

УДК 519.63

doi 10.26089/NumMet.v17r215

АППРОКСИМАЦИОННЫЙ АЛГОРИТМ ОБРАБОТКИ ЗВУКОВЫХ ТОЧЕК В СХЕМЕ “КАБАРЕ”

В. М. Головизнин¹, А. В. Соловьев², В. А. Исаков³

Описана новая вычислительная технология расчета потоковых переменных на новом временном слое в разностных схемах типа “кабаре” для численного решения квазилинейных гиперболических уравнений в частных производных. Новая технология позволяет единообразно рассматривать все случаи возникновения звуковых точек и не нарушает свойства временной обратимости разностных схем при отсутствии нелинейной коррекции потоков.

Ключевые слова: системы уравнений гиперболического типа, уравнения мелкой воды над неровным дном, численные методы, звуковая точка, схема “кабаре”.

Введение. Для численного решения квазилинейных систем дифференциальных уравнений гиперболического типа, к числу которых относятся уравнения газовой динамики, магнитной гидродинамики, теории упругости, мелкой воды и др. [1, 2], разработано большое число вычислительных алгоритмов, имеющих свои достоинства и недостатки и, соответственно, разные области применимости.

Схему “кабаре” можно рассматривать как завершающий этап в развитии характеристического подхода (метода характеристик [3]) в процессе соединения его достоинств с достоинствами консервативных разностных схем (схемы улавливания скачков) [2].

Метод характеристик относится к числу наиболее точных методов численного решения одномерных нестационарных систем гиперболических уравнений. На течениях, в которых характеристики одного семейства не пересекаются, этот метод обладает свойством временной обратимости. Формально, на гладких решениях метод характеристик имеет второй порядок аппроксимации, а сильные и слабые разрывы, существование которых известно заранее, учитывает точно. Для одномерных уравнений мелкой воды над плоским дном это приводит к точному решению задачи о распаде произвольного разрыва. К недостаткам метода характеристик обычно относят сложность его обобщения на многомерный случай, отсутствие консервативности и трудности, возникающие при попытках учета мультифизичности на расчетных сетках с динамической топологией, определяемой в процессе вычислений.

Последний из перечисленных недостатков эффективно устраняется при переходе к сеточно-характеристическим схемам [4]. При сеточно-характеристическом подходе расчетная сетка задается независимо от свойств рассчитываемого течения и характеристики из заданных точек продолжают не вперед по времени, а назад (метод обратных характеристик). В точках пересечения характеристик с предыдущим временным слоем осуществляется численная интерполяция в эту точку значений из близлежащих сеточных элементов с заданным порядком точности. В зарубежных публикациях такой подход иногда называют “полулагранжевым”. В последние годы он достаточно активно используется в задачах глобальной динамики атмосферы [5]. Основную проблему при сеточно-характеристическом подходе представляет отсутствие консервативности. Предлагаются различные методы “консерватизации” сеточно-характеристических разностных схем, однако все они оказываются чрезвычайно громоздкими и, в силу этого, малоэффективными [6].

Проблема отсутствия консервативности у сеточно-характеристических разностных схем легко решается при переходе к балансно-характеристическим разностным схемам [7]. В балансно-характеристических схемах вводится два типа переменных: “консервативные” и “потоковые”. Для консервативных переменных записываются разностные законы сохранения, а для потоковых переменных используется метод обратных характеристик. При этом при интерполяции величин на текущем слое в точки пересечения с ним характеристик используются как потоковые, так и консервативные переменные. Это предъясняет повышенные

¹ Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, Ленинские горы, 119991, Москва; профессор, e-mail: gol@ibrae.ac.ru

² Институт проблем безопасного развития атомной энергетики РАН, Большая Тульская ул., д. 52, 115191, Москва; вед. науч. сотр., e-mail: solovjev@ibrae.ac.ru

³ Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, Ленинские горы, 119991, Москва; ассистент, e-mail: visakov@cs.msu.ru

требования к оперативной памяти, но она в настоящее время не является критическим вычислительным ресурсом.

К классу балансно-характеристических схем можно отнести и схему “кабаре” [8]. Ее особенность заключается в том, что вместо процедур интерполяции, приводящих к возникновению аппроксимационной вязкости, для определения потоковых переменных в ней используются процедуры экстраполяции.

Переход от интерполяционных процедур к экстраполяционным для систем гиперболических уравнений оказался принципиально важным, поскольку привел к возможности построения разностных схем, обладающих свойством временной обратимости на дозвуковых и сверхзвуковых течениях, в которых характеристики одного семейства не пересекаются. Временная обратимость, в частности, подразумевает отсутствие диссипации, обусловленной аппроксимационными явлениями. Акустические возмущения в таких схемах не затухают, двумерные вихри могут существовать бесконечно долго [8].

Схема “кабаре” консервативна, имеет второй порядок аппроксимации на нерегулярных расчетных сетках, минимально возможный компактный вычислительный шаблон, улучшенные по сравнению с другими схемами второго порядка дисперсионные характеристики и естественным образом включает в себя нелинейную коррекцию потоков, базирующуюся на принципе максимума [9]. Последнее позволяет относить ее к классу схем высокой разрешающей способности [10].

Практика использования схемы “кабаре” для решения многомерных нестационарных модельных и производственных газодинамических задач выявила как ее сильные стороны, так и определенные недостатки. К сильной стороне можно отнести ее универсальность, простоту распараллеливания и высокий модернизационный потенциал. К недостаткам — проблемы с робастностью на трансзвуковых течениях. Последнее связано с большим количеством возможных вариантов обработки так называемых “звуковых точек”. Описанные ранее алгоритмы, основанные на интуитивных физических представлениях [8, 11], не обеспечивают должной надежности расчетов.

Настоящая статья посвящена описанию нового подхода к обработке звуковых точек, не апеллирующего к физической интуиции и целиком основанного на понятии аппроксимации и требовании сохранения временной обратимости на трансзвуковых волнах разрежения. Изложение проводится на примере простейшей одномерной гиперболической системы уравнений — уравнениях мелкой воды над неровным дном.

1. Постановка задачи. Система уравнений мелкой воды над неровным дном включает в себя законы сохранения массы и импульса соответственно:

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial((H - b)u)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{(H - b)u}{\partial t} + \frac{((H - b)u^2)}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} g(H - b)^2 \right) = -g(H - b) \frac{\partial b}{\partial x}. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь x — пространственная координата; t — время; $H(x, t)$ — высота уровня жидкости; $u(x, t)$ — горизонтальная составляющая вектора скорости; $b(x)$ — функция, задающая рельеф дна; g — ускорение свободного падения (рис. 1).

