

УДК 532.529

doi 10.26089/NumMet.v20r443

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ГИБРИДНОГО МЕТОДА КРУПНЫХ ЧАСТИЦ ДЛЯ РАСЧЕТА ТЕЧЕНИЙ МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ ГАЗОВЫХ СМЕСЕЙ

Д. В. Садин¹

Статья посвящена обобщению гибридного метода крупных частиц для численного моделирования течений многокомпонентных газовых смесей при наличии границ раздела газов с различными термодинамическими свойствами. Метод относится к алгоритмам сквозного расчета разрывов. Разностная схема является консервативной, однородной и имеет второй порядок аппроксимации по пространству и времени на гладких решениях. Результаты проверки на тестовых задачах в широком диапазоне чисел Маха и отношений газодинамических параметров подтвердили работоспособность метода. Выполнен анализ численных ошибок в окрестности контактных разрывов на сетках различного разрешения, свидетельствующий о сходимости результатов расчета к автомодельным решениям.

Ключевые слова: гибридный метод крупных частиц, многокомпонентная газовая смесь, тестовые задачи.

1. Введение. Течения газовых смесей, состоящих из газов с различными термодинамическими свойствами (например, показателями адиабаты), находят широкое применение в современных технологиях. Моделирование взаимодействия ударных волн с границами раздела таких газов порождает проблемы применения численных методов, связанные с осцилляциями на контактной границе, положительностью массовых концентраций компонентов смеси и консервативностью дискретных аналогов законов сохранения [1–3]. Существующие методы численного моделирования течений многокомпонентных газовых смесей можно разделить на две большие группы: алгоритмы выделения или отслеживания контактных разрывов (interface-tracking methods) [4–6] и методы сквозного расчета (interface-capturing methods) [7–9]. Следует отметить, что решение проблемы колебаний давления и скорости на контактной границе достигается, как правило, частичной потерей консервативности или однородности вычислительного алгоритма.

Целью настоящей работы является проверка работоспособности новой модификации — гибридного метода крупных частиц [10–12] в консервативной и конечно-объемной реализации на примерах тестовых задач взаимодействия ударных волн с границами раздела различных по физическим свойствам газов в широком диапазоне параметров течений.

2. Основные уравнения. Без ограничения общности рассмотрим динамику двухкомпонентной смеси калорически совершенных невязких газов в симметричной формулировке [3]:

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = 0, \tag{1}$$

$$\mathbf{q} = [\rho_1, \rho_2, \rho v, \rho E]^T, \quad \mathbf{G} = [\rho_1 v, \rho_2 v, \rho v^2, \rho E v]^T, \quad \mathbf{F} = [0, 0, p, p v]^T.$$

Здесь ρ_1, ρ_2, v, p и E — плотность соответствующих газов смеси, скорость, давление и полная энергия единицы массы смеси газов; \mathbf{q}, \mathbf{G} и \mathbf{F} — консервативные, потоковые, градиентные и деформационные величины соответственно; x и t — координата и время.

Полагаем, что давление смеси газов подчиняется закону Дальтона; внутренняя энергия аддитивна: $e = \rho c_v T$, где $\rho = \rho_1 + \rho_2$ — плотность смеси; $c_v = \chi_1 c_{v1} + \chi_2 c_{v2}$ — удельная теплоемкость смеси газов и его компонентов c_{v1}, c_{v2} ; $\chi_1 = \rho_1/\rho, \chi_2 = \rho_2/\rho$ — массовые концентрации газов, входящих в смесь. Замыкающее уравнение состояния имеет вид $p = (\gamma - 1)\rho e = (\gamma - 1)\rho(E - v^2/2)$. Показатель адиабаты двухкомпонентного газа γ определяется из соотношения

$$\gamma = \frac{\chi_1 c_{p1} + \chi_2 c_{p2}}{\chi_1 c_{v1} + \chi_2 c_{v2}},$$

где c_{p1}, c_{p2} — удельные теплоемкости компонентов смеси при постоянном объеме.

