УДК 519.62 doi 10.26089/NumMet.v18r214

К ВОПРОСУ О РАЗРЕШИМОСТИ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ОТНОСИТЕЛЬНО КОЭФФИЦИЕНТОВ ФУРЬЕ–ЧЕБЫШЁВА В ЗАДАЧЕ РЕШЕНИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА ОСНОВЕ РЯДОВ ЧЕБЫШЁВА

О. Б. Арушанян[1], С. Ф. Залеткин[2]

Сформулирована и доказана теорема о разрешимости нелинейной системы уравнений относительно приближенных значений коэффициентов Фурье–Чебышёва. Теорема является теоретическим обоснованием ранее предложенного численно-аналитического метода интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений с использованием рядов Чебышёва.

Ключевые слова: обыкновенные дифференциальные уравнения, приближенные аналитические методы, численные методы, ортогональные разложения, смещенные ряды Чебышёва, квадратурные формулы Маркова.

Рассматривается задача Коши для нормальной системы M обыкновенных дифференциальных уравнений

$$y' = f(x,y), \qquad y(x_0) = y_0, \qquad x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + X, \tag{1}$$

при условии, что функция $f(x,y)$ непрерывна в области D определения системы вместе с частными производными до требуемого порядка. Предполагается также, что на отрезке $[x_0,\, x_0+X]$ задача Коши (1) имеет единственное решение.

В работах [1, 2] предложен приближенный метод решения задачи (1), основанный на разложении правой части системы

$$y'(x) = f\bigl(x, y(x)\bigr) = f\bigl(x_0+\alpha h,\, y(x_0+\alpha h)\bigr) = \Phi(\alpha), \qquad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1, \qquad h \leqslant X,$$

на частичном отрезке $[x_0,\, x_0+h]$ в ряд по смещенным многочленам Чебышёва первого рода (смещенный ряд Чебышёва):

$$\Phi(\alpha) = {\sum_{i=0}^{\infty}}' a_i^*[\Phi] T_i^*(\alpha), \qquad a_i^*[\Phi] = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^1 \frac{\Phi(\alpha) T_i^*(\alpha)}{\sqrt{\alpha(1-\alpha)}}\, d\alpha, \qquad T_i^*(\alpha) = T_i(2\alpha-1). \tag{2}$$

Здесь штрих у знака суммы означает, что слагаемое с индексом 0 берется с дополнительным множителем $1/2$, и $T_i(t)$ — многочлен Чебышёва на отрезке $[-1,\,1]$. Если коэффициенты этого разложения (коэффициенты Чебышёва) известны, то решение задачи (1) можно легко получить также в виде смещенного ряда Чебышёва

$$y(x_0+\alpha h) = {\sum_{i=0}^{\infty}}' a_i^*[y] T_i^*(\alpha), \qquad a_i^*[y] = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^1 \frac{y(x_0+\alpha h) T_i^*(\alpha)}{\sqrt{\alpha(1-\alpha)}}\, d\alpha. \tag{3}$$

Из допущения о гладкости правой части в (1) следует равномерная сходимость рядов (2), (3) на $[x_0,\, x_0+h]$. Замена рядов (2), (3) их частичными суммами k-го и $(k+1)$-го порядков соответственно, применение формулы численного интегрирования Маркова [1] с узлами $\alpha_0^{(1)} = 0$, $\alpha_j^{(1)} = \dfrac{1}{2}\left(1+\cos\dfrac{(2j-1)\pi}{2k+1}\right)$, $j=1,\dots,k$, и весовой функцией $\dfrac{1}{\sqrt{\alpha(1-\alpha)}}$ для вычисления интеграла $a_i^*[\Phi]$ в (2) и использование связи между коэффициентами Чебышёва решения и коэффициентами Чебышёва его производной

$$a_i^*\bigl[y(x_0+\alpha h)\bigr] = \frac{h}{4i}\left(a_{i-1}^*[\Phi] - a_{i+1}^*[\Phi]\right), \qquad i>0, \tag{4}$$