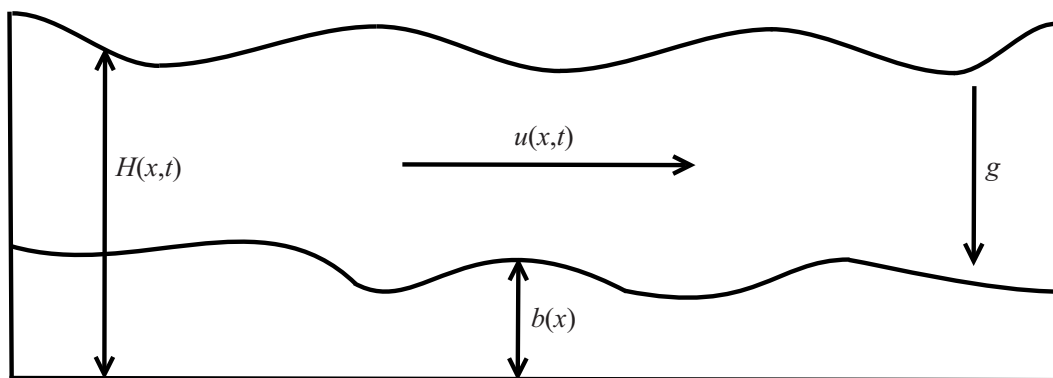


Рис. 1

Для определенности рассмотрим начально-краевую задачу в прямоугольной области $\Omega = [0; l] \times [0; T]$

с граничными и начальными условиями

$$\begin{aligned} H(0, t) &= H_L(t), & u(0, t) &= u_L(t), & 0 \leq t, \\ H(l, t) &= H_R(t), & u(l, t) &= u_R(t), & 0 \leq t, \\ H(x, 0) &= H_0(x), & u(x, 0) &= u_0(x), & 0 \leq x \leq l. \end{aligned}$$

При построении схемы “кабаре” используется как консервативная форма записи уравнений (1), так и их характеристическая форма:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \lambda_1 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{g}{c} \left(\frac{\partial H}{\partial t} + \lambda_1 \frac{\partial H}{\partial x} \right) - u \frac{g}{c} \frac{\partial b}{\partial x} &= 0, & \lambda_1 &= u + c; \\ \frac{\partial u}{\partial t} + \lambda_2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{g}{c} \left(\frac{\partial H}{\partial t} + \lambda_2 \frac{\partial H}{\partial x} \right) + u \frac{g}{c} \frac{\partial b}{\partial x} &= 0, & \lambda_2 &= u - c. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $c = \sqrt{g(H - b)}$.

2. Дискретизация задачи. В области Ω определим ортогональную расчетную сетку $w = w_h \times w_\tau$, где $w_h = \{x_i : x_{i+1} = x_i + \Delta x_{i+1/2}, i = \overline{0, N-1}\}$ – неравномерная сетка с шагом $\Delta x_{i+1/2} > 0$ по координатному направлению x и $w_\tau = \{t_n : t_{n+1} = t_n + \tau_n, n = \overline{0, K}\}$ – сетка по времени. Значения переменных (u, H) , отнесенные к узлам этой сетки, будем называть “потокowymi” переменными и отмечать целыми индексами: (u_i^n, H_i^n) . Кроме того, будем оперировать с “консервативными” переменными, отнесенными к центрам пространственных ячеек: $(u_{i+1/2}^n, H_{i+1/2}^n, u_{i+1/2}^{n+1/2}, H_{i+1/2}^{n+1/2})$. Консервативные переменные на промежуточных слоях по времени $t_{n+1/2} = t_n + 0.5\tau_n$ будем в дальнейшем называть “промежуточными”. Рельеф дна $b(x)$ будем задавать его значениями в узлах сетки b_i .

3. Вычисление консервативных переменных. Алгоритм схемы “кабаре” можно условно разбить на три этапа.

На первом этапе (фаза 1) алгоритма вычисляются значения консервативных переменных в центрах пространственно-временных ячеек $\Omega_{i+1/2}^{n+1/2}$ по консервативной явной схеме, имеющей второй порядок аппроксимации по пространству и первый по времени:

$$\begin{aligned} \frac{H_{i+1/2}^{n+1/2} - H_{i+1/2}^n}{0.5\tau_n} + \frac{[(H - b)u]_{i+1}^n - [(H - b)u]_i^n}{\Delta x_{i+1/2}} &= 0; \\ \frac{[(H - b)u]_{i+1/2}^{n+1/2} - [(H - b)u]_{i+1/2}^n}{0.5\tau_n} + \frac{[(H - b)u^2]_{i+1}^n - [(H - b)u^2]_i^n}{\Delta x_{i+1/2}} + \\ &+ \frac{1}{2} g \frac{[(H - b)^2]_{i+1}^n - [(H - b)^2]_i^n}{\Delta x_{i+1/2}} = -g(H_{i+1/2}^n - b_{i+1/2}) \frac{b_{i+1} - b_i}{\Delta x_{i+1/2}}. \end{aligned} \quad (3)$$

Для того чтобы эта схема не приводила к нарушению состояния покоя ($u_i^{n+1/2} = u_i^n = 0$) горизонтальной водной поверхности ($H_i^{n+1/2} = H_i^n = H_0$) при произвольной функции донного рельефа, достаточно потребовать выполнения соотношения $b_{i+1/2} = 0.5(b_{i+1} + b_i)$.

Второй этап (фаза 2) алгоритма рассмотрен ниже в разделе 5. На третьем этапе (фаза 3) при уже известных значениях потокowych переменных на новом временном слое по консервативной “неявной” схеме явным образом вычисляются значения консервативных переменных $u_{i+1/2}^{n+1}$ и $H_{i+1/2}^{n+1}$:

$$\begin{aligned} \frac{H_{i+1/2}^{n+1} - H_{i+1/2}^{n+1/2}}{0.5\tau_n} + \frac{[(H - b)u]_{i+1}^{n+1} - [(H - b)u]_i^{n+1}}{\Delta x_{i+1/2}} &= 0; \\ \frac{[(H - b)u]_{i+1/2}^{n+1} - [(H - b)u]_{i+1/2}^{n+1/2}}{0.5\tau_{n+1}} + \frac{[(H - b)u^2]_{i+1}^{n+1} - [(H - b)u^2]_i^{n+1}}{\Delta x_{i+1/2}} + \\ &+ \frac{1}{2} g \frac{[(H - b)^2]_{i+1}^{n+1} - [(H - b)^2]_i^{n+1}}{\Delta x_{i+1/2}} = -g(H_{i+1/2}^{n+1/2} - b_{i+1/2}) \frac{b_{i+1} - b_i}{\Delta x_{i+1/2}}. \end{aligned} \quad (4)$$

Если сложить схемы (3) и (4), то результирующая схема останется консервативной и будет иметь второй порядок аппроксимации, как по времени, так и по пространству на неравномерных расчетных сетках.

4. Выбор величины шага по времени. Перед началом выполнения фазы 1 алгоритма определяется шаг по времени по формуле $\tau_n = \text{CFL} \min_i \left\{ \frac{\Delta x_{i+1/2}}{(|\lambda_1|)_{i+1/2}^n}, \frac{\Delta x_{i+1/2}}{(|\lambda_2|)_{i+1/2}^n} \right\}$, где $\text{CFL} \in (0; 1]$ — число Куранта–Фридрихса–Леви и

$$(\lambda_1)_{i+1/2}^n = u_{i+1/2}^n + c_{i+1/2}^n; \quad (\lambda_2)_{i+1/2}^n = u_{i+1/2}^n - c_{i+1/2}^n; \quad c_{i+1/2}^n = \sqrt{g(H_{i+1/2}^n - b_{i+1/2})}.$$

5. Вычисление потоковых переменных на новом временном слое. Центральным моментом для схемы “кабаре” является алгоритм вычисления на новом временном слое потоковых переменных. На этом этапе (фазе 2) используется характеристическая форма уравнений (2).

