравнения вида (1) возникают при решении многих теоретических и прикладных задач (например, работы [1–6] и многие другие). Теория их точного и приближенного решений достаточно хорошо разработана. Полученные результаты содержатся, например, в справочных пособиях [7–8].

Вместе с тем, в работе [9] установлено, что классические проекционные методы приводят к более низкой скорости сходимости приближенных решений к точному по норме пространства гладких функций по сравнению с пространством непрерывных функций. В связи с этим разработка и теоретическое обоснование методов приближенного решения ИУФВР (1), учитывающих дифференциальные свойства исходных данных, является актуальной задачей.

В работах [10–12] предложены специальные варианты прямых проекционных методов, имеющих более высокую точность приближения в пространстве гладких функций по сравнению с соответствующими классическими методами. В частности, в работах [10, 11] разработаны варианты метода коллокации, а статья [12] посвящена методу моментов.

В настоящей статье предложен и теоретически обоснован в смысле [13, гл. 1] специальный вариант метода коллокации на основе полиномов Бернштейна в пространстве непрерывно дифференцируемых функций. При этом были использованы идеи и результаты работ [10–12, 14–18].

Первая часть статьи посвящена введению используемого функционального пространства и построению элементов теории приближения в нем, вторая — разработке метода приближенного решения уравнения (1), в третьей части установлены устойчивость и хорошая обусловленность предлагаемого метода.

1. Основное пространство. Пусть $C = C(I)$ — класс непрерывных на отрезке I функций с чебышевской нормой. Обозначим через $Y = C^{(m)}$ $\big(m \in \mathbb{N}\bigcup\{0\}\big)$ пространство m раз непрерывно дифференцируемых функций. Ясно, что $C^{(0)} = C$. Следуя [19], наделим это пространство нормой

$$\|y\|_Y = \|Dy\|_C + \sum_{i=0}^{m-1}\left|y^{(i)}(0)\right|, \quad y \in Y, \tag{2}$$

где $D\varphi = \varphi^{(m)}(t)$, $t \in Y$. Если $m = 0$, то $Dy = y$ и $\|y\|_Y = \|y\|_C$. Известно (например, [19]), что функции $y \in Y$ имеют вид

$$y = \Phi(t) + \sum_{i=0}^{m-1} c_i t^i, \tag{3}$$

где $\Phi(t) = (JDy)(t) \in Y$, $y \in Y$, $(J\varphi)(t) = \dfrac{1}{(m-1)!}\displaystyle\int_0^t (t-s)^{m-1}\varphi(s)\,ds$, $\varphi \in C$, $c_i = \dfrac{1}{i!}\,y^{(i)}(0)$, $i = \overline{0, m-1}$.

При $m = 0$ считаем, что $J\varphi = \varphi$. Кроме того, Y по норме (2) полно и вложено в C (см., например, [19]).

[1] Казанский (Приволжский) федеральный университет, Набережночелнинский институт (филиал), пр. Мира, 68/19, 423810, г. Набережные Челны; доцент, e-mail: solovjeva_sa@mail.ru

Обозначим через H_l множество многочленов степени не выше l.

Пусть линейный оператор $B_n^D = B_{n+m}^D : Y \to H_{n+m}$ определяется по закону

$$\big(B_n^D y\big)(t) = (JB_n Dy)(t) + \sum_{i=0}^{m-1} \frac{y^{(i)}(0)t^i}{i!}\,, \tag{4}$$

где $B_n : C \to H_n$ — оператор Бернштейна (например, [20], с. 22):

$$(B_n\varphi)(t) = \sum_{k=0}^{n} \varphi(\nu_k)\binom{n}{k} t^k(1-t)^{n-k}$$

по системе узлов

$$\nu_k = \nu_k^{(n)} = \frac{k}{n}\,, \quad k = \overline{0,n}. \tag{5}$$

Через $\displaystyle\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ обозначены биномиальные коэффициенты. Справедлива

Лемма. *Если $y \in Y$, то*

$$\big\|y - B_n^D y\big\|_Y = O\Big\{\omega\big(Dy; n^{-1/2}\big)\Big\}. \tag{6}$$

