

УДК 519:63.4:532.51.5

doi 10.26089/NumMet.v18r107

О КОМБИНИРОВАНИИ СПОСОБОВ УСКОРЕНИЯ СХОДИМОСТИ ИТЕРАЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ ПРИ ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ–СТОКСА

Е. В. Ворожцов¹, В. П. Шапеев^{2,3}

Рассматривается проблема ускорения итерационного процесса численного решения методом коллокаций и наименьших невязок (КНН) краевых задач для уравнений с частными производными. Для ее решения в методе КНН предложено применять одновременно три способа ускорения итерационного процесса: предобуславливатель, многосеточный алгоритм и метод Крылова. Исследован двухпараметрический предобуславливатель. Предложено находить оптимальные значения его параметров путем численного решения относительно нетрудоемкой задачи минимизации числа обусловленности системы линейных алгебраических уравнений приближенной задачи. Использование найденного предобуславливателя существенно ускоряет итерационный процесс. Исследовано влияние на итерационный процесс всех трех способов его ускорения: каждого по отдельности, а также при их комбинированном применении. При этом наибольший вклад дает применение алгоритма, использующего подпространства Крылова. Комбинированное применение одновременно всех трех способов ускорения итерационного процесса решения краевых задач для двумерных уравнений Навье–Стокса уменьшило время их решения на компьютере до 160 раз по сравнению со случаем, когда ни один из них не применялся. Предложенная комбинация способов ускорения итерационных процессов может быть реализована также в рамках применения других численных методов решения уравнений с частными производными.

Ключевые слова: предобуславливание, подпространства Крылова, многосеточные алгоритмы, итерации Гаусса–Зейделя, уравнения Навье–Стокса, метод коллокаций и наименьших невязок.

1. Введение. В последние десятилетия наблюдается бурное развитие математических методов моделирования и прежде всего численного моделирования. Оно используется во все возрастающем объеме как в традиционных для него областях физики и техники, так и в связанных с экономикой, биологией и с новыми технологиями. Большое разнообразие моделируемых явлений и процессов, сложности и особенности в возникающих при этом математических задачах предъявляют повышенные требования к свойствам и возможностям численных методов и алгоритмов, стимулируют поиск новых, с лучшими свойствами, чем у появившихся ранее. От численных методов, в частности, требуется решать задачи точнее и быстрее, несмотря на сложность новых задач и содержащиеся в них другие трудности. Для этого предлагаются новые подходы и методы. При этом не последнюю роль играет идея комбинированного применения уже известных алгоритмов. Зачастую применение комбинированного алгоритма эффективнее по сравнению с применением поотдельности его компонент. Многие исследователи в этом направлении ведут поиск.

Решение уравнений с частными производными (PDE, Partial Differential Equations) различными численными методами сводится к решению систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). При этом стремление достичь большей точности решения приводит к необходимости решать СЛАУ больших размеров. Для решения последних приходится применять итерационные методы. Поэтому оптимизация итерационных процессов и, прежде всего, их ускорение — актуальная задача вычислительной математики, которой многие исследователи уделяют особое внимание.

В частности, в работе [1] описан итерационный метод Ньютона–Крылова, который применяется для исследования гидродинамической устойчивости вихрей Тейлора в задаче Куэтта–Тейлора. При этом решаются нестационарные уравнения Навье–Стокса в цилиндрических координатах при небольших и умеренных числах Рейнольдса. Отмечается, что применение подпространств Крылова позволяет существенно ускорить сходимость к стационарному решению уравнений Навье–Стокса по методу установления.

¹ Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, ул. Институтская, 4/1, 630090, Новосибирск; ведущий науч. сотр., e-mail: vorozh@itam.nsc.ru

² Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, ул. Институтская, 4/1, 630090, Новосибирск; главный науч. сотр., e-mail: vshapeev@ngs.ru

³ Новосибирский национальный исследовательский университет, механико-математический факультет, ул. Пирогова, 2, 630090, Новосибирск; профессор, e-mail: vshapeev@ngs.ru

В [2] дан обзор таких методов Ньютона–Крылова (JFNK, Jacobian-Free Newton-Krylov), которые не требуют вычисления якобиана. Подчеркивается, что успешность применения указанных методов зависит от адекватного переобусловливания итераций Крылова. Применение линейного многосеточного метода рассматривается в [2] как предобуславливатель для JFNK-методов. К сожалению, при обсуждении применения JFNK-методов к задачам гидро- и аэродинамики авторы [2] не приводят информацию о факторах уменьшения требуемого машинного времени при применении методов JFNK только на одной сетке и при их комбинировании с многосеточными алгоритмами.

В [3] возникающая в результате дискретизации исходных PDE-уравнений СЛАУ решалась с применением приведенного в [4] эффективного алгоритма GMRES (Generalized Minimal Residual), являющегося вариантом реализации метода Крылова [5]. Заметим, что в работе [6] тоже было реализовано ускорение итераций при решении PDE с применением подпространств Крылова, хотя в ней отсутствует термин “подпространства Крылова”.

В последнее время рядом исследователей показана еще большая эффективность от комбинированного применения алгоритмов ускорения итерационных процессов. Например, комбинирование методов Крылова и Федоренко [7] ранее применялось в ряде численных методов. В [3, 8–12] оно применялось в случаях, когда СЛАУ возникала в результате дискретизации уравнений Навье–Стокса с помощью конечно-разностных методов и методов конечного объема. Техника ускорения итерационных процессов путем последовательного включения многосеточного и GMRES алгоритмов была реализована в [11]. В результате было достигнуто ускорение до 25 раз по сравнению со стандартным нелинейным многосеточным алгоритмом. В работах [13–16] описаны некоторые варианты комбинирования методов Крылова и Федоренко в рамках различных вариантов метода конечных элементов (МКЭ).

На практике часто используются различного вида предобуславливатели, эффективность влияния которых на итерационный процесс заключается в уменьшении числа обусловленности матрицы решаемой СЛАУ. Ввиду относительной простоты диагональные предобуславливатели получили широкое распространение. В целях краткости мы здесь процитируем только две репрезентативные работы [17, 18], в которых используются такие предобуславливатели для ускорения сходимости итерационных процессов решения стационарных уравнений Навье–Стокса, описывающих течения вязкой несжимаемой жидкости. Уравнения Навье–Стокса решаются численно в работе [17] в терминах скорости и давления с использованием комбинации метода конечных элементов и метода наименьших квадратов (LSFEM, Least-Squares Finite Element Method). Возникающая при этом СЛАУ решается предобусловленным методом сопряженных градиентов. Используется простой диагональный предобуславливатель (Якоби). Проведенные многочисленные расчеты подтверждают высокую эффективность этого простого предобуславливателя.

В [18] описан метод граничных элементов (BEM, Boundary Element Method) для численного решения двумерных уравнений Навье–Стокса, записанных в терминах функции тока и завихренности. В указанной работе приводятся примеры отсутствия сходимости итерационного решателя в случае, когда предобуславливатель не используется, и наличие сходимости при применении диагонального предобуславливателя. Важно отметить, что в варианте BEM, описанном в [18], используются условия непрерывности решения и его производной в направлении нормали к каждому граничному элементу, которые фактически совпадают с условиями согласования “кусков” приближенного решения краевой задачи для PDE в соседних ячейках пространственной расчетной сетки на разделяющих их общих сторонах в методе коллокаций и наименьших невязок (КНН), рассматриваемом в настоящей статье.

В нашей работе идея комбинации алгоритмов реализована двояко: во-первых, комбинированным является собственно метод КНН, во-вторых, при его реализации используется комбинация трех способов ускорения итерационного процесса решения СЛАУ, к решению которой сводится применение метода КНН.

В методе КНН метод коллокации комбинируется с требованием минимизации функционала, составленного из невязок линейных алгебраических уравнений, из которых определяется приближенное решение задачи. Существенное его отличие от многих методов решения PDE в том, что для приближенного решения дифференциальной задачи в нем выписывается переопределенная СЛАУ. О достоинстве такого подхода будет указано далее в содержательной части статьи. Идея метода была предложена Слепцовым А.Г. и реализована в [19]. Следует отметить, что она была опубликована одновременно с работой [20], которая, по-видимому, положила начало большой серии работ, объединенных аббревиатурой LSFEM. Обзор работ по LSFEM вне предмета данной работы, и здесь укажем только некоторые из них [17, 21–23]. В методе LSFEM так же, как и в методе КНН, для определения приближенного решения задачи выписывается переопределенная СЛАУ, решение которой ищется методом наименьших квадратов (LS, Least Squares), на котором достигается минимум функционала — суммы квадратов невязок ее уравнений. В первых вариантах реализации метода КНН решение переопределенной СЛАУ (псевдорешение) тоже искалось методом

LS. Однако в последующем при реализации метода КНН в нем переопределенная СЛАУ решается с помощью QR-декомпозиции ее матрицы, где Q — ортогональная, а R — верхнетреугольная матрицы. Как будет показано далее, на таком псевдорешении переопределенной СЛАУ тоже достигается минимум указанного функционала невязки. При предположении, что все арифметические действия в обоих методах решения переопределенной СЛАУ совершаются абсолютно точно, теоретически ими можно получить одни и те же ее псевдорешения. Однако в случае плохо обусловленной СЛАУ из-за более быстрого накопления ошибок округлений методом наименьших квадратов возможность построения совпадающих решений практически отсутствует. Чтобы подчеркнуть этот факт, было решено вариант метода с применением QR-декомпозиции матрицы переопределенной СЛАУ назвать методом коллокации и наименьших невязок (КНН).

В настоящей статье в качестве объекта, на котором демонстрируются предлагаемые подходы, взята краевая задача для уравнений Навье–Стокса. Их численное решение при умеренных и больших числах Рейнольдса представляет трудности для многих методов, так как в этом случае в результате их дискретизации получается плохо обусловленная СЛАУ. Метод КНН — это один из методов, который позволяет эффективно решать задачи для эллиптических, параболических и гиперболических PDE [24–35] на различных адаптивных сетках с прямоугольными и треугольными ячейками с использованием графов для их упорядочивания в процессе расчета. В [24, 34, 36] построены варианты метода, которые позволили получить решения 2D и 3D эталонных задач о течении вязкой жидкости в каверне и обтекании обратной ступеньки, находящиеся среди наиболее точных на сегодняшний день [37, 38]. В [35] дан краткий обзор по методу КНН, а обзор работ по применению метода КНН для численного решения двумерных несжимаемых уравнений Навье–Стокса имеется в [32]. В [33, 34] метод КНН применен для решения трехмерных уравнений Навье–Стокса несжимаемой жидкости на пространственной расчетной сетке из кубических ячеек. В качестве примера приведены результаты расчетов течения в кубической каверне с движущейся крышкой при $Re = 100$ и $Re = 1000$, показано их сравнение с известными наиболее точными расчетами. В [39, 40] различные варианты метода КНН применены для расчета напряженного состояния пластин из изотропных и анизотропных композиционных материалов, в том числе с повышенной точностью в областях с криволинейной границей [35, 41]. В [42] метод КНН приложен к решению задачи о продольных колебаниях бимодулярных балок, в [43] — к решению уравнения Бюргерса и уравнения Кортевега–де Вриза–Бюргерса, в [27, 44] — к трехмерному моделированию лазерной сварки металлических пластин на адаптивных сетках в областях с криволинейной границей.

Ниже для ускорения итерационного процесса решения СЛАУ в методе КНН конструируется диагональный предобуславливатель. Сначала рассматриваем применение диагонального предобуславливателя на каждой сетке многосеточного алгоритма в рамках метода КНН. Поскольку диагональный предобуславливатель в рассматриваемом случае по результатам, полученным с его применением, оказался недостаточно эффективным для наших целей, мы далее вводим двухпараметрический предобуславливатель и находим оптимальные значения входящих в него параметров из требования минимизации числа обусловленности матрицы СЛАУ. Комбинирование в методе КНН метода Крылова только с операцией продолжения на многосеточном комплексе впервые было реализовано в [45]. Уже там было получено ускорение решения задачи на ЭВМ в сотни раз по сравнению со случаем, когда указанная комбинация не применялась.

Для достижения большего ускорения в данной работе рассматривается комбинированное применение трех способов ускорения итерационного процесса: предобуславливателя, операции продолжения на многосеточном комплексе, являющейся составной частью метода Федоренко [7], и метода Крылова. Здесь предложен и применяется новый вариант реализации метода Крылова, отличающийся и не уступающий весьма эффективному GMRES, различные варианты которого приведены в [4]. На практике указанные способы ускорения итерационного процесса применяются как в отдельности, так и в комбинации, и здесь приводятся количественные характеристики от таких способов их применения.

2. Описание метода КНН. Рассмотрим краевую задачу для системы уравнений Навье–Стокса

$$(\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} + \nabla p = \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{V} - \mathbf{f}, \quad \operatorname{div} \mathbf{V} = 0, \quad (x_1, x_2) \in \Omega, \quad (1)$$

$$\mathbf{V}|_{\partial\Omega} = \mathbf{g} \quad (2)$$

в области Ω с границей $\partial\Omega$. Обозначения в уравнениях (1): x_1, x_2 — декартовы пространственные координаты; $\mathbf{V} = (v_1(x_1, x_2), v_2(x_1, x_2))$ — вектор скорости; $p = p(x_1, x_2)$ — давление; $\mathbf{f} = (f_1, f_2)$ — заданная вектор-функция; Re — число Рейнольдса; $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$, $(\mathbf{V} \cdot \nabla) = v_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial}{\partial x_2}$. Система (1) решается с граничными условиями Дирихле (2), где $\mathbf{g} = \mathbf{g}(x_1, x_2) = (g_1, g_2)$ — заданная вектор-функция. Давление

определяется из (1), (2) с точностью до константы. В дальнейшем будем подбирать эту константу так, чтобы выполнялось условие

$$\iint_{\Omega} p \, dx_1 dx_2 = 0. \tag{3}$$

В качестве области решения задачи берется квадрат

$$\Omega = \{(x_1, x_2), 0 \leq x_i \leq L, i = 1, 2\}, \tag{4}$$

где $L > 0$ — заданная длина стороны квадрата. Величина L использовалась в конкретных расчетах в качестве характерной длины при обезразмеривании переменных, и она входит естественным образом в определение числа Рейнольдса Re в (1). Далее краевую задачу для PDE будем называть дифференциальной задачей.