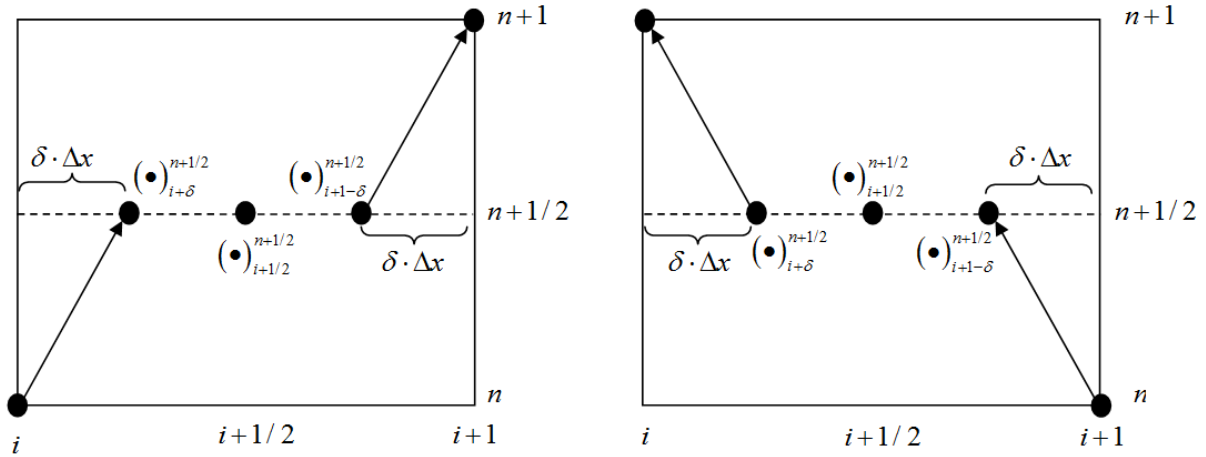


Рис. 2

После первой фазы по вычисленным промежуточным консервативным переменным определяются характеристические скорости, отнесенные к центрам пространственно-временных расчетных ячеек:

$$(\lambda_1)_{i+1/2}^{n+1/2} = u_{i+1/2}^{n+1/2} + c_{i+1/2}^{n+1/2}; \quad (\lambda_2)_{i+1/2}^{n+1/2} = u_{i+1/2}^{n+1/2} - c_{i+1/2}^{n+1/2}; \quad c_{i+1/2}^{n+1/2} = \sqrt{g(H_{i+1/2}^{n+1/2} - b_{i+1/2})}.$$

Пусть $(\lambda_1)_{i+1/2}^{n+1/2} > 0$. Аппроксимируем первое уравнение системы (2) разностной схемой (левый рис. 2):

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \lambda_1 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{g}{c} \left(\frac{\partial H}{\partial t} + \lambda_1 \frac{\partial H}{\partial x} \right) - u \frac{g}{c} \frac{\partial b}{\partial x} &= \frac{u_{i+\delta}^{n+1/2} - u_{i+\delta}^n}{\tau_n/2} + (\lambda_1)_{i+1/2}^{n+1/2} \frac{u_{i+\delta}^n - u_i^n}{\delta \Delta x_{i+1/2}} + \\ &+ \left(\frac{g}{c} \right)_{i+1/2}^{n+1/2} \left[\frac{H_{i+\delta}^{n+1/2} - H_{i+\delta}^n}{\tau_n/2} + (\lambda_1)_{i+1/2}^{n+1/2} \frac{H_{i+\delta}^n - H_i^n}{\delta \Delta x_{i+1/2}} \right] - \\ &- u_{i+1/2}^n \left(\frac{g}{c} \right)_{i+1/2}^{n+1/2} \frac{b_{i+1} - b_i}{\Delta x_{i+1/2}} + O_1(\tau_n, \Delta x_{i+1/2}) = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь $\delta = (0.5(\lambda_1)_{i+1/2}^{n+1/2} \tau_n) / \Delta x_{i+1/2}$ определяется по пересечению характеристики, выпущенной из левого нижнего угла ячейки, с промежуточным временным слоем $t_{n+1/2}$.

Аналогичную аппроксимацию можно записать и для правого верхнего угла расчетной ячейки:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \lambda_1 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{g}{c} \left(\frac{\partial H}{\partial t} + \lambda_1 \frac{\partial H}{\partial x} \right) - u \frac{g}{c} \frac{\partial b}{\partial x} &= \frac{u_{i+1}^{n+1/2} - u_{i+1}^n}{\tau_n/2} + (\lambda_1)_{i+1/2}^{n+1/2} \frac{u_{i+1}^{n+1/2} - u_{i+1-\delta}^n}{\delta \Delta x_{i+1/2}} + \\ &+ \left(\frac{g}{c} \right)_{i+1/2}^{n+1/2} \left[\frac{H_{i+1}^{n+1/2} - H_{i+1}^n}{\tau_n/2} + (\lambda_1)_{i+1/2}^{n+1/2} \frac{H_{i+1}^n - H_{i+1-\delta}^n}{\delta \Delta x_{i+1/2}} \right] - \\ &- u_{i+1/2}^n \left(\frac{g}{c} \right)_{i+1/2}^{n+1/2} \frac{b_{i+1} - b_i}{\Delta x_{i+1/2}} + O_2(\tau_n, \Delta x_{i+1/2}) = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Учитывая определение величины δ , схемы (5) и (6) преобразуем соответственно к виду

$$\begin{aligned} & (u_{i+\delta}^{n+1/2} - u_{i+\delta}^n) + (u_{i+\delta}^n - u_i^n) + \left(\frac{g}{c}\right)_{i+1/2}^{n+1/2} \left[(H_{i+\delta}^{n+1/2} - H_{i+\delta}^n) + (H_{i+\delta}^n - H_i^n) \right] - \\ & - \frac{\tau_n}{2} u_{i+1/2}^n \left(\frac{g}{c}\right)_{i+1/2}^{n+1/2} \frac{b_{i+1} - b_i}{\Delta x_{i+1/2}} + \frac{\tau_n}{2} O_1(\tau_n, \Delta x_{i+1/2}) = 0; \\ & (u_{i+1}^{n+1} - u_{i+1}^{n+1/2}) + (u_{i+1}^{n+1/2} - u_{i+1-\delta}^{n+1/2}) + \left(\frac{g}{c}\right)_{i+1/2}^{n+1/2} \left[(H_{i+1}^{n+1} - H_{i+1}^{n+1/2}) + (H_{i+1}^{n+1/2} - H_{i+1-\delta}^{n+1/2}) \right] - \\ & - \frac{\tau_n}{2} u_{i+1/2}^n \left(\frac{g}{c}\right)_{i+1/2}^{n+1/2} \frac{b_{i+1} - b_i}{\Delta x_{i+1/2}} + \frac{\tau_n}{2} O_2(\tau_n, \Delta x_{i+1/2}) = 0; \end{aligned}$$