¹ Военно-космическая академия им. А.Ф. Можайского, ул. Ждановская, д. 13, 197198, г. Санкт-Петербург; профессор, e-mail: sadin@yandex.ru

3. Дискретная модель. Задача решается гибридным методом крупных частиц с настраиваемыми диссипативными свойствами (CDP2 — customizable dissipative properties) на равномерной сетке с шагом h в конечно-объемной реализации, при которой консервативные величины \mathbf{q}_i относятся к центрам контрольных объемов (ячеек) x_i . Поточковые величины $\mathbf{G}_{i\pm 1/2}$, градиентные и деформационные слагаемые $\mathbf{F}_{i\pm 1/2}$ уравнений (1) определяются на границах ячеек $x_{i\pm 1/2} = x_i \pm h/2$. Временной слой будем пометать верхним индексом k , а шаг по времени обозначим τ .

Переход на следующий временной слой t^{k+1} выполняется двухшаговым TVD-методом Рунге–Кутты:

$$\mathbf{q}^{(1)} = \mathbf{q}^k + \tau L(\mathbf{q}^k), \quad (2)$$

$$\mathbf{q}^{k+1} = 0.5(\mathbf{q}^k + \mathbf{q}^{(1)}) + 0.5\tau L(\mathbf{q}^{(1)}), \quad (3)$$

где $L(\mathbf{q}^k)$ — пространственный конечно-объемный оператор.

На каждом шаге производится расщепление разностных уравнений (2) и (3) по физическим процессам на лагранжев, эйлеров и заключительный этапы.

На первом (лагранжевом) этапе отбрасываются конвективные члены \mathbf{G} уравнений движения (1), а градиентные и деформационные слагаемые \mathbf{F} аппроксимируются центральными разностями:

$$\mathbf{q}_i^{(0)} = \mathbf{q}_i^k - (\mathbf{F}_{i+1/2}^k - \mathbf{F}_{i-1/2}^k) \tau/h. \quad (4)$$

Давление на гранях ячеек корректируется нелинейной добавкой: скалярной вязкостью $(1 - \psi_v)Q_{i\pm 1/2}^k$ типа Христенсена с ограничителем ψ_v (на гладких решениях $\psi_v \rightarrow 1$) [11, 12].

На втором (эйлеровом и заключительном) этапе численно воспроизводятся конвективные потоки через границы ячеек:

$$\mathbf{q}_i^{(1)} = \mathbf{q}_i^{(0)} - (\hat{\mathbf{G}}_{i+1/2}^{(0)} - \hat{\mathbf{G}}_{i-1/2}^{(0)}) \tau/h. \quad (5)$$

Поточковые величины $\hat{\mathbf{G}}_{i\pm 1/2}^{(0)}$ вычисляются путем гибридизации (аддитивной взвешенной ограничителем потоков ψ_f комбинации) центральной и противопоточной аппроксимаций [12]. Схема (2)–(5) имеет второй порядок аппроксимации по пространству и времени на гладких решениях.

Шаг по времени определяется из условия Куранта–Фридрихса–Леви:

$$\tau^k = \text{CFL} \cdot h / \max_{\forall i} (|v_i^k| + a_i^k) \quad \text{при} \quad \text{CFL} \leq 1,$$

где CFL — число Куранта; a_i^k — скорость звука в точке (x_i, t^k) .

4. Тестовые расчеты. Исходные данные и результаты решения представляются в безразмерном виде. Расчеты выполнялись на интервале $x \in (0, 1)$ до момента окончания счета T_f с числом Куранта 0.4 и коэффициентом искусственной вязкости $B_v = 1$. На левой $x = 0$ и правой $x = 1$ границах задавались “мягкие” краевые условия (экстраполяция параметров). Далее в качестве ограничителя вязкости ψ_v задан VANLEER [12], а потоков ψ_f — MINMOD [12] для всех тестов, за исключением теста 4.1 с нелинейной коррекцией потоков VANLEER.