Доказательство. Учитывая (3), (4), (2) и оценку [20, с. 245]

$$\|\varphi - B_n\varphi\|_C = O\Big\{\omega\big(\varphi; n^{-1/2}\big)\Big\}, \tag{7}$$

получим

$$\big\|y - B_n^D y\big\|_Y = \|JDy - JB_nDy\|_Y = \|Dy - B_nDy\|_C = O\Big\{\omega\big(Dy; n^{-1/2}\big)\Big\}.$$

2. Специальный вариант метода коллокации (СВМК) на основе полиномов Бернштейна. Пусть в ИУФВР (1) исходные данные удовлетворяют условиям

$$g(t,s) = (D_tK)(t,s) \in C\big(I^2\big), \quad y \in Y,$$

а $x(t)$ — искомая функция вида (3).

Решение $x^*(t)$ уравнения (1) приближаем многочленом

$$x_n(t) = (Jz_n)(t) + \sum_{i=0}^{m-1} c_{n+1+i}t^i, \quad z_n(t) = \sum_{k=0}^{n} c_k\binom{n}{k} t^k(1-t)^{n-k}, \tag{8}$$

где коэффициенты c_i, $i = \overline{0, n+m}$, подлежат определению. Их, согласно предлагаемому методу, находим из системы уравнений

$$c_k = (Dy - DKx_n)(\nu_k), \quad k = \overline{0,n}, \qquad (Ax_n - y)^{(i)}(0) = 0, \quad i = \overline{0, m-1}, \tag{9}$$

где ν_k определяется по формуле (5).

Теорема 1. *Пусть уравнение* (1) *однозначно разрешимо при любой правой части $y \in Y$. Тогда при достаточно больших n приближенные решения $x_n^*(t)$, построенные на основе условий* (8) *и* (9), *существуют, единственны и сходятся по норме пространства Y к точному решению ИУФВР* (1) *со скоростью*

$$\|x^* - x_n^*\|_Y = O\Big\{\omega_t\big(g; n^{-1/2}\big) + \omega\big(Dy; n^{-1/2}\big)\Big\}. \tag{10}$$

Доказательство. ИУФВР (1) представим в виде операторного уравнения

$$Ax \equiv x + Kx = y, \quad x, y \in Y. \tag{11}$$

Обозначим через $Y_n \subset Y$ класс H_{n+m}. Тогда система (9) эквивалентна операторному уравнению вида

$$A_nx_n \equiv x_n + B_n^D Kx_n = B_n^D y, \quad x_n,\, B_n^D y \in Y_n. \tag{12}$$

Покажем это. Пусть x_n^* — решение уравнения (12), т.е. $B_n^D(Ax_n^* - y) \equiv 0$.

Учитывая (4), (3) и (8), последовательно получим

$$\big(JB_nD(Ax_n^*-y)\big)(t)+\sum_{i=0}^{m-1}(Ax_n^*-y)^{(i)}(0)\,\frac{t^i}{i!}\equiv 0,$$

$$\big(B_nD(x_n^*+Kx_n^*-y)\big)(t)\equiv 0,\quad (Ax_n^*-y)^{(i)}(0)=0,\quad i=\overline{0,m-1},$$

$$z_n^*=\big(B_nD(y-Kx_n^*)\big)(t),\quad (Ax_n^*-y)^{(i)}(0)=0,\quad i=\overline{0,m-1}. \tag{13}$$

В левой и правой частях первого уравнения системы (13) стоят многочлены Бернштейна. Следовательно, $c_k^*=\big(D(y-Kx_n^*)\big)(\nu_k),\ k=\overline{0,n}$. Таким образом, система (9) эквивалентна уравнению (12).