---

[1] Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Научно-исследовательский вычислительный центр, Ленинские горы, 119992, Москва; зав. лабораторией, e-mail: arush@srcc.msu.ru

[2] Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Научно-исследовательский вычислительный центр, Ленинские горы, 119992, Москва; ст. науч. сотр., e-mail: iraz@srcc.msu.ru

$$\frac{1}{2}\,a_0^*\big[y(x_0+\alpha h)\big] = y_0 + \frac{h}{4}\left(a_0^*[\Phi] - \frac{1}{2}\,a_1^*[\Phi]\right) - \frac{h}{2}\sum_{j=2}^{\infty}\frac{(-1)^j}{j^2-1}\,a_j^*[\Phi] \tag{5}$$

приводят к следующей системе уравнений для приближенных значений $a_i^*[\tilde{P}_k] \approx a_i^*[\Phi]$, $i = 0, \ldots, k$, коэффициентов Чебышёва правой части системы (1):

$$a_i^*[\tilde{P}_k] = \frac{4}{2k+1}\sum_{j=0}^{k}{}' f\big(x_0 + \alpha_j^{(1)}h, U(x_0+\alpha_j^{(1)}h; a_0^*[\tilde{P}_k], \ldots, a_k^*[\tilde{P}_k])\big)T_i^*(\alpha_j^{(1)}) \quad i = 0, \ldots, k. \tag{6}$$

Использование квадратурной формулы Маркова с узлами $\alpha_0^{(2)} = 0$, $\alpha_j^{(2)} = \dfrac{1}{2}\Big(1+\cos\dfrac{j\pi}{k+1}\Big)$, $j = 1, \ldots, k$, $\alpha_{k+1}^{(2)} = 1$ позволяет привести соответствующую систему уравнений к виду

$$a_i^*[\tilde{P}_k] = \frac{2}{k+1}\sum_{j=0}^{k+1}{}'' f\big(x_0 + \alpha_j^{(2)}h, U(x_0+\alpha_j^{(2)}h; a_0^*[\tilde{P}_k], \ldots, \tilde{a}_k[\tilde{P}_k])\big)T_i^*(\alpha_j^{(2)}), \quad i = 0, \ldots, k. \tag{7}$$

Здесь два штриха у знака суммы означают, что слагаемые с индексами 0 и $k+1$ берутся с дополнительным множителем 1/2, и $U\big(x_0+\alpha h; a_0^*[\tilde{P}_k], \ldots, a_k^*[\tilde{P}_k]\big) = \sum\limits_{l=0}^{k+1}{}' a_l^*[U]T_l^*(\alpha)$. Коэффициенты $a_l^*[U]$ приближенного решения $U(x)$ вычисляются с помощью соотношений (4) при $l = 1, \ldots, k+1$ и (5) при $l = 0$, в левых частях которых надо y заменить на U, а в правых частях необходимо $a_q^*[\Phi]$ поменять на $a_q^*[\tilde{P}_k]$ при $q \leqslant k$ и на 0 при $q > k$. Обе системы (6) и (7) могут быть записаны в виде

$$a_i^*[\tilde{P}_k] = \varphi_i\big(a_0^*[\tilde{P}_k], a_1^*[\tilde{P}_k], \ldots, a_k^*[\tilde{P}_k]\big), \quad i = 0, 1, \ldots, k, \tag{8}$$

где φ_i — правая часть в (6) или (7). При этом для вектор-функции φ_i справедливо следующее соотношение: частная производная l-й компоненты функции φ_i по n-й компоненте коэффициента $a_m^*[\tilde{P}_k]$ имеет порядок относительно h, равный $\dfrac{\partial\varphi_{li}}{\partial a_{nm}} = O(h)$, $h \to 0$. Отсюда следует, что если h выбрать достаточно малым, то какая-нибудь норма матрицы, составленной из максимальных (в области изменения переменных) значений модулей частных производных $\left|\dfrac{\partial\varphi_{li}}{\partial a_{nm}}\right|$, станет меньше единицы.