Дальнейшие очевидные упрощения приводят к соотношениям

$$\begin{aligned} & (u_{i+\delta}^{n+1/2} - u_i^n) + \left(\frac{g}{c}\right)_{i+1/2}^{n+1/2} (H_{i+\delta}^{n+1/2} - H_i^n) - \\ & - \frac{\tau_n}{2} u_{i+1/2}^n \left(\frac{g}{c}\right)_{i+1/2}^{n+1/2} \frac{b_{i+1} - b_i}{\Delta x_{i+1/2}} + \frac{\tau_n}{2} O_1(\tau_n, \Delta x_{i+1/2}) = 0; \\ & (u_{i+1}^{n+1} - u_{i+1-\delta}^{n+1/2}) + \left(\frac{g}{c}\right)_{i+1/2}^{n+1/2} (H_{i+1}^{n+1} - H_{i+1-\delta}^{n+1/2}) - \\ & - \frac{\tau_n}{2} u_{i+1/2}^n \left(\frac{g}{c}\right)_{i+1/2}^{n+1/2} \frac{b_{i+1} - b_i}{\Delta x_{i+1/2}} + \frac{\tau_n}{2} O_2(\tau_n, \Delta x_{i+1/2}) = 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Введем следующие обозначения: $(I_1)_{i+\theta}^{n+\varepsilon} = u_{i+\theta}^{n+\varepsilon} + \left(\frac{g}{c}\right)_{i+1/2}^{n+1/2} H_{i+\theta}^{n+\varepsilon}$; $(I_2)_{i+\theta}^{n+\varepsilon} = u_{i+\theta}^{n+\varepsilon} - \left(\frac{g}{c}\right)_{i+1/2}^{n+1/2} H_{i+\theta}^{n+\varepsilon}$.

Величины $(I_k)_{i+\theta}^{n+\varepsilon}$, $k = 1, 2$, будем в дальнейшем называть локальными римановыми инвариантами. В новых обозначениях соотношения (7) принимают вид

$$\begin{aligned} & (I_1)_{i+\delta}^{n+1/2} - (I_1)_i^n - \frac{\tau_n}{2} u_{i+1/2}^n \left(\frac{g}{c}\right)_{i+1/2}^{n+1/2} \frac{b_{i+1} - b_i}{\Delta x_{i+1/2}} + \frac{\tau_n}{2} O_1(\tau_n, \Delta x_{i+1/2}) = 0; \\ & (I_1)_{i+1}^{n+1} - (I_1)_{i+1-\delta}^{n+1/2} - \frac{\tau_n}{2} u_{i+1/2}^n \left(\frac{g}{c}\right)_{i+1/2}^{n+1/2} \frac{b_{i+1} - b_i}{\Delta x_{i+1/2}} + \frac{\tau_n}{2} O_2(\tau_n, \Delta x_{i+1/2}) = 0. \end{aligned}$$

Вычитая из второго первое, получаем:

$$[(I_1)_{i+1}^{n+1} + (I_1)_i^n] - [(I_1)_{i+\delta}^{n+1/2} + (I_1)_{i+1-\delta}^{n+1/2}] - \frac{\tau_n}{2} O_1(\tau_n, \Delta x_{i+1/2}) + \frac{\tau_n}{2} O_2(\tau_n, \Delta x_{i+1/2}) = 0. \tag{8}$$

Точки плоскости (x, t) с индексами $(\bullet)_{i+\delta}^{n+1/2}$, $(\bullet)_{i+1-\delta}^{n+1/2}$ лежат на одинаковом расстоянии по разные стороны от центра ячейки $(\bullet)_{i+1/2}^{n+1/2}$. При достаточной гладкости полей скорости и уровня водной поверхности имеет место равенство

$$(I_1)_{i+\delta}^{n+1/2} + (I_1)_{i+1-\delta}^{n+1/2} = 2(I_1)_{i+1/2}^{n+1/2} + O(\tau_n^2, \Delta x_{i+1/2}^2),$$

подставляя которое в (8), с точностью до величин второго порядка малости окончательно получаем

$$(I_1)_{i+1}^{n+1} = 2(I_1)_{i+1/2}^{n+1/2} - (I_1)_i^n.$$

Случай $(\lambda_1)_{i+1/2}^{n+1/2} < 0$ является зеркально симметричным рассмотренному относительно вертикальной прямой $x_{i+1/2}$ (правый рис. 2) и приводит к соотношению $(I_1)_i^{n+1} = 2(I_1)_{i+1/2}^{n+1/2} - (I_1)_{i+1}^n$.

Для локального инварианта (I_2) ситуация повторяется, и мы получаем следующие общие правила экстраполяции локальных римановых инвариантов в пределах расчетной ячейки:

$$\begin{cases} (I_k)_{i+1}^{n+1} = 2(I_k)_{i+1/2}^{n+1/2} - (I_k)_i^n, & \text{если } (\lambda_k)_{i+1/2}^{n+1/2} > 0; \\ (I_k)_i^{n+1} = 2(I_k)_{i+1/2}^{n+1/2} - (I_k)_{i+1}^n, & \text{если } (\lambda_k)_{i+1/2}^{n+1/2} < 0. \end{cases}$$

6. Нелинейная коррекция римановых инвариантов. Поскольку первая и третья фазы алгоритма “кабаре” обеспечивают второй порядок суммарной аппроксимации и алгоритм фазы 2 этот порядок не нарушает, то в соответствии с теоремой Годунова численное решение может терять монотонность в областях больших градиентов. Для сохранения монотонности необходимо использовать процедуру нелинейной коррекции потоков. Для схемы “кабаре” такая процедура базируется на использовании принципа максимума.

В пределах одной расчетной ячейки систему квазилинейных характеристических уравнений (2) с точностью до членов второго порядка малости заменим линейными уравнениями переноса

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_1}{\partial t} + (\lambda_1)_{i+1/2}^{n+1/2} \frac{\partial I_1}{\partial x} &= g\left(\frac{u}{c}\right)_{i+1/2}^{n+1/2} \frac{\partial b}{\partial x}; & I_1(x, t) &= u(x, t) + g\left(\frac{1}{c}\right)_{i+1/2}^{n+1/2} H(x, t); \\ \frac{\partial I_2}{\partial t} + (\lambda_2)_{i+1/2}^{n+1/2} \frac{\partial I_2}{\partial x} &= -g\left(\frac{u}{c}\right)_{i+1/2}^{n+1/2} \frac{\partial b}{\partial x}; & I_2(x, t) &= u(x, t) - g\left(\frac{1}{c}\right)_{i+1/2}^{n+1/2} H(x, t), \end{aligned}$$

для которых, при соблюдении условий Куранта–Фридрихса–Леви, выполняется принцип максимума в виде

$$\begin{cases} I_1(x_*, t_{n+1}) \leq \max(I_1)_{i+1/2}^{n+1/2}; & I_2(x_*, t_{n+1}) \leq \max(I_2)_{i+1/2}^{n+1/2}; \\ I_1(x_*, t_{n+1}) \geq \min(I_1)_{i+1/2}^{n+1/2}; & I_2(x_*, t_{n+1}) \geq \min(I_2)_{i+1/2}^{n+1/2}; \end{cases} \quad x_* = \begin{cases} x_{i+1}, & \text{если } (\lambda_k)_{i+1/2}^{n+1/2} > 0 \\ x_i, & \text{если } (\lambda_k)_{i+1/2}^{n+1/2} < 0, \end{cases}$$