В задаче (1)–(4) область (4) покрывается сеткой из квадратных ячеек Ω_{ij} , $i, j = 1, \dots, M$, $M \geq 1$. Удобно ввести локальные координаты y_1, y_2 в каждой ячейке Ω_{ij} . Зависимость локальных координат от глобальных координат x_1, x_2 задается формулами $y_m = \frac{1}{h}(x_m - x_{m,i,j})$, $m = 1, 2$, где $x_{m,i,j}$ — значение координаты x_m в центре ячейки Ω_{ij} , а h — половина длины стороны квадратной ячейки, $h = \frac{L}{2M}$. Пусть $\mathbf{u}(y_1, y_2) = (u_1, u_2) = \mathbf{V}(hy_1 + x_{1,i,j}, hy_2 + x_{2,i,j})$, $q(y_1, y_2) = p(hy_1 + x_{1,i,j}, hy_2 + x_{2,i,j})$. В локальных переменных уравнения Навье–Стокса принимают следующий вид:

$$\Delta u_m - Re \, h \left(u_1 \frac{\partial u_m}{\partial y_1} + u_2 \frac{\partial u_m}{\partial y_2} + \frac{\partial q}{\partial y_m} \right) = Re \cdot h^2 f_m, \quad m = 1, 2; \quad \frac{1}{h} \left(\frac{\partial u_1}{\partial y_1} + \frac{\partial u_2}{\partial y_2} \right) = 0, \tag{5}$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2}$. Линеаризация по Ньютону уравнений (5) приводит к формулам

$$\Delta u_m^{s+1} - (Re \cdot h) (u_1^s u_{m,y_1}^{s+1} + u_1^{s+1} u_{m,y_1}^s + u_2^s u_{m,y_2}^{s+1} + u_2^{s+1} u_{m,y_2}^s + q_{y_m}^{s+1}) = F_m. \tag{6}$$

Здесь $m = 1, 2$; s — номер итерации по нелинейности, $s = 0, 1, 2, \dots$; u_1^s, u_2^s, q^s — известное приближение решения на s -й итерации начиная с выбранного начального приближения с индексом $s = 0$; $F_m = Re [h^2 f_m - h(u_1^s u_{m,y_1}^s + u_2^s u_{m,y_2}^s)]$, $u_{m,y_l} = \frac{\partial u_m}{\partial y_l}$, $q_{y_m} = \frac{\partial q}{\partial y_m}$, $l, m = 1, 2$.

Приближенное решение в каждой ячейке $\Omega_{i,j}$ ищется в виде линейной комбинации базисных вектор-функций φ_l :

$$(u_1^s, u_2^s, q^s)^T = \sum_{l=1}^{12} b_{i,j,l}^s \varphi_l, \tag{7}$$

где верхний индекс T обозначает операцию транспонирования. В данном варианте метода решение задачи проектируется в пространство многочленов. Таким образом, искомое приближенное решение является кусочно-полиномиальным. В данной работе для аппроксимации составляющих скорости использованы многочлены второй степени по переменным y_1, y_2 , а для аппроксимации давления — многочлены первой степени. Всего базисных функций в выбранном пространстве пятнадцать. Поскольку в уравнении неразрывности коэффициенты константы, то его легко удовлетворить за счет выбора базисных полиномов φ_l . Нетрудно установить, что для этого требуется удовлетворить ими три линейных соотношения. В итоге из первоначальных пятнадцати базисных полиномов независимыми останутся только двенадцать. Они приведены в табл. 1. Их совокупность можно назвать соленоидальным базисом, так как $\text{div } \varphi_l = 0$.

Сформулируем “локальную” СЛАУ — приближенную задачу, из которой определяется приближенное решение в каждой отдельной ячейке — локальное решение, и “глобальную” СЛАУ — объединение всех локальных СЛАУ, из которой определяется приближенное глобальное решение задачи (1)–(3). Основными уравнениями, определяющими решение дискретной задачи, являются уравнения коллокаций. Они получаются в результате подстановки в уравнения (6) выражений (7) и координат точек коллокаций. Количество этих точек и их расположение внутри ячейки может варьироваться в различных вариантах метода. В данной работе были реализованы три варианта задания координат точек коллокаций. Обозначим через N_c число точек коллокации внутри каждой ячейки. На рис. 1 точки коллокаций показаны черными кружками, при этом $\omega = 1/2$. При $N_c = 2$ локальные координаты точек коллокаций таковы: (ω, ω) , $(-\omega, \omega)$, где ω — задаваемое пользователем значение в интервале $0 < \omega < 1$ (рис. 1а). При $N_c = 4$

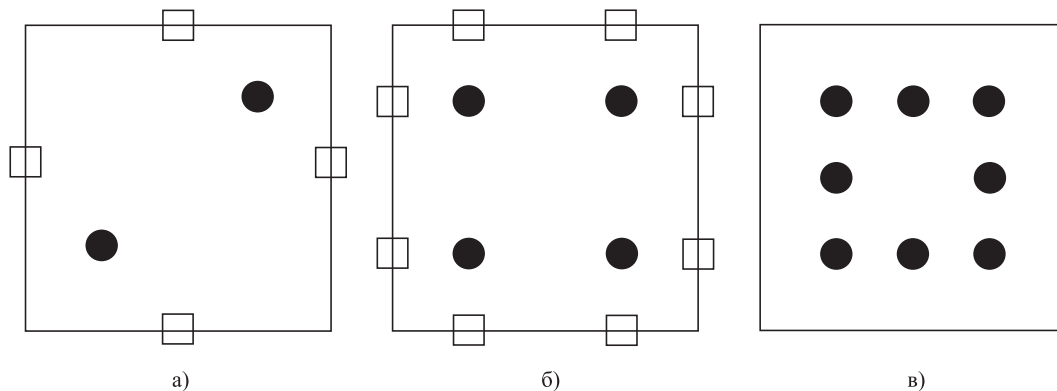
локальные координаты точек коллокаций имеют вид $(\pm\omega, \pm\omega)$. В случае $N_c = 8$ координаты точек коллокаций задавались следующим образом: расположение первых четырех точек было взято таким же, как при $N_c = 4$, а координаты следующих четырех точек задавались по формулам $(\pm\omega, 0)$, $(0, \pm\omega)$. Подставляя (7) в (6) и выписывая полученные соотношения в каждой точке коллокации с численными значениями ее координат, получим $2N_c$ линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{m=1}^{12} a_{\nu,m}^{(1)} \cdot b_m^{s+1} = f_{\nu}^s, \quad \nu = 1, \dots, 2N_c. \quad (8)$$

Таблица 1

Вид базисных функций φ_l

l	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
φ_l	1	y_1	y_2	y_1^2	$-2y_1y_2$	y_2^2	0	0	0	0	0	0
	0	$-y_2$	0	$-2y_1y_2$	y_2^2	0	1	y_1	y_1^2	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	y_1	y_2

Рис. 1. Варианты задания точек коллокаций и согласования: а) $N_c = 2$, $N_m = 4$, б) $N_c = 4$, $N_m = 8$, в) $N_c = 8$

В [19] было предложено в методе коллокаций и наименьших квадратов дополнить систему уравнений коллокаций (8) линейными условиями согласования локального решения в каждой ячейке с локальными решениями, взятыми во всех соседних с ней ячейках. В работе [46] введены параметры в условия согласования и показано с помощью вычислительных экспериментов, что область значений параметров, при которых глобальная СЛАУ метода коллокаций и наименьших квадратов хорошо обусловлена, пересекается в значительной степени с областью, где наблюдается наилучшая точность численного решения задачи. Однако в [19, 46] не исследовалось влияние условий согласования на число обусловленности локальной СЛАУ. Это исследование выполняется ниже в разделе 3, где показано, что включение условий согласования в локальную СЛАУ позволяет существенно (на пять–шесть десятичных порядков) уменьшить число обусловленности локальных СЛАУ во внутренних ячейках сетки.

По аналогии с [19, 36, 46] дополним систему уравнений приближенной задачи в ячейке Ω_{ij} условиями согласования. Запишем эти условия в отдельных точках (называемых точками согласования) на сторонах ячейки Ω_{ij} , которые являются общими с ее соседними ячейками. Условия согласования берутся в виде

$$h \frac{\partial(u^+)^n}{\partial n} + (u^+)^n = h \frac{\partial(u^-)^n}{\partial n} + (u^-)^n, \quad (9)$$

$$h \frac{\partial(u^+)^{\tau}}{\partial n} + (u^+)^{\tau} = h \frac{\partial(u^-)^{\tau}}{\partial n} + (u^-)^{\tau}, \quad (10)$$

$$q^+ = q^-. \quad (11)$$

Здесь $h \frac{\partial}{\partial n} = h \left(n_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + n_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \right) = n_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + n_2 \frac{\partial}{\partial y_2}$; $n = (n_1, n_2)$ — внешняя нормаль к стороне ячейки Ω_{ij} ; $(\cdot)^n$, $(\cdot)^{\tau}$ — нормальная и касательная составляющие вектора скорости на рассматриваемой стороне

ячейки; u^+ , u^- и q^+ , q^- — пределы функций u и q при стремлении аргументов к точке согласования внутри и снаружи ячейки $\Omega_{i,j}$.

Для однозначного определения давления в решении задаем его значение в одной точке области либо аппроксимируем условие (3) по формуле

$$\frac{1}{h} \left(\iint_{\Omega_{i,j}} q \, dy_1 dy_2 \right) = \frac{1}{h} \left(-I^* + \iint_{\Omega_{i,j}} q^* \, dy_1 dy_2 \right). \quad (12)$$

Здесь I^* — интеграл по всей области Ω , рассчитанный как сумма интегралов по каждой ячейке на предыдущей итерации; q^* — давление в ячейке на предыдущей итерации.

Обозначим через N_m число точек согласования для составляющих вектора скорости на сторонах каждой ячейки. При $N_m = 4$ координаты этих точек согласования задаются формулами $(\pm 1, 0)$, $(0, \pm 1)$ (рис. 1а). При $N_m = 8$ (рис. 1б) координаты точек согласования таковы: $(\pm 1, -\zeta)$, $(\pm 1, \zeta)$, $(-\zeta, \pm 1)$, $(\zeta, \pm 1)$, где $0 < \zeta < 1$. В расчетах, результаты которых представлены ниже, использовалось значение $\zeta = 1/2$. Условия согласования для давления (11) задаются в четырех точках с координатами $(\pm 1, 0)$, $(0, \pm 1)$. Используя (7), подставим координаты этих точек в каждое из трех условий согласования (9)–(11). Из первых двух условий получим $2N_m$ линейных алгебраических уравнений для составляющих скорости. Подстановка представления (7) в (11) дает еще четыре линейных алгебраических уравнения согласования.

В настоящей работе давление задавалось в нижней левой вершине ячейки $\Omega_{1,1}$ или же использовалось условие (12). Если сторона ячейки лежит на границе области Ω , то в соответствующих точках вместо условий согласования в локальной СЛАУ выписываются граничные условия $u_m = g_m$, $m = 1, 2$.

Объединяя уравнения коллокаций, согласования и уравнения, полученные из краевых условий, если ячейка $\Omega_{i,j}$ граничная, в каждой ячейке получим СЛАУ вида

$$A_{i,j} \cdot \mathbf{X}_{i,j}^{s+1} = \mathbf{f}_{i,j}^{s,s+1}, \quad (13)$$

где $\mathbf{X}_{i,j}^{s+1} = (b_{i,j,1}^{s+1}, \dots, b_{i,j,12}^{s+1})^T$. В методе КНН система (13) является переопределенной.

Для решения СЛАУ приближенной задачи применялся процесс, который условно можно назвать итерациями Гаусса–Зейделя. Одна глобальная $(s + 1)$ -я итерация заключалась в том, что в расчетной области Ω последовательно перебирались все ячейки. При этом в каждой ячейке СЛАУ (13) решалась ортогональным методом (Гивенса или Хаусхолдера), в правой части уравнений (9), (11) в качестве u^- , q^- берутся либо значения решения на $(s + 1)$ -й итерации, если они уже сосчитаны на этой итерации, либо их значения на предыдущей итерации. Пусть в локальной СЛАУ каждой ячейки все неизвестные из соседних ячеек, которые присутствуют в условиях согласования, перенесены в правую часть. Составим из матриц всех локальных СЛАУ блочно-диагональную матрицу \mathbf{A} , на диагонали которой полученные таким способом матрицы локальных СЛАУ. Матрицу \mathbf{A} тоже можно использовать для итерационного решения приближенной задачи.

3. Предобуславливатели для метода КНН. В каждой ячейке Ω_{ij} необходимо решать СЛАУ вида (13). Опустим в (13), для краткости, верхние и нижние индексы:

$$\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{f}. \quad (14)$$

Число обусловленности прямоугольной матрицы \mathbf{A} вычисляется по формуле

$$\kappa(\mathbf{A}) = \sqrt{\|\mathbf{A}_1\| \cdot \|\mathbf{A}_1^{-1}\|}, \quad (15)$$

где предполагается, что квадратная матрица $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}^T \mathbf{A}$ несингулярная.

Число обусловленности матрицы дает универсальную оценку относительной погрешности решения системы (14). В случаях применения метода КНН для численного решения нелинейных уравнений с частными производными в правую часть \mathbf{f} входят значения решения с предыдущей итерации. Эти значения имеют погрешность $O(h^l)$, где $l \geq 1$ — порядок точности метода. Отсюда следует, что норма погрешности правой части $\|\delta \mathbf{f}\| > 0$. Кроме того, в нелинейном случае коэффициенты уравнений коллокаций зависят от значений численного решения на предыдущей итерации, см., например, (7). Следовательно, и элементы матрицы \mathbf{A} так же заданы с некоторой погрешностью, поэтому норма этой погрешности $\|\delta \mathbf{A}\| > 0$. При условиях, что \mathbf{A} — квадратная матрица и $\|\mathbf{A}^{-1}\| \cdot \|\delta \mathbf{A}\| < 1$, для погрешности решения СЛАУ (14) верна оценка [47]:

$$\frac{\|\delta \mathbf{X}\|}{\|\mathbf{X}\|} \leq \frac{\kappa(\mathbf{A})}{1 - \kappa(\mathbf{A})} \frac{\|\delta \mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}\|} \left(\frac{\|\delta \mathbf{f}\|}{\|\mathbf{f}\|} + \frac{\|\delta \mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}\|} \right).$$

Из этой оценки следует, что для того чтобы уменьшить относительную ошибку решения СЛАУ (14), необходимо уменьшить число обусловленности матрицы A .

В этом разделе мы сначала описываем хорошо известный диагональный предобуславливатель, а затем — новый предобуславливатель, зависящий от двух параметров. Эти параметры подбираются путем численного решения задачи минимизации величины $\kappa(A)$.