В работе [1] показано, что невязка ρ_i, которая получается при подстановке в (8) точных значений коэффициентов Чебышёва правой части $\Phi(\alpha)$ уравнения (1) вместо $a_r^*[\tilde{P}_k]$, имеет порядок относительно h, равный

$$\rho_i = a_i^*[\Phi] - \varphi_i\big(a_0^*[\Phi], \ldots, a_k^*[\Phi]\big) = O(h^{k+s}), \quad h \to 0, \tag{9}$$

где $s = 1$ и $s = 2$ в зависимости от используемой квадратурной формулы Маркова, а именно: $s = 1$ для системы (6) и $s = 2$ для системы (7), при этом предполагается, что $f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные по x и y до порядка $2k + s$ включительно.

В [2] описаны два способа построения двух приближений $a_i^{*(0)}[\tilde{P}_k]$, $i = 0, \ldots, k$, к коэффициентам $a_0^*[\Phi], \ldots, a_k^*[\Phi]$, одно из которых имеет погрешность

$$a_i^*[\Phi] - a_i^{*(0)}[\tilde{P}_k] = O(h^2), \quad i = 0, 1, \ldots, k, \quad \text{при} \quad h \to 0, \tag{10}$$

а другое — погрешность

$$a_i^*[\Phi] - a_i^{*(0)}[\tilde{P}_k] = O(h^{i+1}), \quad i = 0, 1, \ldots, k, \quad \text{при} \quad h \to 0. \tag{11}$$

Будем рассматривать совокупность первых $k+1$ коэффициентов Чебышёва $a_0^*[\Phi], \ldots, a_k^*[\Phi]$ функции $\Phi(\alpha)$ как точку z_0 в $M(k+1)$-мерном арифметическом пространстве $R^{M(k+1)}$:

$$z_0 = \big(a_0^*[\Phi], \ldots, a_k^*[\Phi]\big) = \big(a_{10}^*[\Phi], \ldots, a_{M0}^*[\Phi], \ldots, a_{1k}^*[\Phi], \ldots, a_{Mk}^*[\Phi]\big), \quad z_0 \in R^{M(k+1)}.$$

Обозначим через G окрестность точки z_0 радиуса r, т.е. множество всех точек данного пространства

$$z = (a_0, a_1, \ldots, a_k) = (a_{10}, \ldots, a_{M0}, a_{11}, \ldots, a_{M1}, \ldots, a_{1k}, \ldots, a_{Mk}), \quad z \in R^{M(k+1)},$$

для которых $\rho(z, z_0) = ||z - z_0||_\infty \leqslant r$, где r — некоторое число, от h не зависящее. Пусть z — произвольная точка области $G : z \in G$. Обозначим через $a_i^*[U](a_0, a_1, \dots, a_k)$ коэффициенты Чебышёва функции $U(x) = U(x_0 + \alpha h)$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, на $[x_0,\, x_0 + h]$, вычисляемые через величины $a_0, a_1, \dots, a_k$ по описанному выше правилу, т.е. по формулам (4), (5), в левых частях которых надо y заменить на U, в правых частях $a_q^*[\Phi]$ поменять на a_q при $0 \leqslant q \leqslant k$, а все остальные $a_q^*[\Phi]$, $q > k$, заменить нулями.

Сформулируем следующее предложение, содержащее условия, при которых нелинейная система уравнений (8), которую мы запишем в виде

$$a_i = \varphi_i(a_0, \dots, a_k), \qquad i = 0, \dots, k, \tag{12}$$

имеет единственное решение.