Убедимся теперь в близости операторов A и A_n. Учитывая (11), (12), (2), (4), (8) и (7), последовательно получим

$$\begin{aligned}\|Ax_n-A_nx_n\|_Y&=\big\|Kx_n-B_n^DKx_n\big\|_Y=\|DKx_n-B_nDKx_n\|_C=\\&=\max_{t\in I}\left|\int_0^1(g-B_ng)(t,s)(Jz_n)(s)\,ds+\sum_{i=0}^{m-1}c_{n+1+i}\int_0^1(g-B_ng)(t,s)s^i\,ds\right|=\\&=O\left\{\omega_t\big(g;n^{-1/2}\big)\left(\|z_n\|_C+\sum_{i=0}^{m-1}|c_{n+1+i}|\right)\right\}=O\Big\{\omega_t\big(g;n^{-1/2}\big)\|x_n\|_Y\Big\}.\end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\varepsilon^n\equiv\|A-A_n\|_{Y_n\to Y}=O\Big\{\omega_t\big(g;n^{-1/2}\big)\Big\}. \tag{14}$$

Утверждение доказываемой теоремы с оценкой (10) получаем из теоремы 7 [13, с. 19] на основании оценок (14) и (6).

Следствие. Если существуют ограниченные производные $g_t^{(r)}(t,s),\ (Dy)^{(r)}(t),\ 0\leqslant t,s\leqslant 1$, то в условиях теоремы

$$\begin{cases}\|x^*-x_n^*\|_Y=O\big(n^{-1/2}\big), & \text{если}\quad r=1,\\ \|x^*-x_n^*\|_Y=O\big(n^{-1}\big) & \text{при}\quad r\geqslant 2.\end{cases}$$

Замечание. При $m=0$ уравнение (1) превращается в уравнение Фредгольма второго рода в пространстве непрерывных функций, а предлагаемый метод — в известный вариант метода коллокации [14], причем $g(t,s)\equiv K(t,s),\ (Dy)(t)\equiv y(t)$. Поэтому полученная оценка (10) хорошо согласуется с оценкой [14] метода коллокации на базе полиномов Бернштейна.

3. Устойчивость и обусловленность СВМК.

Теорема 2. *В условиях теоремы* 1 *справедливы следующие утверждения:*

i) *СВМК устойчив относительно малых возмущений системы* (9);

ii) *пусть существуют числа обусловленности* η *для уравнения* (1), *тогда при достаточно больших* n *существуют числа обусловленности* η_n *приближенного уравнения* (12), *причем* $\eta_n\leqslant c\eta,\ 1\leqslant c\leqslant 1+\varepsilon,$ $\varepsilon>0,\ \lim\limits_{n\to\infty}\eta_n=\eta.$

Доказательство. Пусть выполняются условия теоремы 1. Тогда при достаточно больших n аппроксимирующие операторы A_n непрерывно обратимы и обратные операторы A_n^{-1} ограничены по норме в совокупности. Дальнейшее следует из теорем 11 и 13 [13, с. 22–25].