3.1. Классический диагональный предобуславливатель. Следуя [18], сделаем в (14) замену

$$X = C_2 Y, \quad (16)$$

где C_2 — квадратная матрица размера 12×12 . Тогда система (14) принимает вид

$$AC_2 Y = f. \quad (17)$$

Умножим обе части уравнения (17) слева на матрицу C_1 :

$$C_1 AC_2 Y = C_1 f. \quad (18)$$

Нужно подобрать матрицы C_1 и C_2 так, чтобы матрица $B = C_1 AC_2$ была близкой к единичной матрице или, говоря в более общем смысле, чтобы число обусловленности матрицы B было меньше в сравнении с обусловленностью матрицы A . В [18] предложено применять в качестве “левого предобуславливателя” единичную матрицу $C_1 = I$. В качестве C_2 как правого предобуславливателя в [18] использована матрица $C_2 = R^{-1}$, где R — диагональная матрица, на главной диагонали которой стоят квадратные корни из диагональных элементов матрицы $A_1 = A^T A$. Пусть $A_1 = (\alpha_{ij})_{i,j=1}^{12}$. Тогда $R = \text{diag}(\sqrt{\alpha_{11}}, \dots, \sqrt{\alpha_{12,12}})$.

Пусть, далее, a_{ij} — элементы матрицы A , где $i = 1, \dots, N$, $j = 1, \dots, 12$. Тогда $\alpha_{jj} = \sum_{l=1}^N a_{l,j}^2$, $j = 1, \dots, 12$,

т.е. $\alpha_{jj} > 0$, если $a_{l,j} \neq 0$ хотя бы при одном (l, j) . Очевидно, что $R^{-1} = \text{diag}\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha_{11}}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{\alpha_{12,12}}}\right)$. После того как решение системы $BY = C_1 f$ найдено, вычисляем искомый вектор X по формуле (16).

Результаты применения вышеописанного диагонального предобуславливателя в рамках представленного в предыдущих разделах варианта метода КНН будут описаны ниже в разделе 6.

3.2. Двухпараметрический предобуславливатель. Введение параметров в предобуславливатель увеличивает его возможности для дальнейшего понижения числа обусловленности, так как эти параметры можно затем подбирать из требования минимизации числа обусловленности. В нашем случае мы построили предобуславливатель, зависящий от параметров ξ и η .

Параметр ξ вводится путем умножения на ξ обеих частей уравнений (6):

$$\xi \left[\Delta u_m^{s+1} - (\text{Re} \cdot h)(u_1^s u_{m,y_1}^{s+1} + u_1^{s+1} u_{m,y_1}^s + u_2^s u_{m,y_2}^{s+1} + u_2^{s+1} u_{m,y_2}^s + q_{y_m}^{s+1}) \right] = \xi F_m, \quad (19)$$

где $m = 1, 2$. Параметр η вводится в (9) следующим образом:

$$h \frac{\partial(u^+)^n}{\partial n} + \eta(u^+)^n = h \frac{\partial(u^-)^n}{\partial n} + \eta(u^-)^n. \quad (20)$$

Обозначим через A_{col} матрицу размера $2N_c \times 12$, получаемую при подстановке в (19) координат точек коллокаций; ее элементами являются коэффициенты при 12 искомым коэффициентах в представлении решения (7). Заметим, что матрицу A_{col} можно представить в виде $A_{\text{col}} = \bar{A}_{\text{col}} \cdot D$, где $D = \text{diag}(\xi, \dots, \xi)$ — диагональная матрица размера 12×12 , а матрица \bar{A}_{col} получается из СЛАУ (6). Иными словами, матрицу D можно рассматривать как правый диагональный однопараметрический предобуславливатель матрицы \bar{A}_{col} .

Определим степень переопределенности или недоопределенности системы (14) как $\chi(A) = \frac{m_r}{m_c}$, где m_r и m_c — соответственно число строк и число столбцов матрицы A . Ниже исследуется влияние величины $\chi(A)$ на число обусловленности (15). Сначала рассмотрим случаи, когда в матрицу A включаются только уравнения коллокаций. Число этих уравнений в случае применения метода КНН для численного решения уравнений Навье–Стокса (1) равно $2N_c$. Так как число неизвестных коэффициентов в разложениях составляющих вектора решения равно 12 согласно (7), то отсюда следует, что матрица A (14) будет иметь значения $m_r < 12$ при $N_c < 6$. Давление входит в уравнение количества движения (19) только в виде производных $\frac{\partial q}{\partial y_1}$ и $\frac{\partial q}{\partial y_2}$, поэтому 10-й столбец матрицы A_{col} нулевой. Вследствие этого матрица A_{col}

неполного ранга, в матрице $A_{\text{col}}^T A_{\text{col}}$ при любом $N_c > 1$ десятый столбец тоже состоит только из нулей, и для этой матрицы не существует обратной.

Чтобы потенциально с помощью матрицы A_{col} можно было определить решение, необходимо включить в нее строку, соответствующую уравнению (12). Эта строка имеет вид $\{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, h, 0, 0\}$. Обозначим такую дополненную матрицу через \tilde{A}_{col} . Это изменение делает ненулевым десятый столбец, и \tilde{A}_{col} становится при $N_c = 8$ матрицей полного ранга. Так как элементы матрицы \tilde{A}_{col} зависят от решения на предыдущей итерации, дальнейшее исследование свойств обусловленности необходимо осуществлять на заданной сетке при решении конкретной задачи. В качестве такой задачи рассмотрим в этом разделе модельную задачу для двумерных уравнений Навье–Стокса (1), которая имеет следующее точное решение [48]:

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{-2(1+x_1)}{(1+x_1)^2 + (1+x_2)^2}, & u_2 &= \frac{2(1+x_1)}{(1+x_1)^2 + (1+x_2)^2}, \\ p &= -\frac{2}{(1+x_1)^2 + (1+x_2)^2}, & 0 &\leq x_1, x_2 \leq 1. \end{aligned} \tag{21}$$

Заметим, что функции $u_1(x_1, x_2)$ и $u_2(x_1, x_2)$ описывают поле скорости с нулевой дивергенцией. Далее,

$$\int_0^1 \int_0^1 p \, dx_1 dx_2 = 4G - \pi \ln 2 - 2i \left[\text{Li}_2\left(-\frac{i}{2}\right) - \text{Li}_2\left(\frac{i}{2}\right) \right] \approx -0.46261314677281549872,$$

где $i = \sqrt{-1}$, G — постоянная Каталана [49], $G \approx 0.91596559417721901505$, $\text{Li}_2(z)$ — полилогарифмическая функция. Чтобы обеспечить выполнение равенства (3) с погрешностью, не превышающей погрешность машинных вычислений, давление p в (3) заменялось на величину $\bar{p} = p + 0.4626131467728155$.

При исследовании влияния $\chi(A)$ на число обусловленности сначала с помощью метода КНН ввиду зависимости элементов матрицы A в (14) от решения задачи получали хорошее приближение решения на заданной сетке. В этих расчетах использовалось следующее условие для окончания итераций по нелинейности:

$$\delta b^{n+1} < \varepsilon, \tag{22}$$

где $\delta b^{n+1} = \max_{i,j} \left(\max_{1 \leq l \leq 12} |b_{i,j,l}^{n+1} - b_{i,j,l}^n| \right)$, $b_{i,j,l}^n$, $n = 0, 1, \dots$, — значения коэффициентов $b_{i,j,l}$ в (7) на n -й итерации, а $\varepsilon < h^2$ — малая заданная положительная величина. В дальнейшем будем называть величину δb^{n+1} псевдопогрешностью приближенного решения. Наряду с условием (22) также применялся следующий критерий для окончания итераций по нелинейности:

$$\delta \mathbf{u}^{n+1} = \| \mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n \| < \varepsilon_2, \tag{23}$$

где $\| \cdot \|$ — евклидова норма вектора, ε_2 — заданная малая положительная величина.

Среднеквадратичные величины погрешности решения вычислялись по формулам

$$\text{Err}(\mathbf{u}(h)) = \left[\frac{1}{2M^2} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \sum_{\nu=1}^2 (u_{\nu,i,j} - u_{\nu,i,j}^{ex})^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad \text{Err}(p(h)) = \left[\frac{1}{M^2} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M (p_{i,j} - p_{i,j}^{ex})^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

где M — количество ячеек вдоль каждого координатного направления, $\mathbf{u}_{i,j}^{ex}$ и $p_{i,j}^{ex}$ — вектор скорости и давление, вычисленные из точного решения (21). Величины $\mathbf{u}_{i,j}$ и $p_{i,j}$ обозначают численное решение, полученное по методу КНН, описанному выше, вычисленное в центре ячейки Ω_{ij} .

Как показали численные эксперименты, число обусловленности $\kappa(A)$ выходило на некоторое постоянное значение уже тогда, когда величина δb^{s+1} уменьшалась до значения 10^{-5} , и в процессе дальнейших итераций оно уже не менялось. Поэтому при исследовании влияния величины $\chi(A)$ на число обусловленности в расчетах по методу КНН бралось значение $\varepsilon = 10^{-5}$ в (22) для получения приемлемого приближения решения и установления значений элементов матрицы A . Затем полученные численные значения решения использовались для вычисления элементов матрицы \tilde{A}_{col} . Таким образом, по окончании итераций (22) значения элементов матрицы \tilde{A}_{col} зависят только от параметров ξ и $h = 1.0/(2M)$. Чтобы получить матрицу \tilde{A}_{col} , состоящую только из численных элементов, задавались численные значения полушага сетки h .

Для вычисления числа обусловленности согласно (15) использовалась Фортран-подпрограмма AEN2D из библиотеки численного анализа НИВЦ МГУ [50], которая вычисляет все собственные значения вещественной симметричной матрицы QL-алгоритмом со сдвигом. С помощью этой подпрограммы находились

собственные значения $\lambda_1, \dots, \lambda_{12}$ матрицы $A^T A$. Затем число обусловленности прямоугольной матрицы A вычислялось по формуле $\kappa(A) = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}}$, где $\lambda_{\max} = \max_i |\lambda_i|$, $\lambda_{\min} = \min_i |\lambda_i|$, $i = 1, \dots, 12$.

Обозначим через A_{mat} матрицу, соответствующую условиям согласования (20), (10), (11). Тогда можно представить всю матрицу A в виде $A = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{\text{col}} \\ A_{\text{mat}} \end{pmatrix}$.

При заданном значении M элементы матрицы A зависят от ξ и η . Были проведены численные расчеты с целью выяснить, как влияет число ячеек сетки $M \times M$, степень переопределенности $\chi(A)$ локальной матрицы A и наличие граничных ячеек на число обусловленности $\kappa(A)$. Для этого рассматривались на сетке из $M \times M$ ячеек одна внутренняя ячейка Ω_{ij} с индексами $i = j = \frac{M}{2}$ и одна граничная ячейка с индексами $i = M, j = M/2$. В табл. 2 приведены результаты расчетов на сетке из 40×40 ячеек, т.е. $M = 40$; при этом использовались значения $\xi = 0.05$ и $\eta = 1.75$ в предобуславливателе. В табл. 2 применены следующие обозначения: m_{mat} — число строк в матрице A , соответствующее условиям согласования для составляющих вектора скорости и давления; m_{bnd} — число строк, соответствующих реализации граничных условий Дирихле для составляющих вектора скорости (для случая граничной ячейки), m_r — число строк локальной матрицы, $m_r = 2N_c + m_{\text{mat}} + m_{\text{bnd}} + 1$. Здесь слагаемое “1” — это одна строка, которая соответствует аппроксимации (12) интегрального условия для давления. Величина N_{it} — число итераций, необходимых для того, чтобы обеспечить выполнение неравенства (22) с $\varepsilon = 10^{-5}$.

Таблица 2

Влияние $\chi(A)$ и граничных условий переопределенной СЛАУ (14) на число обусловленности локальной матрицы A

N_c	N_{mat}	m_{mat}	m_{bnd}	m_r	$\chi(A)$	N_{it}	$\text{Err}(\mathbf{u})$	$\text{Err}(p)$	$\kappa(A)$
8	0	0	0	17	17/12	*	*	*	3.176E + 05
4	0	0	0	9	9/12	*	*	*	9.269E + 05
8	2	20	0	37	37/12	1681	1.869E - 03	1.135E - 03	6.549E + 00
8	2	15	4	36	36/12	1681	1.869E - 03	1.135E - 03	1.051E + 01
4	2	20	0	29	29/12	2281	1.609E - 03	8.824E - 04	6.558E + 00
4	1	9	2	20	20/12	> 10000	6.718E - 01	2.355E - 01	4.098E + 02

В табл. 2 символ * означает, что итерационный процесс расходится. Из анализа этой таблицы кроме того, что скорость сходимости рассматриваемого итерационного процесса существенно зависит от обусловленности локальных СЛАУ, можно сделать следующие выводы.

1°. В тех случаях, когда в матрицу A включаются только строки, соответствующие уравнениям коллокаций, и одна строка, соответствующая аппроксимации (12) интеграла от давления, получается очень большое число обусловленности порядка 10^5 в зависимости от числа точек коллокации. При включении в матрицу A строк, соответствующих условиям согласования, происходит уменьшение числа обусловленности на три–пять десятичных порядков в зависимости от количества ячеек сетки, точек коллокаций и точек согласования. Именно это значительное снижение числа обусловленности обеспечивает работоспособность метода КНН при решении краевых задач для уравнений с частными производными.

2°. Число обусловленности в граничной ячейке всегда выше, чем в случае внутренней ячейки.

3°. При $N_c = 4$ и $N_{\text{mat}} = 1$ существенно замедляется скорость сходимости метода КНН по сравнению со случаем $N_c = 8, N_{\text{mat}} = 2$.

4°. Приведенные в табл. 2 данные являются практическим доказательством того, что при использовании переопределенной системы в приближенной задаче ($\chi(A) > 1$) соответствующая СЛАУ приближенной задачи получается лучше обусловленной, чем когда СЛАУ при этом не является переопределенной. Это важное преимущество метода коллокации и наименьших квадратов (и метода КНН) над методом коллокации, в котором не используется переопределенное СЛАУ в приближенной задаче.

Были также проведены аналогичные расчеты для расчетной сетки из 20×20 ячеек. Были получены выводы, которые совпадают с вышеприведенными выводами 1°–4°, но, естественно, конкретные числовые значения величин $\kappa(A)$, $\delta \mathbf{u}$, δp и N_{it} несколько отличаются от случая сетки из 40×40 ячеек.