где $k = 1, 2$ и

$$\begin{aligned} \max(I_1)_{i+1/2}^{n+1/2} &= \max_{x \in [x_i, x_{i+1}]} I_1(x, t_n) + \tau_n g\left(\frac{u}{c}\right)_{i+1/2}^{n+1/2} \frac{b_{i+1} - b_i}{\Delta x_{i+1/2}}; \\ \min(I_1)_{i+1/2}^{n+1/2} &= \min_{x \in [x_i, x_{i+1}]} I_1(x, t_n) + \tau_n g\left(\frac{u}{c}\right)_{i+1/2}^{n+1/2} \frac{b_{i+1} - b_i}{\Delta x_{i+1/2}}; \\ \max(I_2)_{i+1/2}^{n+1/2} &= \max_{x \in [x_i, x_{i+1}]} I_2(x, t_n) - \tau_n g\left(\frac{u}{c}\right)_{i+1/2}^{n+1/2} \frac{b_{i+1} - b_i}{\Delta x_{i+1/2}}; \\ \min(I_2)_{i+1/2}^{n+1/2} &= \min_{x \in [x_i, x_{i+1}]} I_2(x, t_n) - \tau_n g\left(\frac{u}{c}\right)_{i+1/2}^{n+1/2} \frac{b_{i+1} - b_i}{\Delta x_{i+1/2}}. \end{aligned}$$

При переходе от непрерывного распределения величин по нижней грани пространственно-временной расчетной ячейки к их сеточным значениям получаем

$$\begin{aligned} \max_{x \in [x_i, x_{i+1}]} I_1(x, t_n) &\approx \max\{(I_1)_i^n, (I_1)_{i+1/2}^n, (I_1)_{i+1}^n\}; \\ \min_{x \in [x_i, x_{i+1}]} I_1(x, t_n) &\approx \min\{(I_1)_i^n, (I_1)_{i+1/2}^n, (I_1)_{i+1}^n\}; \\ \max_{x \in [x_i, x_{i+1}]} I_2(x, t_n) &\approx \max\{(I_2)_i^n, (I_2)_{i+1/2}^n, (I_2)_{i+1}^n\}; \\ \min_{x \in [x_i, x_{i+1}]} I_2(x, t_n) &\approx \min\{(I_2)_i^n, (I_2)_{i+1/2}^n, (I_2)_{i+1}^n\}. \end{aligned}$$

Линейная экстраполяция локальных инвариантов может приводить к нарушению принципа максимума и к немонотонности численного решения. Для устранения этого явления достаточно использовать следующий алгоритм:

$$\begin{aligned} \text{если } I_1(x_*, t_{n+1}) &> \max(I_1)_{i+1/2}^{n+1/2}, & \text{то } I_1(x_*, t_{n+1}) &= \max(I_1)_{i+1/2}^{n+1/2}; \\ \text{если } I_1(x_*, t_{n+1}) &< \min(I_1)_{i+1/2}^{n+1/2}, & \text{то } I_1(x_*, t_{n+1}) &= \min(I_1)_{i+1/2}^{n+1/2}; \\ \text{если } I_2(x_*, t_{n+1}) &> \max(I_2)_{i+1/2}^{n+1/2}, & \text{то } I_2(x_*, t_{n+1}) &= \max(I_2)_{i+1/2}^{n+1/2}; \\ \text{если } I_2(x_*, t_{n+1}) &< \min(I_2)_{i+1/2}^{n+1/2}, & \text{то } I_2(x_*, t_{n+1}) &= \min(I_2)_{i+1/2}^{n+1/2}. \end{aligned}$$

Следует отметить, что корректировка локальных римановых инвариантов приводит к корректировке только потоковых переменных, что не нарушает консервативности всего вычислительного алгоритма.

7. Вычисление новых потоковых переменных в узле при отсутствии трансзвукового перехода. Если в двух ячейках, прилегающих к узлу с номером $i + 1$, характеристические скорости λ_1 и λ_2 не меняют знак, то в узел $(i + 1, n + 1)$ приходят ровно два экстраполянта, что позволяет вычислить в этом узле новые значения потоковых переменных. В дозвуковом случае экстраполянт I_1 приходит из левой ячейки, а экстраполянт I_2 — из правой. В результате получаем систему линейных уравнений

$$u_{i+1}^{n+1} + (G_1)_{i+1/2}^{n+1/2} H_{i+1}^{n+1} = (I_1)_{i+1}^{n+1}; \quad u_{i+1}^{n+1} - (G_2)_{i+3/2}^{n+1/2} H_{i+1}^{n+1} = (I_2)_{i+1}^{n+1}; \quad (9)$$

где $(G_1)_{i+1/2}^{n+1/2} = \left(\frac{g}{c}\right)_{i+1/2}^{n+1/2}$ и $(G_2)_{i+3/2}^{n+1/2} = \left(\frac{g}{c}\right)_{i+3/2}^{n+1/2}$.

При сверхзвуковом течении вправо оба экстраполянта приходят из левой ячейки, что дает

$$u_{i+1}^{n+1} + (G_1)_{i+1/2}^{n+1/2} H_{i+1}^{n+1} = (I_1)_{i+1}^{n+1}; \quad u_{i+1}^{n+1} - (G_2)_{i+1/2}^{n+1/2} H_{i+1}^{n+1} = (I_2)_{i+1}^{n+1}. \quad (10)$$

При сверхзвуковом течении влево имеем

$$u_{i+1}^{n+1} + (G_1)_{i+3/2}^{n+1/2} H_{i+1}^{n+1} = (I_1)_{i+1}^{n+1}; \quad u_{i+1}^{n+1} - (G_2)_{i+3/2}^{n+1/2} H_{i+1}^{n+1} = (I_2)_{i+1}^{n+1}. \quad (11)$$

Единый вид систем линейных уравнений (9)–(11) позволяет записать решение в виде

$$H_{i+1}^{n+1} = \frac{(I_1)_{i+1}^{n+1} - (I_2)_{i+1}^{n+1}}{(G_1)_*^{n+1/2} + (G_2)_*^{n+1/2}}; \quad u_{i+1}^{n+1} = \frac{(I_1)_{i+1}^{n+1} (G_2)_*^{n+1/2} + (I_2)_{i+1}^{n+1} (G_1)_*^{n+1/2}}{(G_1)_*^{n+1/2} + (G_2)_*^{n+1/2}}; \quad (12)$$

где символ * обозначает индекс ячейки, через которую вычисляется соответствующий экстраполянт.

Непосредственной проверкой нетрудно убедиться в том, что состояние покоя $u_{i+1} = 0$, $H_{i+1}^n = H_0$ в любом случае не нарушится при любом рельефе дна $b_i < H_0$.

8. Трансзвуковые течения. Трансзвуковые течения отличаются от описанных в предыдущем разделе тем, что одна или обе характеристические скорости имеют разные знаки в ячейках слева и справа от узла: $\text{sgn} \left[(\lambda_1)_{i+1/2}^{n+1/2} \right] \neq \text{sgn} \left[(\lambda_1)_{i+3/2}^{n+1/2} \right]$ и/или $\text{sgn} \left[(\lambda_2)_{i+1/2}^{n+1/2} \right] \neq \text{sgn} \left[(\lambda_2)_{i+3/2}^{n+1/2} \right]$.