Заключение. В настоящей статье предложен вариант метода коллокации на базе полиномов Бернштейна, приспособленный к решению интегральных уравнений Фредгольма второго рода в пространстве гладких функций. Теоретическое обоснование метода основано на модификации общей теории приближенных методов анализа, разработанной Б.Г. Габдулхаевым. Получена оценка точности предлагаемого метода, которая хорошо согласуется с известной оценкой для уравнений Фредгольма второго рода в пространстве непрерывных функций. Кроме того, установлено, что разработанный метод является устойчивым и хорошо обусловленным. На базе идей и методов, примененных в данной работе, возможно дальнейшее развитие теории приближенных методов решения линейных интегральных уравнений Фредгольма второго рода в пространстве гладких функций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Самохин А.Б., Самохина А.С.* Объемные интегральные уравнения Фредгольма для задач рассеяния на диэлектрических структурах // Дифференц. уравнения. 2016. **52**, № 9. 1221–1230.
2. *Пожарский Д.А.* Полосовой разрез в составном упругом клине // Прикладная математика и механика. 2016. **80**, № 4. 489–495.
3. *Corona E., Greengard L., Rachh M., Veerapaneni S.* An integral equation formulation for rigid bodies in Stokes flow in three dimensions // Journal of Computational Physics. 2017. **332**. 504–519.
4. *Ильинский А.С., Галишникова Т.Н.* Интегральные уравнения для задачи дифракции плоской волны на границе раздела двух полупространств с локальной неоднородностью границы раздела // Дифференц. уравнения. 2015. **51**, № 9. 1220–1226.
5. *Zhong X.-C., Huang Q.-A.* Approximate solution of three-point boundary value problems for second-order ordinary differential equations with variable coefficients // Applied Mathematics and Computation. 2014. **247**. 18–29.
6. *Shodja H.M., Ahmadi S.F., Eskandari M.* Boussinesq Indentation of a transversely isotropic half-space reinforced by a buried inextensible membrane // Applied Mathematical Modelling. 2014. **38**, N 7–8. 2163–2172.
7. *Полянин А.Д., Манжиров А.В.* Справочник по интегральным уравнениям. М.: Физматлит, 2003.
8. *Верлань А.Ф., Сизиков В.С.* Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. Киев: Наукова думка, 1986.
9. *Габдулхаев Б.Г.* Заметка об общей теории приближенных методов анализа // Функциональный анализ и теория функций. Вып. 3. Учен. зап. Казан. ун-та. **125**, № 2. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1965. 18–31.
10. *Габбасов Н.С., Касакина И.П.* К численному решению интегральных уравнений второго рода в классе гладких функций // Труды Всерос. науч. конф. “Матем. моделирование и краевые задачи”. Ч. 3. “Дифференц. уравнения и краевые задачи”. Самара: Изд-во СамГТУ, 2004. 48–51.
11. *Соловьева С.А.* К вопросу о решении интегральных уравнений Фредгольма второго рода // Научно-технический вестник Поволжья. 2014. **1**. 37–40.
12. *Соловьева С.А.* Специальный вариант метода моментов для интегральных уравнений Фредгольма второго рода // Наука и образование: научное издание МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2015. **8**. 239–251.
13. *Габдулхаев Б.Г.* Оптимальные аппроксимации решений линейных задач. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1980.
14. *Каспшицкая М.Ф., Тукалевская Н.И.* К вопросу о сходимости метода коллокации // Укр. матем. журнал. 1967. **19**, № 4. 48–56.
15. *Габбасов Н.С.* Новые варианты метода коллокации для интегральных уравнений третьего рода // Матем. заметки. 1991. **50**. Вып. 2. 47–53.
16. *Габбасов Н.С.* Новые варианты метода коллокации для одного класса интегро-дифференциальных уравнений // Изв. вузов. Математика. 2001. **9**. 24–32.
17. *Габбасов Н.С.* Новые варианты метода коллокации для одного класса линейных уравнений с интегралом Адамара // Дифференц. уравнения. 2001. **37**, № 1. 91–96.
18. *Габбасов Н.С., Соловьева С.А.* О специальных вариантах метода коллокации для одного класса интегральных уравнений третьего рода // Изв. вузов. Математика. 2012. **8**. 27–33.
19. *Габбасов Н.С.* Коллокационный метод решения интегральных уравнений первого рода в классе обобщенных функций // Изв. вузов. Математика. 1993. **2**. 12–20.
20. *Натансон И.П.* Конструктивная теория функций. Л.: Гостехиздат, 1949.

Поступила в редакцию
12.03.2017

A Variant of the Collocation Method for the Fredholm Integral Equations of the Second Kind

S. A. Solov’eva[1]

[1] *Kazan (Volga Region) Federal University, Naberezhnye Chelny Institute (Branch); prospekt Mira 68/19, Naberezhnye Chelny, 423810, Russia; Ph.D., Associate Professor, e-mail: solovjeva_sa@mail.ru*

Received March 12, 2017

Abstract: A special variant of the collocation method based on Bernstein polynomials is proposed and theoretically substantiated for the approximate solution of Fredholm integral equations of the second kind in the space of smooth functions.

Keywords: Fredholm integral equations of the second kind, space of smooth functions, approximate solutions, collocation method, Bernstein polynomials.

References

1. A. B. Samokhin and A. S. Samokhina, "3D Fredholm Integral Equations for Scattering by Dielectric Structures," Differ. Uravn. **52** (9), 1221–1230 (2016) [Differ. Equ. **52** (9), 1178–1187 (2016)].

2. D. A. Pozharskii, "A Strip Cut in a Composite Elastic Wedge," Prikl. Mat. Mekh. **80** (4), 489–495 (2016) [J. Appl. Math. Mech. **80** (4), 345–350 (2016)].