Так как значения числа обусловленности $\kappa(A)$ различны для различных ячеек в расчетной области, то представляет интерес связать вопрос ускорения рассматриваемого итерационного процесса Гаусса–

Зейделя с обусловленностью ее матрицы перехода от итерации к последующей итерации. Однако это требует дополнительных усилий и затрат времени. Здесь было решено связать вопрос оптимизации с обусловленностью блочно-диагональной матрицы, в качестве блоков которой взяты локальные СЛАУ всех ячеек расчетной области. Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_{12}$ — собственные значения матрицы $A^T A$ локальной СЛАУ, определяющей решение в Ω_{ij} , и $\lambda_{\max,ij} = \max(|\lambda_1|, \dots, |\lambda_{12}|)$, $\lambda_{\min,ij} = \min(|\lambda_1|, \dots, |\lambda_{12}|)$. Тогда число обусловленности указанной блочно-диагональной матрицы \mathcal{A} вычисляется по формуле

$$\mathcal{K}(\xi, \eta) = \sqrt{\frac{\max_{i,j} |\lambda_{\max,ij}|}{\min_{i,j} |\lambda_{\min,ij}|}}. \tag{24}$$

Для оптимизации предобуславливателя по параметрам ξ, η требуется найти в некоторой прямоугольной области $D_{\xi,\eta}$ плоскости (ξ, η) минимум по ξ, η числа обусловленности $\mathcal{K}(\xi, \eta)$. С этой целью область $D_{\xi,\eta}$ подбиралась так, чтобы в ней находились те точки (ξ, η) , в которых расчеты по методу КНН с рассматриваемым предобуславливателем демонстрировали сходимость итерационного процесса получения решения. В области $D_{\xi,\eta}$ задавалась прямоугольная равномерная сетка размера, например, 5×5 узлов. Для пары значений ξ_i, η_j в каждом узле этой сетки решалась краевая задача для уравнений Навье–Стокса по методу КНН и находился такой узел (ξ_{i_0}, η_{j_0}) , в котором значение функции $\mathcal{K}(\xi, \eta)$ было минимальным. Иными словами, для поиска минимума целевой функции $\mathcal{K}(\xi, \eta)$ применялся метод, не требующий вычисления якобиана этой функции. Решение рассматриваемой оптимизационной задачи требует большого объема вычислений. Например, в случае сетки из 5×5 узлов в области $D_{\xi,\eta}$ и сетки из 40×40 ячеек в плоскости пространственных переменных x_1, x_2 требовалось 56 минут машинного времени персонального компьютера с тактовой частотой 3 гигагерц процессора Intel. Те значения параметров (ξ, η) , при которых достигается минимум функции $\mathcal{K}(\xi, \eta)$, будем обозначать ξ_{th}, η_{th} .

Таблица 3
Значения $\mathcal{K}(\xi_{th}, \eta_{th})$, вычисленные по формуле (24), в зависимости от числа ячеек сетки, $N_c = 8, N_{mat} = 2, Re = 1000$

M	ξ_{th}	η_{th}	$\mathcal{K}(\xi_{th}, \eta_{th})$
10	0.017	1.040	8.422
20	0.040	0.900	8.374
40	0.067	0.933	8.497

Таблица 4
Значения $\mathcal{K}(\xi_{th}, \eta_{th})$, вычисленные по формуле (24), в зависимости от числа ячеек сетки, $N_c = 8, N_{mat} = 2, Re = 2500$

M	ξ_{th}	η_{th}	$\mathcal{K}(\xi_{th}, \eta_{th})$
10	0.017	1.040	10.944
20	0.020	0.900	8.668
40	0.040	1.100	9.013

В табл. 3 и 4 приводятся результаты поиска “глобального” минимума числа обусловленности по выше-описанному алгоритму. Из сравнения данных табл. 2 и 3 видно, что обусловленность матрицы глобальной СЛАУ получается больше чисел обусловленности матриц отдельных локальных СЛАУ. Естественно, это должно быть в общем случае. Далее, из сравнения данных табл. 3 и 4 следует, что обусловленность матрицы глобальной СЛАУ ухудшается с увеличением числа Рейнольдса.

Из табл. 3 следует, что оптимальные значения параметров ξ и η на сетке из 40×40 ячеек таковы: $\xi_{th} = 0.067$ и $\eta_{th} = 0.933$. Однако численные эксперименты по методу КНН показали, что для указанной сетки значения $\xi = 0.05$ и $\eta = 1.75$ обеспечивают немного более быструю сходимость итераций. Теоретические значения ξ_{th} и η_{th} , по существу, являются опорными в вопросе оптимизации численных итераций. Зная эти значения, легко осуществить поиск оптимальных значений ξ_{opt} и η_{opt} в их окрестности. Подстановка найденных таким образом ξ, η в матрицу A фактически является операцией переобуславливания.

Это различие в значениях ξ_{th} и ξ_{opt} , η_{th} и η_{opt} вызвано здесь, прежде всего, следующей причиной. Реализованный в работе итерационный процесс решения приближенной задачи с последовательным решением локальных СЛАУ является процессом Гаусса–Зейделя, а блочно-диагональная матрица \mathcal{A} , составленная из матриц локальных СЛАУ, соответствует процессу Гаусса–Якоби. У этих процессов области сходимости зачастую в значительной мере пересекаются, но в общем случае несколько отличаются. Как показали численные эксперименты при решении тестовой задачи для уравнений Навье–Стокса с краевыми условиями, соответствующими точному решению (21), скорость сходимости реализованного процесса с параметрами ξ_{th} и η_{th} незначительно отличается от скорости сходимости процесса с параметрами ξ_{opt} и η_{opt} . Однако скорость сходимости процесса с указанными параметрами значительно отличается от ско-

рости сходимости процесса с параметрами $\xi = 1, \eta = 1$. Поэтому запрограммированная простая процедура поиска значений ξ_{th}, η_{th} и их использование вполне оправданы.

4. Вариант алгоритма Крылова с редукцией базиса подпространства.

4.1. Основные формулы. Приведем кратко сведения о предложенном и более подробно описанном в [33] варианте алгоритма метода Крылова ускорения итерационного процесса решения СЛАУ. Пусть СЛАУ имеет вид

$$\mathbf{X} = \mathbf{T}\mathbf{X} + \mathbf{f}, \quad (25)$$

где вектор \mathbf{X} — искомое решение, \mathbf{T} — квадратная матрица, \mathbf{f} — вектор-столбец. Пусть матрица \mathbf{T} — матрица полного ранга, и пусть сходится итерационный процесс

$$\mathbf{X}^{n+1} = \mathbf{T}\mathbf{X}^n + \mathbf{f}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (26)$$

в котором \mathbf{X}^n — приближение к решению на итерации с номером n .

По определению, $\mathbf{r}^n = \mathbf{T}\mathbf{X}^n + \mathbf{f} - \mathbf{X}^n = \mathbf{X}^{n+1} - \mathbf{X}^n$ — невязка уравнений (25), а $\mathbf{Z}^n = \mathbf{X} - \mathbf{X}^n$ — погрешность решения на n -й итерации. Нетрудно из этих формул вывести соотношение $\mathbf{r}^{n+1} = \mathbf{T}\mathbf{r}^n$. Численное значение невязки на любой итерации в отличие от погрешности легко находится. Пусть от некоторого начального приближения \mathbf{X}^0 к решению сделаны $k+1$ итераций, т.е. вычислены величины $\mathbf{X}^1, \mathbf{X}^2, \dots, \mathbf{X}^{k+1}$ и $\mathbf{r}^0, \mathbf{r}^1, \dots, \mathbf{r}^k$ соответственно. В алгоритмах ускорения итерационных процессов по Крылову значение \mathbf{X}^{k+1} уточняется до вычисления \mathbf{X}^{*k+1} по формуле (26), полагая $\mathbf{X}^{*k+1} = \mathbf{X}^{k+1} + \mathbf{Y}^{k+1}$. Поправка вида

$$\mathbf{Y}^{k+1} = \sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbf{r}^i \quad (27)$$

с неопределенными коэффициентами α_i ищется в подпространстве [4, 5, 36]

$$\mathcal{K}_k(\mathbf{r}^1, \mathbf{T}) = \text{span}\{\mathbf{r}^1, \mathbf{T}\mathbf{r}^1, \dots, \mathbf{T}^{k-1}\mathbf{r}^1\},$$

где $\text{span}\{\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^k\}$ — линейная оболочка векторов $\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^k$. Коэффициенты $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ находятся из условия минимизации функционала невязки $\Phi(\alpha_1, \dots, \alpha_k) = \|\mathbf{X}^{*k+1} - \mathbf{T}\mathbf{X}^{*k+1} - \mathbf{f}\|_2^2$, которая возникает

при подстановке \mathbf{X}^{*k+1} в (25). Здесь $\|\mathbf{u}\|_2$ — евклидова норма вектора \mathbf{u} размерности N : $\|\mathbf{u}\|_2^2 = \sum_{i=1}^N u_i^2$,

$\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_N)^T$. Можно показать [6], что для выполнения этого условия искомые коэффициенты α_i разложения поправки в базисе подпространства должны удовлетворять следующей СЛАУ:

$$(\mathbf{r}^1 - \mathbf{r}^0)\alpha_1 + \dots + (\mathbf{r}^k - \mathbf{r}^{k-1})\alpha_k = -\mathbf{r}^k. \quad (28)$$

Построенное таким образом приближенное решение \mathbf{X}^{*k+1} можно использовать как начальное приближение для следующих итераций (26).

В случае сходящегося итерационного процесса имеем $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathbf{r}^n\|_2 = 0$. В малой окрестности решения элементы матрицы системы (28) — разности близких между собой малых величин $\mathbf{r}^i - \mathbf{r}^{i-1}$, $i = 1, 2, \dots, k$. Из-за ошибок округления на ЭВМ их вычисление приводит к относительно большой погрешности. В результате по мере достижения все большей точности решения СЛАУ поправки (27) вычисляются все менее точно, рассматриваемый метод ускорения становится все менее “устойчивым” и менее эффективным. Другая неприятность, снижающая эффективность поправки в области малых невязок, заключается в том, что в условиях ограниченной разрядности представления чисел на ЭВМ система (28) нередко может быть плохо обусловленной или вырожденной. У нее с точностью до небольшого числа, близкого к машинному нулю, могут быть нулевые или линейно зависимые между собой столбцы.

Сделаем предположение (CR): допустим, что матрица системы (28) является матрицей полного ранга (complete rank). Для достижения большей устойчивости процесса вычисления коэффициентов поправки \mathbf{Y}^{k+1} в области малых невязок здесь применяются несколько приемов. Первый прием — нормировка столбцов матрицы системы (28). Это позволяет уменьшить в процессе решения СЛАУ (28) количество арифметических действий с числами, близкими к машинному нулю. Нормировка уравнений в (28) производилась здесь при помощи замены неизвестных $\beta_i = \alpha_i \|\mathbf{r}^i - \mathbf{r}^{i-1}\|_2$, $i = 1, \dots, k$. В результате СЛАУ (28) принимает вид

$$\mathbf{B}\boldsymbol{\beta} = (\mathbf{B}_1)\beta_1 + \dots + (\mathbf{B}_k)\beta_k = -\mathbf{r}^k, \quad (29)$$

где $B_i = \frac{r^i - r^{i-1}}{\|r^i - r^{i-1}\|_2}$, $i = 1, \dots, k$, — столбцы матрицы B . По сути дела, указанная выше нормировка уравнений системы (28) означает переобусловливание матрицы этой системы. Этот прием использовался ранее в работе [6] и в последующих работах [24–26, 36].

Вторым приемом является применение ортогонального метода для решения переопределенной СЛАУ (29). Здесь использовались методы либо Хаусхолдера, либо Гивенса с выбором главного элемента в i -м столбце B_i , $i = 1, 2, \dots, k$. Иными словами, для прямоугольной матрицы B системы (29) строилось QR -разложение с ортогональной матрицей Q и прямоугольной матрицей R , у которой на главной диагонали ненулевые элементы, а под главной диагональю все элементы нули. Так что в первых k строках матрицы R расположена квадратная верхнетреугольная матрица, и решение переопределенной системы $B\beta = r^k$ (29) свелось к решению системы

$$R\beta = -Q^T r^k. \tag{30}$$

Решение СЛАУ, состоящей из первых k уравнений системы (30), принимается в качестве псевдорешения системы (29). Известно, что ортогональный метод сводит решение заданной системы к решению системы, обусловленность которой не хуже обусловленности исходной. Описанные первый и второй приемы содержатся в упомянутом методе GMRES.

При численном решении прикладных задач в начале итерационного процесса, когда невязки r^i ($i = 0, 1, \dots$) не маленькие, с большой вероятностью матрица B имеет полный ранг — предположение CR выполняется. Однако по мере сходимости итерационного процесса при небольших r^i с ненулевой вероятностью предположение CR может не выполняться. При этом попытка построить QR -разложение не дает в первых k строках матрицы R треугольную матрицу размера k . Если этот факт имеет место с точностью, близкой к машинному нулю, т.е. по крайней мере один из элементов на диагонали верхней треугольной матрицы R близок к машинному нулю, то поправка (27) будет найдена с непригодной точностью (или попытка решить систему (30) может дать в результате большое число, не представимое в арифметике с конкретной используемой разрядностью представления чисел в ЭВМ). Это может привести к автоматическому останову машины (авосту). Если даже система (30) будет решена, то это может быть сделано с плохой точностью. При этом поправки Y^{k+1} к X^{k+1} вычисляются неустойчиво. В вычислительном эксперименте в области малых невязок решения можно наблюдать осцилляции в графике погрешности решения.

4.2. Редукция базиса подпространства Крылова в области малых невязок. Третий существенный прием, примененный здесь, как и первые два направлен на увеличение устойчивости вычисления поправок (устойчивого построения подпространства Крылова). Суть его заключается в редукции имеющегося базиса путем ограничения числа невязок r^i , $i = 0, 1, \dots, s < k$, используемых в редуцированном базисе, при вычислении поправок к приближенным значениям решения в области плохой обусловленности системы (28). Здесь применялся достаточно простой и удобный в реализации критерий (S-критерий) для выбора числа невязок, пригодных с точки зрения устойчивого построения подпространства Крылова. В [36] был реализован некоторый его вариант.

Пусть в процессе QR -разложения на диагонали матрицы R в $(s + 1)$ -й строке появился элемент по модулю меньше некоторого числа δ , близкого к машинному нулю, и все элементы под диагональю равны нулю. Тогда для построения поправки используются только первые $s + 1$ невязки r^i ($i = 0, 1, \dots, s$). В системе (29) оставляются первые s столбцов, а в правой части соответственно редуцированной определяющей системы вместо вектора $-r^k$ берется вектор $-r^s$. Эти операции были реализованы в программе непрерывного процесса итераций и вычисления поправок к промежуточным значениям решения. Иными словами, при появлении в таком процессе близкого к вырожденному базиса подпространства Крылова программа в автомате выделяла линейно независимое подмножество его элементов, вычисляла очередную поправку только с их использованием и непрерывно продолжала процесс итерационного решения СЛАУ без вмешательства вычислителя и перезапуска программы.

Как показали результаты решения большого количества тестовых примеров, применение S-критерия позволяет избежать некоторого количества авостов при приближении величин невязок к машинному нулю и получить более точные решения СЛАУ, чем без применения этого критерия. Величина δ зависит от задачи и желаемой точности ее приближенного решения. В сосчитанных тестовых задачах величина δ бралась около 10^{-14} .