Теорема. *Пусть выполняются перечисленные ниже условия.*

1) *Для всех точек $z \in G(\rho(z, z_0) \leqslant r)$ и для всех h, меньших некоторого значения h_1: $0 < h < h_1$, $h_1 \leqslant X$, линейные комбинации вида*

$$U(x) = U(x_0 + \alpha h) = \sum_{l=0}^{k+1}{}' a_l^*[U](a_0, \dots, a_k) T_l^*(\alpha), \qquad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1,$$

входящие в качестве второго аргумента функции $f(x, y)$ в (6) и (7), принимают на отрезке $[x_0, x_0 + h]$ значения, принадлежащие области D определения функции $f(x, y)$.

2) *При всех h, меньших некоторого значения $h_2 : 0 < h < h_2$, норма $K = ||Q||_\infty$ матрицы Q, составленной из максимальных (в области изменения переменных) значений модулей частных производных $\left|\dfrac{\partial \varphi_{li}}{\partial a_{nm}}\right|$ (имеющих порядок $O(h)$ относительно h; $l, n = 1, \dots, M$; $i, m = 0, \dots, k$), меньше единицы.*

3) *При всех h, меньших некоторого значения $h_3 : 0 < h < h_3$, мажорантная оценка $O(h^{k+s})$ невязки ρ_i в (9) настолько мала, что выполняется неравенство*

$$||\varphi(z_0) - z_0||_\infty < (1 - K)r, \qquad \varphi(z_0) = \bigl(\varphi_0(z_0), \dots, \varphi_k(z_0)\bigr).$$

4) *При всех h, меньших некоторого значения $h_4 : 0 < h < h_4$, мажорантная оценка (10) или (11) погрешности начального приближения $a_i^{*(0)}[\tilde{P}_k]$, $i = 0, \dots, k$, настолько мала, что выполняется неравенство*

$$\rho(z_0, z^{(0)}) \leqslant r, \qquad z^{(0)} = \bigl(a_0^{*(0)}[\tilde{P}_k], \dots, a_k^{*(0)}[\tilde{P}_k]\bigr).$$

Тогда существует такое значение $h_0 > 0$, а именно: $h_0 = \min\{h_1, h_2, h_3, h_4\}$, что при всех $h : 0 < h \leqslant h_0$ для задачи Коши (1), рассматриваемой на частичном отрезке $[x_0,\, x_0 + h]$, система уравнений (12) относительно приближенных значений коэффициентов Чебышёва функции $\Phi(\alpha)$ имеет в области $G\{\rho(z, z_0) \leqslant r\}$ единственное решение $z = \bigl(a_0^*[\tilde{P}_k], \dots, a_k^*[\tilde{P}_k]\bigr)$, которое можно получить методом простых итераций как предел последовательности

$$a_i^{*(\nu+1)}[\tilde{P}_k] = \varphi_i\bigl(a_0^{*(\nu)}[\tilde{P}_k], \dots, a_k^{*(\nu)}[\tilde{P}_k]\bigr), \qquad i = 0, 1, \dots, k, \qquad \nu = 0, 1, \dots,$$

исходя из начального приближения $a_0^{*(0)}[\tilde{P}_k], \dots, a_k^{*(0)}[\tilde{P}_k]$.

Доказательство. Так как $h \in (0, h_0]$, то все четыре условия теоремы выполняются одновременно при одном и том же значении h. К системе уравнений (12) относительно неизвестных приближенных значений коэффициентов Чебышёва функции $\Phi(\alpha)$ можно применить уточненный принцип сжатых отображений [3]. Действительно, в области $G\{\rho(z, z_0) \leqslant r\}$, где $z_0 = \bigl(a_0^*[\Phi], \dots, a_k^*[\Phi]\bigr)$ — фиксированная точка пространства $R^{M(k+1)}$, система функций $\varphi_i(a_0, \dots, a_k)$, $i = 0, \dots, k$, определена и удовлетворяет условию Липшица с константой $K < 1$ (в силу первого и второго условий). В точке z_0 выполняется неравенство

$$\rho\bigl(\varphi(z_0), z_0\bigr) < (1 - K)\, r, \qquad \rho\bigl(\varphi(z_0), z_0\bigr) = ||\varphi(z_0) - z_0||_\infty$$

(в силу третьего условия). Начальное приближение $z^{(0)}$ принадлежит области G (в силу четвертого условия). Теперь заключение теоремы непосредственно следует из уточненного принципа сжатых отображений [3], применяемого как для исследования сходимости итерационных методов, так и для доказательства существования корня уравнения.