Если, например, $(\lambda_1)_{i+1/2}^{n+1/2} > 0$ и $(\lambda_1)_{i+3/2}^{n+1/2} < 0$, то в узел с номером $i + 1$ приходят два экстраполянта для локального инварианта I_1 . Для поиска решения вида (12) нужен один из них. Простейшим и, казалось бы, очевидным решением этого вопроса мог бы быть выбор экстраполянта исходя из оценки характеристической скорости в узле как полусуммы характеристических скоростей в ячейках:

$$(\lambda_k)_{i+1}^{n+1/2} = \frac{(\lambda_k)_{i+1/2}^{n+1/2} + (\lambda_k)_{i+3/2}^{n+1/2}}{2}, \quad k = 1, 2. \quad (13)$$

В таком случае выбор среди экстраполянтов (9)–(11) для решения (12) производится единым образом для всех типов течения на основе знака соответствующей характеристической скорости (13).

Описанный способ выбора экстраполянтов, однако, создает особенности в районе перехода характеристических скоростей через скорость звука (звуковая точка). Ниже будет описан алгоритм учета звуковых точек. Тестовые расчеты будут проведены с применением формулы (13) как с использованием такого алгоритма, так и без его использования.

9. Временная обратимость. Замена направления течения времени ($t \rightarrow -t$) приводит к изменению знаков скоростей ($u \rightarrow -u$). Если при этом повернуть плоскость (x, t) на 180° против часовой стрелки, то схема “кабаре” при таком преобразовании для дозвуковых и сверхзвуковых скоростей остается неизменной. На практике это проявляется в том, что на задаче о распаде разрыва, когда решением является волна разрежения, численное решение при отключенной процедуре коррекции потоков обратимо по времени. Если провести такой расчет до некоторого момента t_* , принять полученный результат за начальные данные и заменить скорости на противоположные, то последующий счет приведет к восстановлению начального разрыва. Следует отметить, что при расчете волн разрежения условий для коррекции потоков на основе принципа максимума не возникает.

Это говорит об отсутствии в схеме аппроксимационной вязкости. Бездиссипативность оказывается важной при расчете задач аэроакустики [12] и вихревых и турбулентных течений [13].

Требование сохранения временной обратимости на трансзвуковых течениях может служить конструктивным правилом отбора при разработке алгоритмов учета звуковых точек.

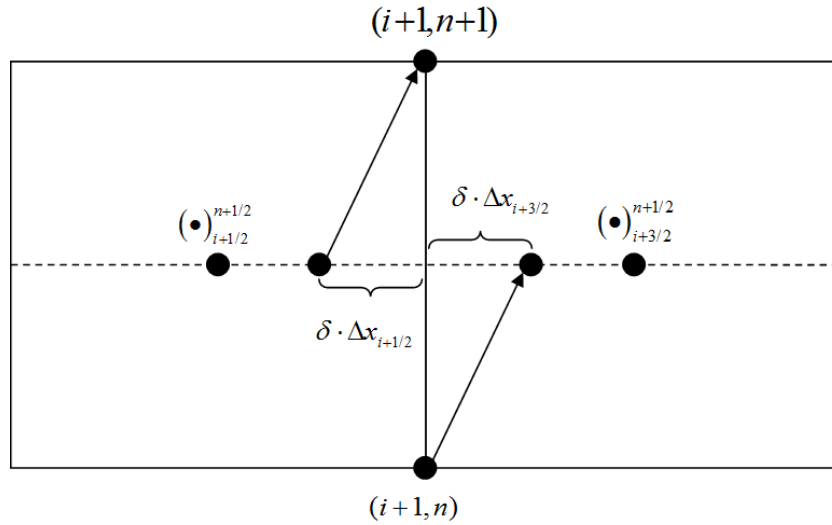


Рис. 3

10. Трансзвуковые течения. Звуковые точки. В случае, когда хотя бы одна из характеристических скоростей λ_k в соседних ячейках меняет знак (появляется “звуковая” точка), число приходящих на границу экстраполянтов либо уменьшается, либо увеличивается на единицу. Так, при переходе от звукового течения вправо к сверхзвуковому в правой ячейке оба экстраполянта будут направлены в правый угол и в узел $(i + 1, n + 1)$ придет только один экстраполянт I_1 из левой ячейки. При переходе от сверхзвукового течения к дозвуковому появится один “лишний” инвариант слева. В обоих случаях новые потоковые переменные не могут быть вычислены однозначно (рис. 3).

При возникновении звуковой точки алгоритм фазы 2 нуждается в корректировке. Некоторые варианты такой корректировки, не отвечающие принципу временной обратимости, предложены в [8, 11]. Временная обратимость трансзвуковых течений может быть сохранена при распространении алгоритма, описанного в разделе 5 для внутренности расчетной ячейки $(i + 1/2, n + 1/2)$ на окрестность ребра, в которой происходит смена знака характеристической скорости. Эта цель может быть достигнута следующим образом.

Линейной интерполяцией со вторым порядком точности находятся значения консервативной скорости и скорости звука в точке $(i + 1, n + 1/2)$:

$$c_{i+1}^{n+1/2} = (c_{i+1/2}^{n+1/2} \cdot \Delta x_{i+3/2} + c_{i+3/2}^{n+1/2} \cdot \Delta x_{i+1/2}) / (\Delta x_{i+1/2} + \Delta x_{i+3/2});$$

$$u_{i+1}^{n+1/2} = (u_{i+1/2}^{n+1/2} \cdot \Delta x_{i+3/2} + u_{i+3/2}^{n+1/2} \cdot \Delta x_{i+1/2}) / (\Delta x_{i+1/2} + \Delta x_{i+3/2}).$$

Далее определяется высота уровня свободной границы жидкости $H_{i+1}^{n+1/2} = (c_{i+1}^{n+1/2})^2 / g + b_{i+1}$ по скорости звука в этой точке. Почти без изменений повторяется процедура построения интерполянта, описанная в разделе 5 для расчетной ячейки $(i + 1/2)$, с той лишь разницей, что величина δ вычисляется таким образом:

$$\delta = (0.5 \cdot (\lambda_k)_{i+1}^{n+1/2} \cdot \tau_n) / \Delta x_{i+1}; \quad \Delta x_{i+1} = 0.5 \cdot (\Delta x_{i+1/2} + \Delta x_{i+3/2});$$

$$(\lambda_1)_{i+1}^{n+1/2} = u_{i+1}^{n+1/2} + c_{i+1}^{n+1/2}; \quad (\lambda_2)_{i+1}^{n+1/2} = u_{i+1}^{n+1/2} - c_{i+1}^{n+1/2}.$$

В результате прямая характеристика проходит через узел $(i + 1, n)$, а обратная — через узел $(i + 1, n + 1)$.