Очевидно, что программа с автоматическим применением S-критерия позволяет применять метод Крылова также в случае, когда матрица B системы (29) не является матрицей полного ранга, т.е. реализация S-критерия делает алгоритм применения подпространств Крылова в значительной мере автоматическим (робастным).

5. Ускорение сходимости итераций применением многосеточного алгоритма. Основная идея многосеточных алгоритмов состоит в селективном демпфировании гармоник ошибки [7, 51]. В методе КНН, как и в других методах, количество итераций, необходимых для достижения заданной точности приближения к предельному решению, зависит от начального приближения. В нашей работе применялась операция продолжения вдоль восходящей ветви V -цикла — расчеты на последовательности измельчающихся сеток — в качестве способа получения хорошего начального приближения для итераций на самой мелкой сетке среди сеток, используемых в многосеточном комплексе. Переход от грубой сетки к более мелкой делается с помощью операторов продолжения. Проиллюстрируем алгоритм операции продолжения на примере составляющей скорости $u_1(y_1, y_2, b_1, \dots, b_{12})$. Пусть $h_1 = h$, где h — полушаг грубой сетки, и пусть $h_2 = h_1/2$ — полушаг мелкой сетки, на которой нужно найти разложение функции u_1 по базису.

Шаг 1. Пусть X_1, X_2 — глобальные координаты центра ячейки грубой сетки. Сделаем следующие подстановки в полиномиальное выражение для u_1 :

$$y_l = (x_l - X_l)/h_l, \quad l = 1, 2. \quad (31)$$

В результате получаем многочлен

$$U_1(x_1, x_2, b_1, \dots, b_{12}) = u_1\left(\frac{x_1 - X_1}{h_1}, \frac{x_2 - X_2}{h_1}, b_1, \dots, b_{12}\right). \quad (32)$$

Шаг 2. Пусть $(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2)$ — глобальные координаты центра любой из четырех ячеек мелкой сетки, содержащихся в ячейке грубой сетки. Сделаем в (32) замену $x_l = \tilde{X}_l + \tilde{y}_l \cdot h_2$, $l = 1, 2$. В результате получим многочлен второй степени $\tilde{U}_1 = P(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_{12})$ от переменных \tilde{y}_1, \tilde{y}_2 с коэффициентами $\tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_{12}$. После приведения подобных оказывается, что координаты X_1, X_2 и \tilde{X}_1, \tilde{X}_2 входят в \tilde{b}_l ($l = 1, \dots, 12$) только в виде комбинаций $\delta x_l = \frac{X_l - \tilde{X}_l}{h_1}$. Согласно (31), величина $-\delta x_l = \frac{\tilde{X}_l - X_l}{h_1}$ является локальной координатой в ячейке грубой сетки центра ячейки мелкой сетки.

Приведем выражения для коэффициентов \tilde{b}_j ($j = 1, \dots, 12$) представления решения в ячейке мелкой сетки с полушагом h_2 в терминах коэффициентов b_1, \dots, b_{12} представления решения в ячейке с полушагом $h_1 = 2h_2$ и величин $\sigma_1 = h_2/h_1$, $\sigma_2 = \sigma_1^2$:

$$\begin{aligned} \tilde{b}_1 &= b_1 - b_2\delta x_1 + b_4\delta x_1^2 - (b_3 + 2b_5\delta x_1)\delta x_2 + b_6\delta x_2^2; & \tilde{b}_2 &= \sigma_1(b_2 - 2b_4\delta x_1 + 2b_5\delta x_2); \\ \tilde{b}_3 &= \sigma_1[b_3 + 2(b_5\delta x_1 - b_6\delta x_2)]; & \tilde{b}_4 &= \sigma_2 b_4; & \tilde{b}_5 &= \sigma_2 b_5; & \tilde{b}_6 &= \sigma_2 b_6; \\ \tilde{b}_7 &= b_7 - b_8\delta x_1 + b_9\delta x_1^2 + \delta x_2(b_2 - 2b_4\delta x_1 + b_5\delta x_2); & \tilde{b}_8 &= \sigma_1(b_8 - 2b_9\delta x_1 + 2b_4\delta x_2); \\ \tilde{b}_9 &= \sigma_2 b_9; & \tilde{b}_{10} &= b_{10} - b_{11}\delta x_1 - b_{12}\delta x_2; & \tilde{b}_{11} &= \sigma_1 b_{11}; & \tilde{b}_{12} &= \sigma_1 b_{12}, \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что можно выписать аналогичные формулы перехода от грубой сетки к мелкой в случае любой целой величины отношения длин сторон их ячеек.

6. Результаты численных экспериментов.

6.1. Тестирование. С целью изучения свойств сходимости и точности изложенного выше метода КНН были выполнены многочисленные вычислительные эксперименты с использованием аналитического решения (21). Порядки сходимости ν_u и ν_p вычислялись по известным формулам [32, 34].

Была проведена серия расчетов с целью изучения влияния конкретного вида предобуславливателя на сходимость итераций по методу КНН. В этой серии расчетов критерием останова счета было выполнение неравенства $\delta b^s < 10^{-9}$. Использовалась восходящая ветвь многосеточного алгоритма с переходами от грубой сетки из 5×5 ячеек к сеткам из 10×10 , 20×20 , 40×40 и 80×80 ячеек. Результаты представлены на рис. 2. Крестиком на оси n показан тот номер итерации, начиная с которого расчет в рамках многосеточного алгоритма осуществляется на сетке из 80×80 ячеек. Видно, что при отсутствии предобуславливателя, когда $\xi = 1$ в (19) и $\eta = 1$ в (20), псевдопогрешность δb^{n+1} начинает расти после перехода к расчету на сетке из 80×80 ячеек.

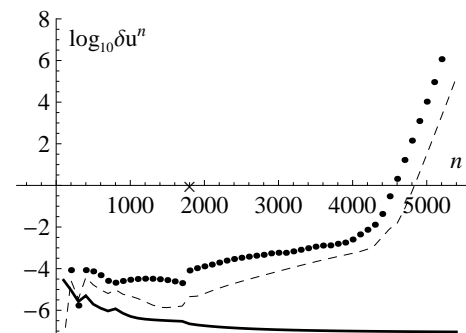


Рис. 2. Погрешность δu^n при использовании различных предобуславливателей: $\xi = \xi_{\text{opt}}, \eta = \eta_{\text{opt}}$ (—); $\xi = \eta = 1$ (- - -); диагональный предобуславливатель (· · · · ·)

Аналогичное поведение демонстрирует также диагональный предобуславливатель из [18]. В то же время предобуславливатель, использующий (19), (20) с $\xi = \xi_{\text{opt}} = 0.05$ и $\eta = \eta_{\text{opt}} = 1.75$, обеспечивает достижение неравенства $\delta b^s < 10^{-9}$. Поэтому все расчеты, описываемые ниже в данном разделе, были проведены с применением предобуславливателя, описанного в разделе 3, с $\xi = \xi_{\text{opt}}$ и $\eta = \eta_{\text{opt}}$.

На рис. 3–5 и в табл. 5 приводятся результаты численных экспериментов, в которых при решении уравнений Навье–Стокса по методу КНН тестовой задачи с точным решением (18) использовались только два из описанных в предыдущих разделах трех способов ускорения сходимости: двухпараметрический предобуславливатель и метод подпространств Крылова. Число Рейнольдса $Re = 1000$, $L = 1$ в (4). Эти расчеты были выполнены на сетке из 40×40 ячеек, $N_c = 8$. Критерием останова счета было выполнение неравенства $\delta b^n < 10^{-9}$.

На рис. 3 сплошными линиями показано численное решение, полученное по методу КНН при применении интегрального условия (12), а штриховыми — решение при отсутствии данного условия в локальной СЛАУ; в этом случае вместо (12) использовалось задание значения давления в точке с координатами $x_1 = 0, x_2 = 0$. В процессе итераций по методу КНН абсолютная величина интеграла (3) падала со значения порядка 10^{-3} до величины порядка 10^{-11} – 10^{-12} , т.е. до величины порядка машинных ошибок округления, накопленных в процессе решения задачи при расчетах по Фортран-программе с двойной точностью. Это может служить одним из критериев правильности программной реализации представленного выше метода КНН. Число невязок, использовавшихся в алгоритме подпространств Крылова, равно 10. Из рис. 3 видно, что использование условия (12) позволяет существенно уменьшить количество итераций по методу КНН: в этом случае требуется 1585 итераций, а в случае, когда уравнение (12) не включалось в локальные системы СЛАУ, для сходимости требовалось 8812 итераций.

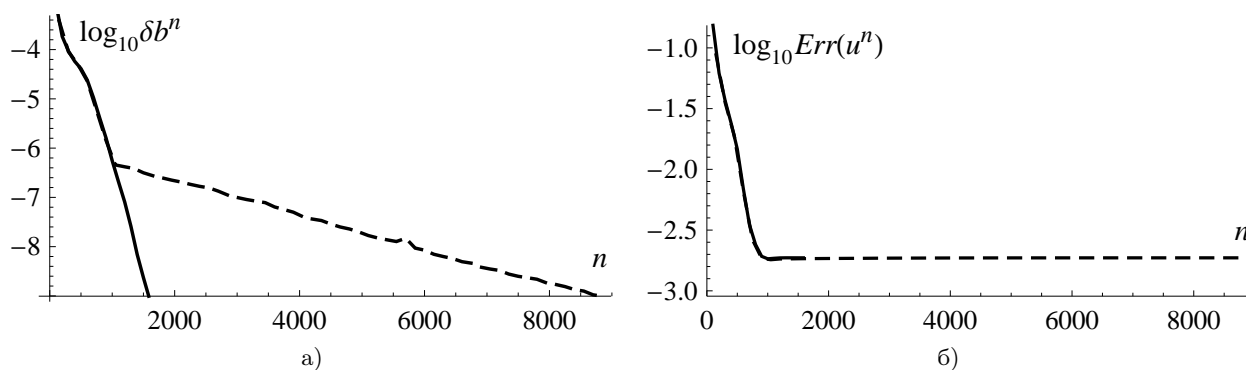


Рис. 3. Влияние применения условия (12) на скорость сходимости метода КНН

Расчету без применения алгоритма Крылова соответствует на рис. 4 случай $k = 0$. В этой серии расчетов в переопределенной СЛАУ (13) использовалось уравнение (12). Из рис. 4 видно, что с увеличением числа невязок k , используемых в методе Крылова, скорость сходимости численного решения по методу КНН растет. Количество итераций N_{it} , необходимых для обеспечения выполнения неравенства $\delta b^n < 10^{-9}$, составляло 19805, 2437, 1585 и 1345 соответственно при $k = 0, 2, 10$ и 20 . Таким образом, применение алгоритма Крылова при $Re = 1000$ с $k = 20$ позволило уменьшить количество итераций, требуемых для сходимости приближенного решения, в 14.7 раз по сравнению со случаем $k = 0$.

Проведен расчет без использования предобуславливателя, т.е. когда $\xi = \eta = 1$; кроме того, алгоритм на основе подпространств Крылова не применялся, см. штрихпунктирные линии на рис. 4. В этом случае понадобилось 24704 итераций по методу КНН при $k = 0$ для достижения неравенства $\delta b^n < 10^{-9}$, т.е. примерно на 25% больше, чем при использовании значений $\xi_{\text{opt}}, \eta_{\text{opt}}$ в предобуславливателе. Из рис. 4б видно, что погрешность $Err(u^n)$ сошедшегося решения выше, чем при использовании значений $\xi_{\text{opt}}, \eta_{\text{opt}}$ в предобуславливателе. Из табл. 5 видно, что при $Re = 1000$ порядок сходимости ν_u близок к 2, а $\nu_p < \nu_u$ при $M > 80$.

На рис. 5 дано сравнение профилей компонент полученного методом КНН и точного решения. Компоненты v_1, v_2 и p приближенного решения нарисованы символами Δ, \circ и ∇ , те же компоненты точного решения — сплошными, штриховыми и штрихпунктирными линиями соответственно. Здесь видно хорошее согласие между численными результатами и аналитическим решением.

Были проведены расчеты с применением восходящей ветви V-цикла с целью выяснить, как влияет применение только многосеточного алгоритма на ускорение сходимости метода КНН. Были также проведены расчеты, в которых движение по восходящей ветви многосеточного V-цикла применялось совместно с алгоритмом ускорения, основанным на подпространствах Крылова. Результаты этих расчетов представ-

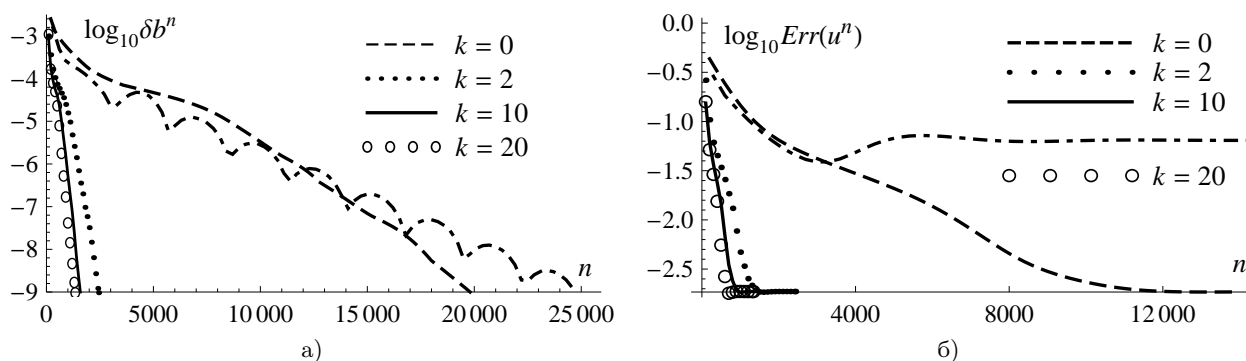


Рис. 4. Влияние значения k в (28) на скорость сходимости величин $\log_{10} \delta b^n$ (а) и $\log_{10} Err(u^n)$ (б), где n — число итераций

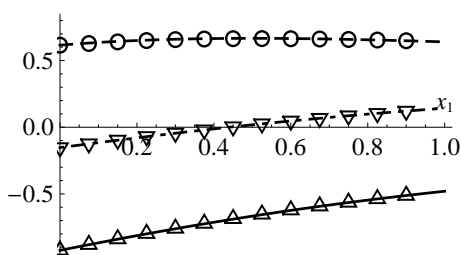


Рис. 5. Сравнение профилей приближенного и точного решений при $x_2 = L/2$. Сетка 40×40 ячеек

Таблица 5
Погрешности $Err(u^n)$, $Err(p^n)$ и их порядки сходимости ν_u, ν_p на последовательности сеток, $Re = 1000, L = 1, N_c = 8$

M	$Err(u^n)$	$Err(p^n)$	ν_u	ν_p
10	1.309E-02	9.754E-03		
20	5.484E-03	3.664E-03	1.26	1.41
40	1.869E-03	1.135E-03	1.55	1.69
80	4.938E-04	2.870E-04	1.92	1.98
160	1.272E-04	7.686E-05	1.96	1.90

лены в табл. 6. В ней K_{mgr} — количество последовательно используемых сеток в многосеточном комплексе. Если $K_{mgr} = 1$, то это означает, что в расчете используется только одна сетка, и это самая мелкая сетка с числом ячеек 80×80 . Далее, N_{it} — суммарное количество итераций, выполненных на всех сетках комплекса. Фактор ускорения итерационного процесса AF в результате применения того или иного способа его ускорения вычисляется как отношение времени счета при $K_{mgr} = 1, k = 0$ ко времени счета при применении последовательности из нескольких сеток ($K_{mgr} > 1, k = 0$) или же последовательности сеток в сочетании с применением алгоритма Крылова на каждой сетке ($K_{mgr} > 1, k > 1$). Во всех расчетах, показанных в табл. 6, использовались оптимальные значения $\xi_{opt} = 0.05, \eta_{opt} = 1.75$ в двухпараметрическом предобуславливателе; кроме того, в локальные матрицы A_{ij} в (13) включалась аппроксимация (12) интегрального условия на давление. Из табл. 6 видно, что наибольшее ускорение скорости сходимости — до 28 раз по сравнению с расчетом только на самой мелкой сетке — имеет место при применении пяти сеток в многосеточном алгоритме и 5 невязок в методе Крылова.