Эту теорему можно распространить на произвольный частичный сегмент из интервала $[x_0,\, x_0 + X]$ существования решения задачи Коши (1) заменой x_0 на x_n, а $x_0 + h$ на $x_n + h$, т.е. заменой сегмента $[x_0,\, x_1]$ на сегмент $[x_n,\, x_{n+1}]$.

Пример. Интегрируется система нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$y_1' = \frac{x}{y_2}, \quad y_2' = -\frac{x}{y_1}, \quad y_1(0) = 3, \quad y_2(0) = \frac{1}{6}, \quad 0 \leqslant x \leqslant x_f, \quad x_f = 3\sqrt{2}. \tag{13}$$

Компонента $y_1(x)$ решения имеет большую производную, так как представляет собой быстро растущую функцию $y_1(x) = 3e^{x^2}$, вторая компонента решения $y_2(x) = \frac{1}{6}e^{-x^2}$. Для системы (13) задавалось разбиение промежутка интегрирования $[0, x_f]$ на несколько частичных сегментов длиной $h \leqslant x_f$, и на каждом таком сегменте решение представлялось в виде $(k+1)$-й частичной суммы смещенного ряда Чебышёва при $k = 25$. Вычисления проводились с 15–16 значащими цифрами. Число частичных сегментов длиной h, на которые разбивался отрезок интегрирования (число шагов N_h), значения h, относительные погрешности δ_1 и δ_2 приближенных значений $y_1(x_f)$ и $y_2(x_f)$, вычисленных в конце промежутка интегрирования x_f, а также количество вычислений N_f правой части системы (13) приведены в табл. 1.

Таблица 1

№	N_h	h	δ_1	δ_2	N_f
1	43	0,1	$0{,}90 \times 10^{-15}$	$0{,}11 \times 10^{-14}$	34 468
2	29	0,15	$-0{,}15 \times 10^{-14}$	$0{,}48 \times 10^{-15}$	23 954
3	22	0,2	$0{,}22 \times 10^{-14}$	$-0{,}30 \times 10^{-14}$	17 647
4	17	0,25	$0{,}90 \times 10^{-15}$	$-0{,}37 \times 10^{-14}$	14 492
5	15	0,3	$-0{,}46 \times 10^{-14}$	$0{,}26 \times 10^{-14}$	13 890
6	11	0,4	0	$0{,}11 \times 10^{-13}$	11 036
7	10	0,45	$-0{,}41 \times 10^{-13}$	$0{,}66 \times 10^{-14}$	9260
8	9	0,5	$-0{,}51 \times 10^{-14}$	$0{,}71 \times 10^{-13}$	9 484
9	8	0,55	$0{,}20 \times 10^{-13}$	$-0{,}66 \times 10^{-13}$	8208
10	8	0,6	$-0{,}14 \times 10^{-13}$	$-0{,}70 \times 10^{-12}$	9233
11	7	0,65	$-0{,}47 \times 10^{-12}$	$0{,}50 \times 10^{-12}$	8932
12	7	0,7	$0{,}36 \times 10^{-12}$	$-0{,}18 \times 10^{-12}$	11 932
13	6	0,8	$-0{,}50 \times 10^{-12}$	$-0{,}56 \times 10^{-12}$	12 631