Рассмотрим для определенности ситуацию, когда знак меняет характеристическая скорость λ_1 . Случай с λ_2 рассматривается аналогично. Локальные римановы инварианты будут иметь вид

$$(I_1)_{i+1}^n = u_{i+1}^n + \left(\frac{g}{c}\right)_{i+1}^{n+1/2} H_{i+1}^n; \quad (I_1)_{i+1}^{n+1/2} = u_{i+1}^{n+1/2} + \left(\frac{g}{c}\right)_{i+1}^{n+1/2} H_{i+1}^{n+1/2}; \quad (I_1)_{i+1}^{n+1} = u_{i+1}^{n+1} + \left(\frac{g}{c}\right)_{i+1}^{n+1/2} H_{i+1}^{n+1};$$

$$\widehat{(I_1)}_{i+1/2}^{n+1/2} = u_{i+1/2}^{n+1/2} + \left(\frac{g}{c}\right)_{i+1/2}^{n+1/2} H_{i+1/2}^{n+1/2}; \quad \widehat{(I_1)}_{i+3/2}^{n+1/2} = u_{i+3/2}^{n+1/2} + \left(\frac{g}{c}\right)_{i+3/2}^{n+1/2} H_{i+3/2}^{n+1/2}.$$

Выкладки, аналогичные представленным в разделе 5, приводят к экстраполяционной формуле

$$(I_1)_{i+1}^{n+1} = 2 \cdot (I_1)_{i+1}^{n+1/2} - (I_1)_{i+1}^n;$$

Нелинейную коррекцию новых значений инварианта естественно осуществлять по такому алгоритму:

$$\begin{aligned} \text{если } I_1(x_{i+1}, t_{n+1}) > \max(I_1)_{i+1}^{n+1/2}, \quad \text{то } I_1(x_{i+1}, t_{n+1}) &= \max(I_1)_{i+1}^{n+1/2}; \\ \text{если } I_1(x_{i+1}, t_{n+1}) < \min(I_1)_{i+1}^{n+1/2}, \quad \text{то } I_1(x_{i+1}, t_{n+1}) &= \min(I_1)_{i+1}^{n+1/2}. \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} \max(I_1)_{i+1}^{n+1/2} &= \max \left\{ (I_1)_{i+1}^n, \widehat{(I_1)}_{i+1/2}^{n+1/2}, \widehat{(I_1)}_{i+3/2}^{n+1/2} \right\} + \tau_n \cdot g \left(\frac{u}{c} \right)_{i+1}^{n+1/2} \cdot \frac{b_{i+2} - b_i}{\Delta x_{i+1/2} + \Delta x_{i+3/2}}; \\ \min(I_1)_{i+1}^{n+1/2} &= \min \left\{ (I_1)_{i+1}^n, \widehat{(I_1)}_{i+1/2}^{n+1/2}, \widehat{(I_1)}_{i+3/2}^{n+1/2} \right\} + \tau_n \cdot g \left(\frac{u}{c} \right)_{i+1}^{n+1/2} \cdot \frac{b_{i+2} - b_i}{\Delta x_{i+1/2} + \Delta x_{i+3/2}}. \end{aligned}$$

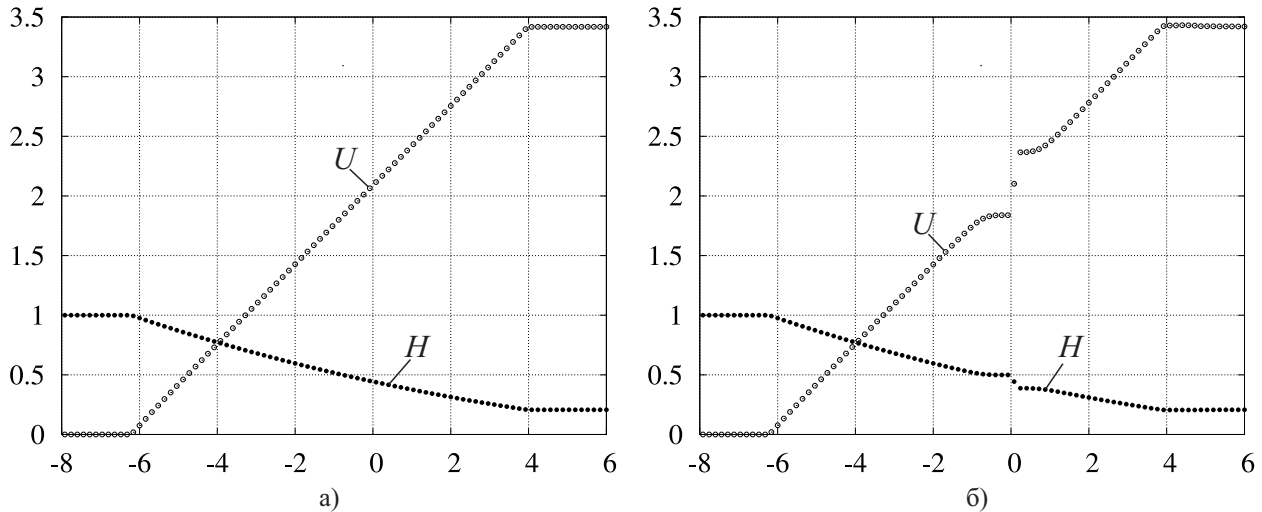


Рис. 4. Расчет трансзвуковой волны разрежения: а) с применением алгоритма обработки звуковой точки; б) без использования этого алгоритма

По найденному значению инварианта $(I_1)_{i+1}^{n+1}$ и известному инварианту $(I_2)_{i+1}^{n+1}$ решая систему линейных уравнений

$$u_{i+1}^{n+1} + \left(\frac{g}{c} \right)_{i+1}^{n+1/2} H_{i+1}^{n+1} = (I_1)_{i+1}^{n+1}, \quad u_{i+1}^{n+1} - \left(\frac{g}{c} \right)_{i+*}^{n+1/2} H_{i+1}^{n+1} = (I_2)_{i+1}^{n+1}, \quad (14)$$

находим новые потоковые переменные. Звездочка в (14) означает, что второй инвариант может приходиться из правой или левой ячейки, а также быть вычисленным по аналогичной описанной выше процедуре, если характеристическая скорость λ_2 тоже меняет знак.

Описанный алгоритм обработки звуковых точек сохраняет временную обратимость схемы “кабаре”, характерную для дозвуковых и сверхзвуковых течений.

11. Результаты тестовых расчетов. Ниже приведены результаты расчета задачи о распаде разрыва, приводящего к образованию волны разрежения, содержащей звуковую точку.

В начальный момент заданы кусочно-постоянные начальные данные для двух подобластей — области L для $x < 0$ и области R для $x > 0$. Вся расчетная область покрыта равномерной сеткой из 100 ячеек. Вычисления проводятся при параметрах CFL = 0.3 и $g = 9.81$ до момента времени $t \approx 2$ с точностью до одного вычислительного шага. Начальные данные слева и справа от разрыва представлены в таблице.

	L	R
H	1.0	0.206612
u	0	3.416828
b	0	0

Течение справа от разрыва является сверхзвуковым с числом Маха, равным 1.5. Звуковая точка лежит в точке разрыва $x = 0$. Результаты расчетов с применением описанного алгоритма иллюстрируются на рис. 4а и без него — на рис. 4б.

Результаты расчетов показали, что применение описанного алгоритма обработки звуковой точки позволило добиться гладкости решения в ее окрестности.