Далее, применение только многосеточного алгоритма дает меньшее ускорение сходимости итераций ($AF = 1.67$), чем применение только алгоритма подпространств Крылова при счете на самой мелкой сетке ($AF = 15.64$). Логично было ожидать, что одновременное применение многосеточного алгоритма и метода Крылова с $k = 5$ должно было бы дать следующий фактор ускорения: $AF = 1.67 \times 13.52 = 22.58$. Но вместо этого при $K_{mgr} = 5, k = 5$ получился более высокий фактор ускорения $AF = 28.07$. Это дополнительное ускорение сходимости итераций можно объяснить тем, что минимизация функционала невязки в методе КНН на каждой итерации подавляет различные гармоники ошибок решения, которые возникают в промежуточных итерациях.

Был также проведен расчет с неоптимальными значениями $\xi = 1, \eta = 1$ в предобуславливателе, и в этом случае метод КНН расходился.

Общий вывод из табл. 6 следующий: наиболее существенный вклад в ускорение итерационного процесса решения уравнений Навье–Стокса по методу КНН дает совместное применение всех трех способов ускорения сходимости итераций.

6.2. Использование высокоточных решений эталонной задачи для верификации метода КНН. Заметим, что 2D и 3D задачи о течении вязкой несжимаемой жидкости в каверне с движущейся крышкой являются эталонными, на решении которых проверяются возможности известных или вновь создаваемых численных методов. Обзоры многочисленных работ, посвященных решению этих задач, содержатся в работах [31–38, 45, 52–56].

Таблица 6

Влияние преобуславливателя и комбинации методов Крылова и Федоренко на последовательности сеток размеров $5 \cdot 2^m \times 5 \cdot 2^m$, $m = 0, \dots, 4$, на скорость сходимости метода КНН при $Re = 1000$

Метод	N_{it}	Время счета, с.	AF	$Err(\mathbf{u})$	$Err(p)$
$K_{mgr} = 1, k = 0$	95266	25793	1.0	4.938E-04	2.871E-04
$K_{mgr} = 5, k = 0$	56913	15409	1.67	4.934E-04	2.867E-04
$K_{mgr} = 1, k = 5$	7090	1908	13.52	4.937E-04	2.870E-04
$K_{mgr} = 1, k = 15$	5935	1649	15.64	4.937E-04	2.869E-04
$K_{mgr} = 5, k = 5$	4584	919	28.07	4.933E-04	2.866E-04
$K_{mgr} = 5, k = 10$	6476	1342	19.22	4.928E-04	2.841E-04
$K_{mgr} = 5, k = 15$	4975	1007	25.61	4.933E-04	2.866E-04
$K_{mgr} = 5, k = 20$	5033	1043	24.73	4.932E-04	2.864E-04

В рассматриваемой задаче расчетная область каверна — квадрат (4) со стороной $L = 1$, начало координат находится в ее левом нижнем углу. Верхняя крышка каверны движется в безразмерных величинах с единичной скоростью в положительном направлении оси Ox_1 . Остальные стороны каверны (4) покоятся. На всех сторонах заданы условия прилипания: $v_1 = 1, v_2 = 0$ при $x_2 = 1$ и $v_m = 0, m = 1, 2$, на остальных сторонах.

Течение в каверне с движущейся крышкой имеет сингулярности в верхних углах области. Их влияние на точность численного решения усиливается с увеличением числа Рейнольдса. Поэтому при больших числах Рейнольдса для получения более точного решения необходимо применять адаптивные сетки с более мелкими ячейками в окрестности сингулярностей [36, 37]. Здесь использовали только равномерные сетки, размер которых не превосходил 320×320 ячеек.

Таблица 7

Результаты по ускорению решения методом КНН эталонной задачи путем применения комбинации методов Крылова и Федоренко на последовательности сеток размеров $5 \cdot 2^m \times 5 \cdot 2^m, m = 0, 1, 2, 3$, при $Re = 100$

Метод	N_{it}	Время счета, с.	AF
$K_{mgr} = 1, k = 0$	360104	31640.44	1.0
$K_{mgr} = 4, k = 0$	152172	13147.12	2.41
$K_{mgr} = 1, k = 10$	13608	1242.36	25.47
$K_{mgr} = 4, k = 8$	3623	197.75	160.0
$K_{mgr} = 4, k = 9$	3591	194.97	162.28
$K_{mgr} = 4, k = 10$	3632	199.48	158.61

Таблица 7 иллюстрирует эффективность совместного применения двухпараметрического преобуславливателя и алгоритмов Крылова и Федоренко при $Re = 100$. В этой серии расчетов не применялась аппроксимация (12) интегрального условия для давления (3), а задавалось давление $p = 1$ в точке с координатами $x_1 = 0, x_2 = 0$. Были также проведены расчеты для этого же числа Рейнольдса с включением уравнения (12) в локальные СЛАУ, в результате машинное время счета каждого варианта в табл. 7 уменьшилось примерно в 3.6 раза.

Перед выполнением расчетов, результаты которых приведены в этой таблице, были найдены значения $\xi_{th} = 1.66, \eta_{th} = 3.47$ для двухпараметрического преобуславливателя с помощью алгоритма, описанного в разделе 3. С использованием этих значений как опорных были найдены с помощью нескольких расчетов задачи о течении в каверне с движущейся крышкой на сетке из 40×40 ячеек значения $\xi_{opt} = 2.0$ и $\eta_{opt} = 3.5$, которые использовались во всех вариантах расчетов, представленных в табл. 7. В критерии сходимости по псевдопогрешности (22) использовалось значение $\varepsilon = 10^{-8}$. Видно, что ускорение сходимости весьма значительное: при $K_{mgr} = 4, k = 9$ соответствующий фактор ускорения $AF = 162.28$. Из этой таблицы также следует, что в рассматриваемой задаче наилучшим для ускорения сходимости итерационного процесса при решении уравнений Навье–Стокса с умеренными числами Рейнольдса является число невязок $k = 9$ в описанном выше варианте алгоритма Крылова. Заметим, что при тестировании совместного применения алгоритмов Крылова и Федоренко на решении (21) оптимальным оказалось значение

$k = 5$ (табл. 6).

Таблица 8 аналогична по своей структуре табл. 7. Перед выполнением расчетов, результаты которых приведены в этой таблице, были найдены значения $\xi_{th} = 0.036$, $\eta_{th} = 5.025$ для двухпараметрического предобуславливателя с помощью алгоритма, описанного в разделе 3. С использованием этих значений как опорных были найдены с помощью нескольких расчетов рассматриваемой задачи при $Re = 2500$ на сетке из 64×64 ячеек значения $\xi_{opt} = 0.05$ и $\eta_{opt} = 1.75$, которые использовались во всех вариантах расчетов, представленных в табл. 8.

Таблица 8
Результаты по ускорению решения методом КНН
эталонной задачи путем применения комбинации методов
Крылова и Федоренко на последовательности сеток
размеров $8 \cdot 2^m \times 8 \cdot 2^m$, $m = 0, 1, 2, 3$, при $Re = 2500$

Метод	N_{it}	Время счета, с.	AF
$K_{mgr} = 1, k = 0$	290135	48918	1.0
$K_{mgr} = 1, k = 10$	16571	2696	18.14
$K_{mgr} = 4, k = 8$	27734	4186	11.69
$K_{mgr} = 4, k = 9$	26271	4377	11.18
$K_{mgr} = 4, k = 10$	26277	3944	12.40

В этой серии расчетов бралось значение $\varepsilon = 10^{-10}$ в критерии (22) сходимости псевдопогрешности, потому что при $\varepsilon = 10^{-9}$ еще не достигалась достаточная малость погрешности (23). По этим причинам требовалось для сходимости больше итераций, чем при числе Рейнольдса $Re = 1000$. Кроме того, с увеличением значения числа Рейнольдса ухудшается обусловленность алгебраических систем, решаемых в методе КНН (ср. табл. 3 и 4), что является основной причиной замедления сходимости итерационного процесса решения уравнений Навье–Стокса методом КНН. Отметим также, что применение одного лишь многосеточного алгоритма в рамках метода КНН оказалось неэффективным при $Re = 2500$: в этом случае требовалось даже несколько больше итераций для сходимости, чем при отключенном многосеточном алгоритме. Это может быть объяснено тем, что при переходе с грубой сетки на более мелкую с помощью оператора продолжения псевдопогрешность δb^n увеличивается в двух ячейках, один из углов которых совпадает с точкой сингулярности решения. Эта ошибка затем распространяется в различных направлениях внутрь расчетной области, и требуется довольно значительное количество итераций, чтобы демпфировать в достаточной мере эти ошибки на более мелкой сетке. Известным способом решения этой проблемы является исключение особенностей решения в верхних углах с помощью асимптотических решений, описанных в работах [38, 52]. В описываемых в настоящем разделе расчетах эталонной задачи по методу КНН эти асимптотические решения не применялись.

На рис. 6 представлены некоторые результаты численных расчетов течения вязкой несжимаемой жидкости в квадратной каверне для чисел Рейнольдса $Re = 1000$ и 2500 . Расчеты выполнены на равномерной сетке 320×320 и 256×256 ячеек для $Re = 1000$ и 2500 соответственно. Сплошные линии на рис. 6б и 6г — результаты расчетов по вышеописанному методу КНН. Полученные результаты сравнивались с наиболее точными результатами других исследователей, полученными при рассматриваемых числах Рейнольдса. При $Re = 1000$ вблизи левого верхнего угла каверны вихрь весьма слабый и плохо выявляется в расчетах [38, 54, 56], а при $Re = 2500$ он существенно интенсивнее, чем при $Re = 1000$ и хорошо передан в расчетах, приведенных на рис. 6в и в работах [55, 56].

7. Заключение. В настоящей статье скомбинированы в методе КНН три способа ускорения сходимости итераций при решении СЛАУ. Каждый способ, входящий в комбинацию, дает свой вклад в суммарную характеристику ускорения сходимости итераций. Одним из позитивных факторов, вносящих вклад в быструю сходимость итераций при использовании многосеточного комплекса в методе КНН, является возможность перехода с одной сетки на другую без применения таких процедур, как, например, интерполяция или осреднение, которые вводят собственную ошибку в промежуточное численное решение. Исследовано влияние на итерационный процесс всех трех способов его ускорения: каждого по отдельности, а также при их комбинированном применении. При этом наибольший вклад в ускорение дает применение алгоритма, использующего подпространства Крылова.

Сравнение результатов по ускорению итераций при использовании одновременно всех трех способов со случаем, когда применяется только предобуславливатель, привело к ускорению до 160 раз. Как было показано выше, использование переопределенной СЛАУ для нахождения приближенного решения

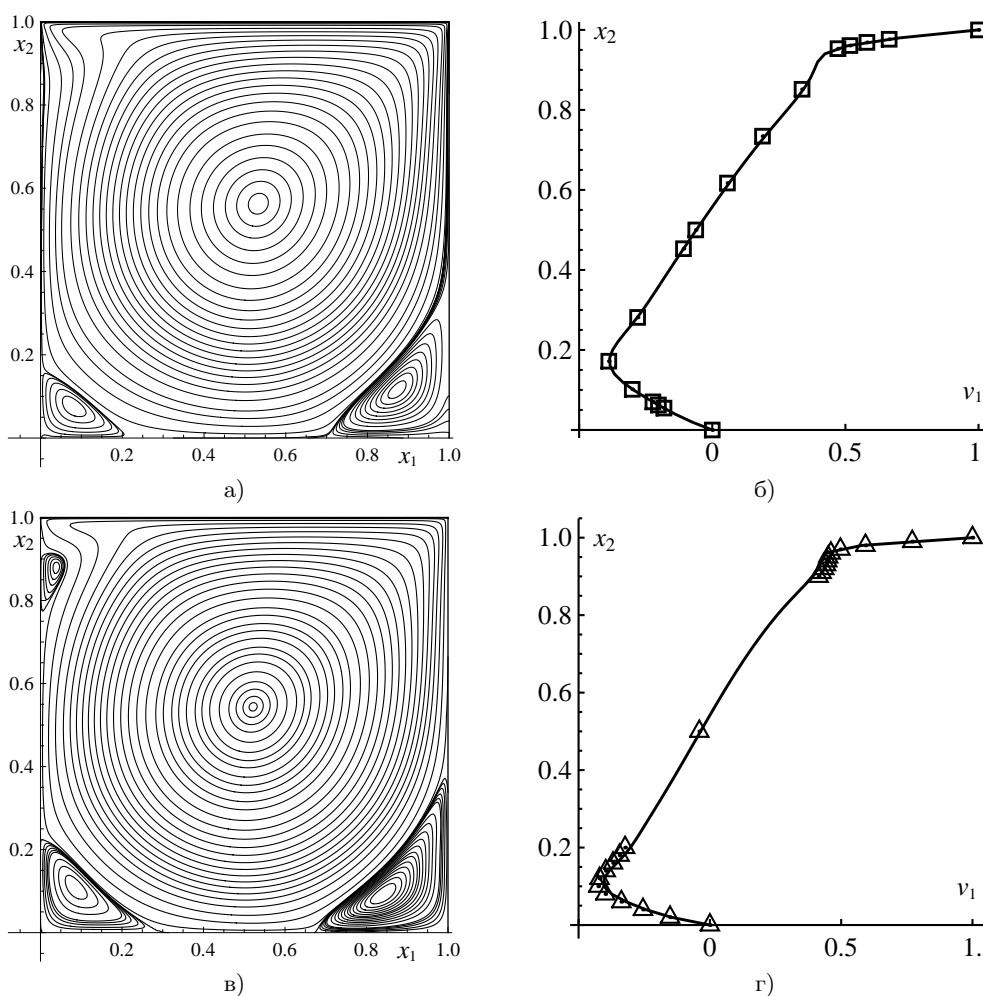


Рис. 6. Решение эталонной задачи по методу КНН при $Re = 1000$ (а, б) и $Re = 2500$ (в, г): а), в) картины линий тока, б), г) профиль составляющей скорости v_1 вдоль линии $x_1 = 0.5$ (значки \square и \triangle — результаты работ, соответственно, [38] и [54])

уравнений с частными производными по методу КНН позволяет значительно улучшить обусловленность приближенной задачи, к которой сводится решение исходной дифференциальной задачи, по сравнению с обусловленностью приближенной задачи в методе коллокаций. Это обстоятельство тоже оказывает положительное влияние на скорость сходимости итераций в методе КНН. Кроме того, минимизация функционала невязки в методе КНН на каждой итерации подавляет различные ошибки гармоник возмущения решения, которые возникают в промежуточных итерациях. По-видимому, этот благоприятный фактор дополнительно усиливает эффективность применения на его фоне других способов ускорения итерационных процессов и позволяет добиться их ускорения в десятки раз. Оказалось, что для значительного ускорения сходимости итераций при использовании метода Федоренко в методе КНН достаточно ограничиваться только операцией продолжения решения на многосеточном комплексе.