При увеличении длины частичного сегмента h от 0,1 до 0,8 относительные погрешности δ_1 и δ_2 приближенных значений решения хотя несколько и возрастают по модулю, но остаются малыми величинами с десятичными порядками от 10^{-15} до 10^{-12}, что соответствует количеству верных цифр в полученных значениях $y_1(x_f)$ и $y_2(x_f)$ приближенного решения от 15 до 12. При $h = 0{,}4$ в вычисленном значении первой компоненты решения $y_1(x_f)$ вообще все 16 цифр оказались верными: $y_1(x_f) = 196979907{,}4119908$. При этом разбиение интервала интегрирования состоит из 11 частичных сегментов. В табл. 1 этому случаю соответствует относительная погрешность δ_1, равная нулю (с точностью до ошибок округления).

На каждом частичном сегменте, входящем в указанные разбиения промежутка интегрирования, приближенное решение описывается частичной суммой с быстроубывающими коэффициентами. Каждая такая сумма не только представляет собой многочлен наилучшего среднеквадратичного приближения для $y(x)$ на этом сегменте, но и является многочленом, близким к многочлену наилучшего равномерного приближения для $y(x)$ на нем.

В табл. 2 приведены результаты интегрирования задачи (13), полученные одношаговыми методами Фельберга и Ингленда пятого порядка точности [4, 5] с автоматическим выбором шага и многозначным методом Гира с автоматическим выбором шага и переменным порядком (максимально допустимый порядок равен семи) [6].

Таблица 2

Метод	δ_1	δ_2	N_h	N_f
Фельберга	$0{,}44 \times 10^{-12}$	$-0{,}46 \times 10^{-12}$	8432	50 637
Ингленда	$0{,}86 \times 10^{-12}$	$-0{,}84 \times 10^{-12}$	34 284	211 932
Гира	$0{,}78 \times 10^{-13}$	$-0{,}12 \times 10^{-12}$	1684	4498

Во втором и третьем столбцах этой таблицы показаны относительные погрешности δ_1 и δ_2 приближенных значений компонент решения $y_1(x_f)$, $y_2(x_f)$, отвечающие наилучшей фактически достигнутой точности в точке x_f. В четвертом и пятом столбцах даны число выполненных шагов N_h и количество обращений N_f к правой части системы, использованных для достижения такой точности.

Из приведенных таблиц следует, что точность приближенного решения в точке x_f, полученная методом рядов Чебышёва, на один, два или три порядка превосходит наилучшую точность, достигнутую в x_f всеми указанными здесь численными методами (см., например, строки 1–9 табл. 1). При этом методом рядов было использовано значительно меньшее число шагов и существенно меньшее количество обращений к правой части системы (13), чем методами Фельберга и Ингленда. Хотя методом Гира наилучшая точность достигнута при $N_f = 4498$, в методе рядов такая точность (даже несколько более высокая) получена при $N_f = 8208$ всего за 8 шагов вместо 1684 шага в методе Гира.

Увеличение точности приближенного решения, которое может быть получено методом рядов Чебышёва с использованием значительно меньшего числа шагов и количества обращений к правой части системы (1), наблюдается и для других тестовых задач при сравнении метода рядов с иными методами численного интегрирования дифференциальных уравнений, включая классический метод Рунге–Кутта, метод Мерсона, многошаговые методы Адамса и Штермера [2, 7, 8].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Арушанян О.Б., Залеткин С.Ф.* Приближенное решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений методом рядов Чебышёва // Вычислительные методы и программирование. 2016. **17**. 121–131.
2. *Арушанян О.Б., Волченскова Н.И., Залеткин С.Ф.* Вычисление коэффициентов разложения решения задачи Коши в ряд по многочленам Чебышёва // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. 2012. № 5. 24–30.
3. *Березин И.С., Жидков Н.П.* Методы вычислений. Т.2. М.: Физматгиз, 1962.
4. *Хайрер Э., Нёрсетт С., Ваннер Г.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. М.: Мир, 1990.
5. *England R.* Error estimates for Runge–Kutta type solutions to systems of ordinary differential equations // The Computer Journal. 1969. **12**, N 2. 166–170.
6. *Gear C.W.* Numerical initial value problems in ordinary differential equations. Englewood Cliffs: Prentice Hall. 1971.
7. *Арушанян О.Б., Волченскова Н.И., Залеткин С.Ф.* О применении рядов Чебышёва к интегрированию обыкновенных дифференциальных уравнений с быстрорастущими решениями // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. 2015. № 5. 57–60.
8. *Арушанян О.Б., Волченскова Н.И., Залеткин С.Ф.* Приближенное решение обыкновенных дифференциальных уравнений с использованием рядов Чебышева // Сибирские электронные математические известия. 2010. **7**. 122–131.