3. E. Corona, L. Greengard, M. Rachh, and S. Veerapaneni, "An Integral Equation Formulation for Rigid Bodies in Stokes Flow in Three Dimensions," J. Comput. Phys. **332**, 504–519 (2017).

4. A. S. Il'inskii and T. N. Galishnikova, "Integral Equations for the Problem on the Diffraction of a Plane Wave on the Interface between Two Half-Spaces with a Local Inhomogeneity of the Interface," Differ. Uravn. **51** (9), 1220–1226 (2015) [Differ. Equ. **51** (9), 1211–1218 (2015)].

5. X.-C. Zhong and Q.-A. Huang, "Approximate Solution of Three-Point Boundary Value Problems for Second-Order Ordinary Differential Equations with Variable Coefficients," Appl. Math. Comput. **247**, 18–29 (2014).

6. H. M. Shodja, S. F. Ahmadi, and M. Eskandari, "Boussinesq Indentation of a Transversely Isotropic Half-Space Reinforced by a Buried Inextensible Membrane," Appl. Math. Model. **38** (7–8), 2163–2172 (2014).

7. A. D. Polyanin and A. V. Manzhirov, *Handbook of Integral Equations* (Fizmatlit, Moscow, 2003; CRC Press, Boca Raton, 2008).

8. A. F. Verlan' and V. S. Sizikov, *Integral Equations: Methods, Algorithms, and Programs* (Naukova Dumka, Kiev, 1986) [in Russian].

9. B. G. Gabdulkhaev, "A Note on the General Theory of Approximate Methods in Analysis," Uchen. Zap. Kazan. Univ. **125** (2), 18–31 (1965).

10. N. S. Gabbasov and I. P. Kasakina, "On the Numerical Solution of Integral Equations of the Second Kind in the Class of Smooth Functions," in *Proc. All-Russian Sci. Conf. on Mathematical Modeling and Boundary Value Problems, Samara, Russia, May 26–28, 2004* (Samara State Tech. Univ., Samara, 2004), Part 3, pp. 48–51.

11. S. A. Solov'eva, "On the Solution of Fredholm Integral Equations of the Second Kind," Nauch.-Tekh. Vestn. Povolzh'ya **1**, 37–40 (2014).

12. S. A. Solov'eva, "A Special Version of the Moments Method for Integral Fredholm Equations of the Second Kind," Nauka i Obrazovanie: Nauch. Izd. MGTU im. N.E. Baumana **8**, 239–251 (2015).

13. B.G. Gabdulkhaev, *Optimal Approximations of Solutions of Linear Problems* (Kazan Gos. Univ., Kazan, 1980) [in Russian].

14. M. F. Kaspshitckaia and N. I. Tukalevskaia, "Concerning the Convergence of the Collocation Method," Ukrain. Matem. Zh. **19** (4), 48–56 (1967).

15. N. S. Gabbasov, "New Variants of the Collocation Method for Integral Equations of the Third Kind," Mat. Zametki **50** (2), 47–53 (1991) [Math. Notes **50** (2), 802–806 (1991)].

16. N. S. Gabbasov, "New Versions of the Collocation Method for a Class of Integrodifferential Equations," Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved., Mat., No. 9, 24–32 (2001) [Russ. Math. **45** (9), 21–29 (2001)].

17. N. S. Gabbasov, "New Modifications of the Collocation Method for a Class of Linear Equations with a Hadamard Integral," Differ. Uravn. **37** (1), 91–96 (2001) [Differ. Equ. **37** (1), 100–106 (2001)].

18. N. S. Gabbasov and S. A. Solov'eva, "Special Versions of the Collocation Method for a Class of Integral Equations of the Third Kind," Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved., Mat., No. 8, 27–33 (2012) [Russ. Math. **56** (8), 22–27 (2012)].

19. N. S. Gabbasov, "The Collocation Method for Solving Integral Equations of the First Kind in the Class of Generalized Functions," Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved., Mat., No. 2, 12–20 (1993) [Russ. Math. **37** (2), 10–18 (1993)].

20. I. P. Natanson, *Constructive Function Theory* (Gostekhizdat, Leningrad, 1949; Ungar, New York, 1964).