Эффективность совместного применения методов Крылова и Федоренко в сочетании с предложенным предобуславливателем позволила выполнить на персональных компьютерах за ограниченное время достаточно много вычислительных экспериментов, включая решение уравнений Навье–Стокса. Часть результатов представлена в этой статье. Такая комбинация способов ускорения итерационных процессов может быть реализована и при применении других численных итерационных методов решения PDE.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Edwards W.S., Tuckerman L.S., Friesner R.A., Sorensen D.C. Krylov methods for the incompressible Navier–Stokes equations // J. Comput. Phys. 1994. **110**, N 1. 82–102.
2. Knoll D.A., Keyes D.E. Jacobian-free Newton–Krylov methods: a survey of approaches and applications // J. Comput. Phys. 2004. **193**, N 2. 357–397.

3. *Griffith B.E.* An accurate and efficient method for the incompressible Navier–Stokes equations using the projection method as a preconditioner // *J. Comput. Phys.* 2009. **228**, N 20. 7565–7595.
4. *Saad Y.* Numerical methods for large eigenvalue problems. Manchester: Manchester University Press, 1991.
5. *Крылов А.Н.* О численном решении уравнения, которым в технических вопросах определяются частоты малых колебаний материальных систем // *Изв. АН СССР, Отд. матем. и естеств. наук.* 1931. № 4. 491–539.
6. *Слепцов А.Г.* Об ускорении сходимости линейных итераций II // *Моделирование в механике.* 1989. **3**, № 5. 118–125.
7. *Федоренко Р.П.* О скорости сходимости одного итерационного процесса // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 1964. **4**, № 3. 559–564.
8. *Piquet J., Vasseur X.* A nonstandard multigrid method with flexible multiple semicoarsening for the numerical solution of the pressure equation in a Navier–Stokes solver // *Numer. Algorithms.* 2000. **24**, N 4. 333–355.
9. *Jothiprasad G., Mavriplis D.J., Caughey D.A.* Higher-order time integration schemes for the unsteady Navier–Stokes equations on unstructured meshes // *J. Comput. Phys.* 2003. **191**, N 2. 542–566.
10. *Ge L., Sotiropoulos F.* A numerical method for solving the 3D unsteady incompressible Navier–Stokes equations in curvilinear domains with complex immersed boundaries // *J. Comput. Phys.* 2007. **225**, N 2. 1782–1809.
11. *Lucas P., van Zuijlen A.H., Bijl H.* Fast unsteady flow computations with a Jacobian-free Newton–Krylov algorithm // *J. Comput. Phys.* 2010. **229**, N 24. 9201–9215.
12. *Nasr-Azadani M.M., Meiburg E.* TURBINS: an immersed boundary, Navier–Stokes code for the simulation of gravity and turbidity currents interacting with complex topographies // *Comp. & Fluids.* 2011. **45**, N 1. 14–28.
13. *Wang M., Chen L.* Multigrid methods for the Stokes equations using distributive Gauss–Seidel relaxations based on the least squares commutator // *J. Sci. Comput.* 2013. **56**, N 2. 409–431.
14. *Nickaen M., Ouazzi A., Turek S.* Newton multigrid least-squares FEM for the V-V-P formulation of the Navier–Stokes equations // *J. Comput. Phys.* 2014. **256**. 416–427.
15. *Fairag F.A., Wathen A.J.* A block preconditioning technique for the streamfunction-vorticity formulation of the Navier–Stokes equations // *Numer. Methods Partial Differential Equations.* 2012. **28**, N 3. 888–898.
16. *Benzi M., Wang Z.* Analysis of augmented Lagrangian-based preconditioners for the steady incompressible Navier–Stokes equations // *SIAM J. Sci. Comput.* 2011. **33**, N 5. 2761–2784.
17. *Jiang B.N., Lin T.L., Povinelli L.A.* Large-scale computation of incompressible viscous flow by least-squares finite element method // *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.* 1994. **114**, N 3–4. 213–231.
18. *Ramšak M., Škerget L.* A subdomain boundary element method for high-Reynolds laminar flow using stream function–vorticity formulation // *Int. J. Numer. Meth. Fluids.* 2004. **46**, N 8. 815–847.
19. *Плясунова А.В., Слепцов А.Г.* Коллокационно-сеточный метод решения нелинейных параболических уравнений на подвижных сетках // *Моделирование в механике.* 1987. **18**, № 4. 116–137.
20. *Carey G.F., Jiang B.N.* Least-squares finite element method and preconditioned conjugate gradient solution // *Int. J. Numer. Methods in Engineering.* 1987. **24**, N 7. 1283–1296.
21. *Jiang B.N.* The least-squares finite element method: theory and applications in computational fluid dynamics and electromagnetics. Berlin: Springer, 1998.
22. *Bochev P.B., Gunzburger M.D.* Finite element methods of least-squares type // *SIAM Rev.* 1998. **40**, N 4. 789–837.
23. *Soares B.F., Garcia R.V., Pinto P.C., Romao E.C.* Interval study of convergence in the solution of 1D Burgers by least squares finite element method (LSFEM) + Newton linearization // *Scientific Research and Essays.* 2015. **10**, N 16. 522–530.
24. *Семин Л.Г., Слепцов А.Г., Шанеев В.П.* Метод коллокаций-наименьших квадратов для уравнений Стокса // *Вычисл. технологии.* 1996. **1**, № 2. 90–98.
25. *Semin L., Shapeev V.* Constructing the numerical method for Navier–Stokes equations using computer algebra system // *Lecture Notes in Computer Science.* Vol. 3718. Heidelberg: Springer, 2005. 367–378.
26. *Исаев В.И., Шанеев В.П.* Развитие метода коллокаций и наименьших квадратов // *Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН.* 2008. **14**, № 1. 41–60.
27. *Исаев В.И., Шанеев В.П., Черепанов А.Н.* Численное моделирование лазерной сварки тонких металлических пластин с учетом конвекции в сварочной ванне // *Теплофизика и аэромеханика.* 2010. **17**, № 3. 451–466.
28. *Исаев В.И., Шанеев В.П.* Метод коллокаций и наименьших квадратов повышенной точности для решения уравнений Навье–Стокса // *Доклады АН.* 2012. **442**, № 4. 442–445.
29. *Слепцов А.Г., Шокин Ю.И.* Адаптивный проекционно-сеточный метод для эллиптических задач // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 1997. **37**, № 5. 572–586.
30. *Беляев В.В., Шанеев В.П.* Метод коллокаций и наименьших квадратов на адаптивных сетках в области с криволинейной границей // *Вычисл. технологии.* 2000. **5**, № 4. 13–21.
31. *Shapeev V.P., Isaev V.I., Idimeshev S.V.* The collocations and least squares method: application to numerical solution of the Navier–Stokes equations // *CD-ROM Proc. 6th ECCOMAS.* Sept. 2012. Vienna: Vienna Univ. of Tech., 2012.
32. *Shapeev V.P., Vorozhtsov E.V.* Symbolic-numeric implementation of the method of collocations and least squares for 3D Navier–Stokes equations // *Lecture Notes in Computer Science.* Vol. 7442. Heidelberg: Springer, 2012. 321–333.
33. *Шанеев В.П., Ворожцов Е.В., Исаев В.И., Идимешев С.В.* Метод коллокаций и наименьших невязок для трехмерных уравнений Навье–Стокса // *Вычислительные методы и программирование.* 2013. **14**. 306–322.

34. Shapeev V.P., Vorozhtsov E.V. CAS application to the construction of the collocations and least residuals method for the solution of 3D Navier–Stokes equations // *Lecture Notes in Computer Science*. Vol. 8136. Heidelberg: Springer, 2013. 381–392.
35. Shapeev V. Collocation and least residuals method and its applications // *EPJ Web of Conferences*. 2016. **108**, N 01009. DOI: 10.1051/epjconf/201610801009
36. Исаев В.И., Шанеев В.П. Варианты метода коллокаций и наименьших квадратов повышенной точности для численного решения уравнений Навье–Стокса // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2010. **50**, № 10. 1758–1770.
37. Shapeev A.V., Lin P. An asymptotic fitting finite element method with exponential mesh refinement for accurate computation of corner eddies in viscous flows // *SIAM J. Sci. Comput.* 2009. **31**, N 3. 1874–1900.
38. Botella O., Peyret R. Benchmark spectral results on the lid-driven cavity flow // *Comput. Fluids*. 1998. **27**, N 4. 421–433.
39. Голушко С.К., Идимешев С.В., Шанеев В.П. Метод коллокаций и наименьших невязок в приложении к задачам механики изотропных пластин // *Вычислит. технологии*. 2013. **18**, № 6. 31–43.
40. Голушко С.К., Идимешев С.В., Шанеев В.П. Разработка и применение метода коллокаций и наименьших невязок к задачам механики анизотропных слоистых пластин // *Вычислит. технологии*. 2014. **19**, № 5. 24–36.
41. Шанеев В.П., Беляев В.А. Варианты метода коллокации и наименьших невязок повышенной точности в области с криволинейной границей // *Вычислит. технологии*. 2016. **21**, № 5. 95–110.
42. Kharenko D., Padovani C., Pagni A., Pasquinelli G., Semin L. Free longitudinal vibrations of bimodular beams: a comparative study // *Int. J. Structural Stability and Dynamics*. 2011. **11**, N 1. 23–56.
43. Shapeev V.P., Vorozhtsov E.V. CAS application to the construction of the collocations and least residuals method for the solution of the Burgers and Korteweg–de Vries–Burgers equations // *Lecture Notes in Computer Science*. Vol. 8660. Heidelberg: Springer, 2014. 432–446.
44. Isaev V.I., Cherepanov A.N., Shapeev V.P. Numerical study of heat modes of laser welding of dissimilar metals with an intermediate insert // *Int. J. of Heat and Mass Transfer*. 2016. **99**. 711–720.
45. Ворожцов Е.В., Шанеев В.П. Об ускорении итерационных процессов решения краевых задач комбинированием методов Крылова и Федоренко // *Символ науки*. 2015. **10**, № 2. 24–43.
46. Исаев В.И., Шанеев В.П., Еремин С.А. Исследование свойств метода коллокации и наименьших квадратов решения краевых задач для уравнения Пуассона и уравнений Навье–Стокса // *Вычислит. технологии*. 2007. **12**, № 3. 53–70.
47. Петров И.Б., Лобанов А.И. Лекции по вычислительной математике: Учебное пособие. М.: БИНОМ, Лаборатория знаний, 2006.
48. Chiu P.H., Sheu T.W.H., Lin R.K. An effective explicit pressure gradient scheme implemented in the two-level non-staggered grids for incompressible Navier–Stokes equations // *J. Comput. Phys.* 2008. **227**, N 8. 4018–4037.
49. Wolfram S. *The Mathematica Book*. Champaign: Wolfram Media, 2003.
50. Библиотека численного анализа НИВЦ МГУ. Вычисление всех собственных значений симметричной матрицы QL-алгоритмом со сдвигом (num-anal.srcc.msu.ru/lib.na/cat/ae/aeh2r.htm).
51. Wesseling P. *An introduction to multigrid methods*. Chichester: John Wiley & Sons, 1992.
52. Tee T.W., Sobei I. Spectral method for the unsteady incompressible Navier–Stokes equations in gauge formulation. OU Comput. Lab. Rep. NA04/09. Oxford, 2004.
53. Albensoeder S., Kuhlmann H.C. Accurate three-dimensional lid-driven cavity flow // *J. Comput. Phys.* 2005. **206**, N 2. 536–558.
54. Erturk E., Corke T.C., Gökçöl C. Numerical solutions of 2-D steady incompressible driven cavity flow at high Reynolds numbers // *Int. J. Numer. Methods Fluids*. 2005. **48**, N 7. 747–774.
55. Erturk E. Discussions on driven cavity flow // *Int. J. Numer. Methods Fluids*. 2009. **60**, N 3. 275–294.
56. Lim R., Sheen D. Nonconforming finite element method applied to the driven cavity flow (arXiv:1502.04217v3 [math.NA] 4 Mar 2016).