Заключение. Представленный алгоритм обработки звуковых точек, по существу, представляет собой консерватизированную схему “крест”, предложенную в [14] и хорошо зарекомендовавшую себя при решении стохастических уравнений Ландау–Лифшица. Фактически мы пришли к консервативному гибриду двух классических схем — схемы “крест” (LeapFrog) и схемы “кабаре” (UpwindLeapFrog), каждая из которых бездиссипативна и обратима по времени. Дисперсионные характеристики этих схем дополняют друг друга : при близких к нулю числах Куранта–Фридрихса–Леви они лучше у схемы “крест”, тогда как при больших 0.1 — существенно лучше у схемы “кабаре”. Гибридная схема остается бездиссипативной и обратимой по времени на течениях, в которых характеристики одного семейства не пересекаются.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 16–01–00333).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н.* Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1978.
2. *Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю.* Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: Физматлит, 2001.
3. *Жуков А.И.* Применение метода характеристик к численному решению одномерных задач газовой динамики // Тр. МИАН СССР. 1960. **58**. 3–150.
4. *Магомедов К.М., Холодов А.С.* Сеточно-характеристические численные методы. М.: Наука, 1988.
5. *Толстых М.А.* Глобальная полулагранжева модель численного прогноза погоды. Обнинск: ОАО ФОП, 2010.
6. *Tolstykh M.A., Shashkin V.V.* Vorticity–divergence mass-conserving semi-Lagrangian shallow-water model using the reduced grid on the sphere // J. of Comput. Phys. 2012. **231**, N 11. 4205–4233.
7. *Головизнин В.М., Карабасов С.А., Кобринский И.М.* Балансно-характеристические схемы с разделенными консервативными и потоковыми переменными // Математическое моделирование. 2003. **15**, № 9. 29–48.
8. *Головизнин В.М., Зайцев М.А., Карабасов С.А., Короткий И.А.* Новые алгоритмы вычислительной гидродинамики для многопроцессорных вычислительных комплексов. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2013.
9. *Головизнин В.М., Карабасов С.А.* Нелинейная коррекция схемы Кабаре // Математическое моделирование. 1998. **10**, № 12. 107–123.
10. *Harten A.* High resolution schemes for hyperbolic conservation laws // J. of Comput. Phys. 1983. **49**, N 3. 357–393.
11. *Головизнин В.М., Карабасов С.А., Кондаков В.Г.* Обобщение схемы КАБАРЕ на двумерные ортогональные расчетные сетки // Математическое моделирование. 2013. **25**, № 7. 103–136.
12. *Faranosov G.A., Goloviznin V.M., Karabasov S.A., Kondakov V.G., Kopiev V.F., Zaitsev M.A.* CABARET method on unstructured hexahedral grids for jet noise computation // Computers and Fluids. 2013. **88**. 165–179.
13. *Асфандияров Д.Г., Головизнин В.М., Финогенов С.А.* Беспараметрический метод расчета турбулентного течения в плоском канале в широком диапазоне чисел Рейнольдса // ЖВМ и МФ. 2015. **55**, № 9. 1545–1558.
14. *Глотов В.Ю., Головизнин В.М., Карабасов С.А., Маркештейн А.П.* Новая схема “двухслойный крест” для моделирования стохастических уравнений Ландау–Лифшица // ЖВМ и МФ. 2014. **54**, № 2. 298–317.

Поступила в редакцию
07.04.2016

An Approximation Algorithm for the Treatment of Sound Points in the CABARET Scheme

V. M. Goloviznin¹, A. V. Solovjev², and V. A. Isakov³

¹ *Lomonosov Moscow State University, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics; Leninskie Gory, Moscow, 119991, Russia; Dr. Sci., Professor, e-mail: gol@ibrae.ac.ru*

² *Nuclear Safety Institute, Russian Academy of Sciences; ulitsa Bol'shaya Tul'skaya 52, Moscow, 115191, Russia; Ph.D., Leading Scientist, e-mail: solovjev@ibrae.ac.ru*

³ *Lomonosov Moscow State University, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics; Leninskie Gory, Moscow, 119991, Russia; Assistant, e-mail: visakov@cs.msu.ru*

Received April 7, 2016

Abstract: A new numerical approach to the calculation of flux variables on a new time layer in the CABARET (Compact Accurately Boundary Adjusting-REsolution Technique) scheme for the numerical solution

of quasilinear hyperbolic differential equations is described. This approach allows one to uniformly treat all cases of sound points and does not violate the time reversibility properties of difference schemes in the absence of nonlinear correction of fluxes.

Keywords: systems of hyperbolic equations, shallow water equations with bottom topography, numerical methods, sound point, CABARET scheme.

References

1. B. L. Rozhdestvenskii and N. N. Yanenko, *Systems of Quasilinear Equations and Their Applications to Gas Dynamics* (Nauka, Moscow, 1978; Amer. Math. Soc., Providence, 1983).
2. A. G. Kulikovskii, N. V. Pogorelov, and A. Y. Semenov, *Mathematical Aspects of Numerical Solution of Hyperbolic Systems* (Fizmatlit, Moscow, 2001; CRCC Press, Boca Raton, 2001).
3. A. I. Zhukov, "Application of the Method of Characteristics to the Numerical Solution of One-Dimensional Problems of Gas Dynamics," *Tr. Mat. Inst. im. V.A. Steklova, Akad. Nauk SSSR* **58**, 3–150 (1960).
4. K. M. Magomedov and A. S. Kholodov, *Grid-Characteristic Numerical Methods* (Nauka, Moscow, 1988) [in Russian].
5. M. A. Tolstykh, *A Global Semi-Lagrangian Numerical Weather Prediction Model* (OAO FOP, Obninsk, 2010) [in Russian].
6. M. A. Tolstykh and V. V. Shashkin, "Vorticity–Divergence Mass-Conserving Semi-Lagrangian Shallow-Water Model Using the Reduced Grid on the Sphere," *J. Comput. Phys.* **231** (11), 4205–4233 (2012).
7. V. M. Goloviznin, S. A. Karabasov, and I. M. Kobrinskii, "Balance-Characteristic Schemes with Separated Conservative and Flux Variables," *Mat. Model.* **15** (9), 29–48 (2003).
8. V. M. Goloviznin, M. A. Zaitsev, S. A. Karabasov, and I. A. Korotkin, *New CFD Algorithms for Multiprocessor Computer Systems* (Mosk. Gos. Univ., Moscow, 2013) [in Russian].
9. V. M. Goloviznin and S. A. Karabasov, "Nonlinear Correction of Cabaret Scheme," *Mat. Model.* **10** (12), 107–123 (1998).
10. A. Harten, "High Resolution Schemes for Hyperbolic Conservation Laws," *J. Comput. Phys.* **49** (3), 357–393 (1983).
11. V. M. Goloviznin, S. A. Karabasov, and V. G. Kondakov, "Generalization of CABARET Scheme for Two-Dimensional Orthogonal Computational Grids," *Mat. Model.* **25** (7), 103–136 (2013) [Math. Models Comput. Simul. **6** (1), 56–79 (2014)].
12. G. A. Faranosov, V. M. Goloviznin, S. A. Karabasov, et al., "CABARET Method on Unstructured Hexahedral Grids for Jet Noise Computation," *Comput. Fluids* **88**, 165–179 (2013).
13. D. G. Asfandiyarov, V. M. Goloviznin, and S. A. Finogenov, "Parameter-Free Method for Computing the Turbulent Flow in a Plane Channel in a Wide Range of Reynolds Numbers," *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.* **55** (9), 1545–1558 (2015) [Comput. Math. Math. Phys. **55** (9), 1515–1526 (2015)].
14. V. Yu. Glotov, V. M. Goloviznin, S. A. Karabasov, and A. P. Markeshteijn, "New Two-Level Leapfrog Scheme for Modeling the Stochastic Landau–Lifshitz Equations," *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.* **54** (2), 298–317 (2014) [Comput. Math. Math. Phys. **54** (2), 315–334 (2014)].