Поступила в редакцию
25.02.2017

On Solvability of a Nonlinear System of Equations for the Fourier–Chebyshev Coefficients in the Problem of Solving Ordinary Differential Equations Using Chebyshev Series

O. B. Arushanyan[1] **and S. F. Zaletkin**[2]

[1] *Research Computing Center, Lomonosov Moscow State University; Leninskie Gory, Moscow, 119992, Russia; Dr. Sci., Professor, Head of Laboratory, e-mail: arush@srcc.msu.ru*

[2] *Research Computing Center, Lomonosov Moscow State University; Leninskie Gory, Moscow, 119992, Russia; Ph.D., Senior Scientist, e-mail: iraz@srcc.msu.ru*

Received February 25, 2017

Abstract: A solvability theorem for a nonlinear system of equations with respect to approximate values of Fourier–Chebyshev coefficients is formulated and proved. This theorem is a theoretical substantiation for the previously proposed numerical-analytical method of solving ordinary differential equations using Chebyshev series.

Keywords: ordinary differential equations, approximate analytical methods, numerical methods, orthogonal expansions, shifted Chebyshev series, Markov's quadrature formulas.

References

1. O. B. Arushanyan and S. F. Zaletkin, “Approximate Solution of the Cauchy Problem for Ordinary Differential Equations by the Method of Chebyshev Series,” Vychisl. Metody Programm. **17**, 121–131 (2016).

2. O. B. Arushanyan, N. I. Volchenskova, and S. F. Zaletkin, “Calculation of Expansion Coefficients of Series in Chebyshev Polynomials for a Solution to a Cauchy Problem,” Vestn. Mosk. Univ., Ser. 1: Mat. Mekh., No. 5, 24–30 (2012) [Moscow Univ. Math. Bull. **67** (5–6), 211–216 (2012)].

3. I. S. Berezin and N. P. Zhidkov, *Computing Methods* (Fizmatgiz, Moscow, 1962; Pergamon, Oxford, 1965).

4. E. Hairer, S. P. Nörsett, and G. Wanner, *Solving Ordinary Differential Equations. I. Nonstiff Problems* (Springer, Berlin, 1987; Mir, Moscow, 1990).

5. R. England, “Error Estimates for Runge–Kutta Type Solutions to Systems of Ordinary Differential Equations,” Comput. J. **12** (2), 166–170 (1969).

6. C. W. Gear, *Numerical Initial Value Problems in Ordinary Differential Equations* (Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1971).

7. O. B. Arushanyan, N. I. Volchenskova, and S. F. Zaletkin, “Application of Chebyshev Series to Integration of Ordinary Differential Equations with Rapidly Growing Solutions,” Vestn. Mosk. Univ., Ser. 1: Mat. Mekh., No. 5, 57–60 (2015) [Moscow Univ. Math. Bull. **70** (5), 237–240 (2015)].

8. O. B. Arushanyan, N. I. Volchenskova, and S. F. Zaletkin, “Approximate Solution of Ordinary Differential Equations Using Chebyshev Series,” Sib. Elektron. Mat. Izv. **7**, 122–131 (2010).