Поступила в редакцию
18.01.2017

On Combining the Techniques for Convergence Acceleration of Iteration Processes during the Numerical Solution of Navier–Stokes Equations

E. V. Vorozhtsov¹ and V. P. Shapeev^{2,3}

¹ *Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics, Siberian Branch of Russian Academy of Sciences; Institutskaya ulitsa 4/1, Novosibirsk, 630090, Russia; Dr. Sci., Professor, Leading Scientist, e-mail: vorozh@itam.nsc.ru*

² *Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics, Siberian Branch of Russian Academy*

of Sciences; Institutskaya ulitsa 4/1, Novosibirsk, 630090, Russia; Dr. Sci., Professor, Principal Scientist, e-mail: vshapeev@ngs.ru

³ *Novosibirsk National Research University, Faculty of Mechanics and Mathematics; ulitsa Pirogova 2, Novosibirsk, 630090, Russia; Dr. Sci., Professor, e-mail: vshapeev@ngs.ru*

Received January 18, 2017

Abstract: The problem of accelerating the iteration process of the numerical solution of boundary value problems for partial differential equations by the method of collocations and least residuals (CLR) is considered. In the CLR method it is proposed to simultaneously apply three techniques for accelerating the iteration process: a preconditioner, a multigrid algorithm, and the Krylov method. A two-parameter preconditioner is studied. It is proposed to find the optimal values of its parameters by the numerical solution of a relatively computationally inexpensive problem of minimizing the condition number of the system of linear algebraic equations for the approximate problem. The use of the found preconditioner substantially speeds up the iteration process. The individual effect of each technique as well as the effect of their combined use on accelerating the entire iteration process acceleration are analyzed. The application of the algorithm based on the Krylov subspaces gives the most significant contribution. A simultaneous combined use of all the three techniques for accelerating the iteration process of solving the boundary value problems for the two-dimensional Navier–Stokes equations reduces the CPU time of their solution by a factor of up to 160 compared to the case when no such technique is applied. The proposed combination of the above techniques for accelerating the iteration processes may also be implemented in the framework of other numerical methods for solving the partial differential equations.

Keywords: preconditioning, Krylov subspaces, multigrid algorithms, Gauss–Seidel iterations, Navier–Stokes equations, the method of collocations and least residuals.

References

1. W. S. Edwards, L. S. Tuckerman, R. A. Friesner, and D. C. Sorensen, “Krylov Methods for the Incompressible Navier–Stokes Equations,” *J. Comput. Phys.* **110** (1), 82–102 (1994).
2. D. A. Knoll and D. E. Keyes, “Jacobian-Free Newton–Krylov Methods: A Survey of Approaches and Applications,” *J. Comput. Phys.* **193** (2), 357–397 (2004).
3. B. E. Griffith, “An Accurate and Efficient Method for the Incompressible Navier–Stokes Equations Using the Projection Method as a Preconditioner,” *J. Comput. Phys.* **228** (20), 7565–7595 (2009).
4. Y. Saad, *Numerical Methods for Large Eigenvalue Problems* (Manchester Univ. Press, Manchester, 1991).
5. A. N. Krylov, “On the Numerical Solution of the Equation by Which the Frequency of Small Oscillations is Determined in Technical Problems,” *Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Fiz.-Mat.*, No 4, 491–539 (1931).
6. A. G. Sleptsov, “On Convergence Acceleration of Linear Iterations, II,” *Modelir. Mekhan.* **3** (5), 118–125 (1989).
7. R. P. Fedorenko, “The Speed of Convergence of One Iterative Process,” *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.* **4** (3), 559–564 (1964) [*USSR Comput. Math. Math. Phys.* **4** (3), 227–235 (1964)].
8. J. Piquet and X. Vasseur, “A Nonstandard Multigrid Method with Flexible Multiple Semicoarsening for the Numerical Solution of the Pressure Equation in a Navier–Stokes Solver,” *Numer. Algorithms* **24** (4), 333–355 (2000).
9. G. Jothiprasad, D. J. Mavriplis, and D. A. Caughey, “Higher-Order Time Integration Schemes for the Unsteady Navier–Stokes Equations on Unstructured Meshes,” *J. Comput. Phys.* **191** (2), 542–566 (2003).
10. L. Ge and F. Sotiropoulos, “A Numerical Method for Solving the 3D Unsteady Incompressible Navier–Stokes Equations in Curvilinear Domains with Complex Immersed Boundaries,” *J. Comput. Phys.* **225** (2), 1782–1809 (2007).
11. P. Lucas, A. H. van Zuijlen, and H. Bijl, “Fast Unsteady Flow Computations with a Jacobian-Free Newton–Krylov Algorithm,” *J. Comput. Phys.* **229** (24), 9201–9215 (2010).
12. M. M. Nasr-Azadani and E. Meiburg, “TURBINS: An Immersed Boundary, Navier–Stokes Code for the Simulation of Gravity and Turbidity Currents Interacting with Complex Topographies,” *Comput. Fluids* **45** (1), 14–28 (2011).
13. M. Wang and L. Chen, “Multigrid Methods for the Stokes Equations using Distributive Gauss–Seidel Relaxations Based on the Least Squares Commutator,” *J. Sci. Comput.* **56** (2), 409–431 (2013).
14. M. Nickaen, A. Ouazzi, and S. Turek, “Newton Multigrid Least-Squares FEM for the V-V-P Formulation of the Navier–Stokes Equations,” *J. Comput. Phys.* **256**, 416–427 (2014).

15. F. A. Fairag and A. J. Wathen, “A Block Preconditioning Technique for the Streamfunction–Vorticity Formulation of the Navier–Stokes Equations,” *Numer. Methods Partial Differ. Equ.* **28** (3), 888–898 (2012).
16. M. Benzi and Z. Wang, “Analysis of Augmented Lagrangian-Based Preconditioners for the Steady Incompressible Navier–Stokes Equations,” *SIAM J. Sci. Comput.* **33** (5), 2761–2784 (2011).
17. B. N. Jiang, T. L. Lin, and L. A. Povinelli, “Large-Scale Computation of Incompressible Viscous Flow by Least-Squares Finite Element Method,” *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* **114** (3–4), 213–231 (1994).
18. M. Ramšak and L. Škerget, “A Subdomain Boundary Element Method for High-Reynolds Laminar Flow using Stream Function–Vorticity Formulation,” *Int. J. Numer. Meth. Fluids* **46** (8), 815–847 (2004).
19. A. V. Plyasunova and A. G. Sleptsov, “Collocation Grid Method for Solving Nonlinear Parabolic Equations on Moving Grids,” *Model. Mekh.* **18** (4), 116–137 (1987).
20. G. F. Carey and B. N. Jiang, “Least-Squares Finite Element Method and Preconditioned Conjugate Gradient Solution,” *Int. J. Numer. Methods Eng.* **24** (7), 1283–1296 (1987).
21. B. N. Jiang, *The Least-Squares Finite Element Method: Theory and Applications in Computational Fluid Dynamics and Electromagnetics* (Springer, Berlin, 1998).
22. P. B. Bochev and M. D. Gunzburger, “Finite Element Methods of Least-Squares Type,” *SIAM Rev.* **40** (4), 789–837 (1998).
23. B. F. Soares, R. V. Garcia, P. C. Pinto, and E. C. Romao, “Interval Study of Convergence in the Solution of 1D Burgers by Least Squares Finite Element Method (LSFEM) + Newton Linearization,” *Sci. Res. Essays* **10** (16), 522–530 (2015).
24. L. G. Semin, A. G. Sleptsov, and V. P. Shapeev, “Collocation and Least Squares Method for Stokes Equations,” *Vychisl. Tekhnol.* **1** (2), 90–98 (1996).
25. L. Semin and V. Shapeev, “Constructing the Numerical Method for Navier–Stokes Equations Using Computer Algebra System,” in *Lecture Notes in Computer Science* (Springer, Heidelberg, 2005), Vol. 3718, pp. 367–378.
26. V. I. Isaev and V. P. Shapeev, “Development of the Collocations and Least Squares Method,” *Tr. Inst. Mat. Mekh. UrO RAN* **14** (1), 41–60 (2008) [Proc. Steklov Inst. Math. **261** (Suppl. 1), S87–S106 (2008)].
27. V. I. Isaev, V. P. Shapeev, and A. N. Cherepanov, “Numerical Simulation of Laser Welding of Thin Metallic Plates Taking into Account Convection in the Welding Pool,” *Teplofiz. Aeromekh.* **17** (3), 451–466 (2010) [Thermophys. Aeromech. **17** (3), 419–434 (2010)].
28. V. I. Isaev and V. P. Shapeev, “High-Order Accurate Collocations and Least Squares Method for Solving the Navier–Stokes Equations,” *Dokl. Akad. Nauk* **442** (4), 442–445 (2012) [Dokl. Math. **85** (1), 71–74 (2012)].
29. A. G. Sleptsov and Yu. I. Shokin, “An Adaptive Grid-Projection Method for Elliptic Problems,” *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.* **37** (5), 572–586 (1997) [Comput. Math. Math. Phys. **37** (5), 558–571 (1997)].
30. V. V. Beljaev and V. P. Shapeev, “The Collocation and Least Squares Method on Adaptive Grids in a Domain with a Curvilinear Boundary,” *Vychisl. Tekhnol.* **5** (4), 13–21 (2000).
31. V. P. Shapeev, V. I. Isaev, and S. V. Idimeshev, “The Collocations and Least Squares Method: Application to Numerical Solution of the Navier–Stokes Equations,” in *Proc. 6th European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering (ECCOMAS 2012), Vienna, Austria, Vienna, September 10–14, 2012* (Vienna Univ. of Tech., Vienna, 2012), p. 359.
32. V. P. Shapeev and E. V. Vorozhtsov, “Symbolic-Numeric Implementation of the Method of Collocations and Least Squares for 3D Navier–Stokes Equations,” in *Lecture Notes in Computer Science* (Springer, Heidelberg, 2012), Vol. 7442, pp. 321–333.
33. V. P. Shapeev, E. V. Vorozhtsov, V. I. Isaev, and S. V. Idimeshev, “The Method of Collocations and Least Residuals for Three-Dimensional Navier–Stokes Equations,” *Vychisl. Metody Programm.* **14**, 306–322 (2013).
34. V. P. Shapeev and E. V. Vorozhtsov, “CAS Application to the Construction of the Collocations and Least Residuals Method for the Solution of 3D Navier–Stokes Equations,” in *Lecture Notes in Computer Science* (Springer, Heidelberg, 2013), Vol. 8136, pp. 381–392.
35. V. Shapeev, “Collocation and Least Residuals Method and Its Applications,” *EPJ Web of Conferences* **108** (2016). doi: 10.1051/epjconf/201610801009
36. V. I. Isaev and V. P. Shapeev, “High-Accuracy Versions of the Collocations and Least Squares Method for the Numerical Solution of the Navier–Stokes Equations,” *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.* **50** (10), 1758–1770 (2010) [Comput. Math. Math. Phys. **50** (10), 1670–1681 (2010)].
37. A. V. Shapeev and P. Lin, “An Asymptotic Fitting Finite Element Method with Exponential Mesh Refinement for Accurate Computation of Corner Eddies in Viscous Flows,” *SIAM J. Sci. Comput.* **31** (3), 1874–1900 (2009).

38. O. Botella and R. Peyret, “Benchmark Spectral Results on the Lid-Driven Cavity Flow,” *Comput. Fluids* **27** (4), 421–433 (1998).
39. S. K. Golushko, S. V. Idimeshev, and V. P. Shapeev, “Application of Collocations and Least Residuals Method to Problems of the Isotropic Plates Theory,” *Vychisl. Tekhnol.* **18** (6), 31–43 (2013).
40. S. K. Golushko, S. V. Idimeshev, and V. P. Shapeev, “Development and Application of Collocations and Least Residuals Method to the Solution of Problems in Mechanics of Anisotropic Laminated Plates,” *Vychisl. Tekhnol.* **19** (5), 24–36 (2014).
41. V. P. Shapeev and V. A. Belyaev, “Versions of High Order Accuracy Collocation and Least Residuals Method in the Domain with a Curvilinear Boundary,” *Vychisl. Tekhnol.* **21** (5), 95–110 (2016).
42. D. Kharenko, C. Padovani, A. Pagni, et al., “Free Longitudinal Vibrations of Bimodular Beams: A Comparative Study,” *Int. J. Str. Stab. Dyn.* **11** (1), 23–56 (2011).
43. V. P. Shapeev and E. V. Vorozhtsov, “CAS Application to the Construction of the Collocations and Least Residuals Method for the Solution of the Burgers and Korteweg-de Vries–Burgers Equations,” in *Lecture Notes in Computer Science* (Springer, Heidelberg, 2014), Vol. 8660, pp. 432–446.
44. V. I. Isaev, A. N. Cherepanov, and V. P. Shapeev, “Numerical Study of Heat Modes of Laser Welding of Dissimilar Metals with an Intermediate Insert,” *Int. J. Heat Mass Transfer* **99**, 711–720 (2016).
45. E. V. Vorozhtsov and V. P. Shapeev, “Acceleration of Iterative Processes for Solving Boundary Value Problems by Combining the Krylov and Fedorenko Methods,” *Simvol Nauki* **10** (2), 24–43 (2015).
46. V. I. Isaev, V. P. Shapeev, and S. A. Eremin, “An Investigation of the Collocation and the Least Squares Method for Solution of Boundary Value Problems for the Navier–Stokes and Poisson Equations,” *Vychisl. Tekhnol.* **12** (3), 53–70 (2007).
47. I. B. Petrov and A. I. Lobanov, *Lectures on Computational Mathematics* (Binom, Moscow, 2006) [in Russian].
48. P. H. Chiu, T. W. H. Sheu, and R. K. Lin, “An Effective Explicit Pressure Gradient Scheme Implemented in the Two-Level Non-Staggered Grids for Incompressible Navier–Stokes Equations,” *J. Comput. Phys.* **227** (8), 4018–4037 (2008).
49. S. Wolfram, *The Mathematica Book* (Wolfram Media, Champaign, 2003).
50. Numerical Analysis Library of Moscow University Research Computing Center, Computing All Eigenvalues of a Symmetric Matrix by the QL Algorithm with Shifts.
<http://num-anal.srcc.msu.ru/lib.na/cat/ae/aeh2r.htm>. Cited February 15, 2017.
51. P. Wesseling, *An Introduction to Multigrid Methods* (Wiley, Chichester, 1992).
52. T. W. Tee and I. Sobey, *Spectral Method for the Unsteady Incompressible Navier–Stokes Equations in Gauge Formulation*, Report NA04/09 (Numerical Analysis Group, Oxford, 2004),
<http://eprints.maths.ox.ac.uk/1181/>. Cited February 15, 2017.
53. S. Albensoeder and H. C. Kuhlmann, “Accurate Three-Dimensional Lid-Driven Cavity Flow,” *J. Comput. Phys.* **206** (2), 536–558 (2005).
54. E. Erturk, T. C. Corke, and C. Gökçöl, “Numerical Solutions of 2-D Steady Incompressible Driven Cavity Flow at High Reynolds Numbers,” *Int. J. Numer. Methods Fluids* **48** (7), 747–774 (2005).
55. E. Erturk, “Discussions on Driven Cavity Flow,” *Int. J. Numer. Methods Fluids* **60** (3), 275–294 (2009).
56. R. Lim and D. Sheen, “Nonconforming Finite Element Method Applied to the Driven Cavity Flow,” arXiv preprint: 1502.04217v3 [math.NA] (Cornell Univ. Library, Ithaca, 2016), available at <https://arxiv.org/abs/1502.04217>