4.1. Тест multicomponent Sod problem. Известная тестовая задача Сода (Sod problem) [13] широко используется для верификации разностных схем. Ее модификация [14, 15] для многокомпонентных газовых смесей для большого начального перепада давления и плотности имеет следующие начальные условия:

$$(\chi_1, \rho, v, p, \gamma)_L = (0.999999, 10, 0, 10, 1.4),$$

$$(\chi_1, \rho, v, p, \gamma)_R = (0.000001, 0.125, 0, 0.1, 1.2).$$

Начальный разрыв расположен в точке $x_0 = 0.4$. Здесь и ниже вектор параметров слева от разрыва помечен нижним индексом L , а справа R . В данном тесте первые четыре шага по времени осуществлялись с возрастающим числом Куранта 0.1, 0.2, 0.3 и далее 0.4.

Распределения плотности смеси, давления и скорости в момент времени $T_f = 1.9$ показаны на рис. 1. Численные результаты согласуются с автомодельными решениями и примерами расчетов других авторов [9, 15]. Ударная волна сглаживается на 2–3 ячейки, а контактный разрыв — на 6–7 ячеек. Колебания распределения скорости и давления в окрестности границы раздела газов невелики и уменьшаются при измельчении сетки. Заметим, что расчетный скачок уплотнения незначительно (на одну ячейку) опережает точное положение ударной волны (рис. 1в). Эта особенность наблюдается также в профиле скорости

по схеме КАБАРЕ (см. рис. 3 в [9]). В расчетных результатах по схеме WENO5 контактный разрыв отстает от точного положения раздела двух газов на 2–3 ячейки (см. fig. 8 в [15]). Причиной указанных численных дефектов на грубых сетках являются стартовые ошибки формирования профилей газодинамических параметров, на что ранее обратили внимание в [16, 17]. Вместе с тем, с увеличением количества расчетных ячеек численное решение сходится к автомодельному, что иллюстрируется расчетом на сетке с разрешением $h = 1/400$ (рис. 1г–1е).

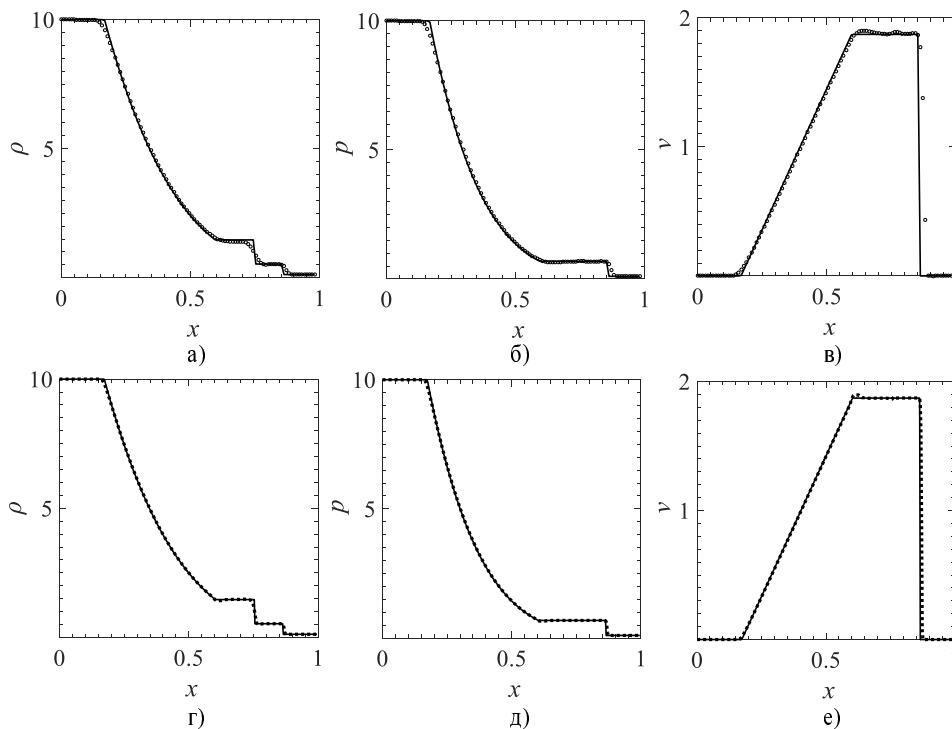


Рис. 1. Тест multicomponent Sod problem. Распределения плотности смеси а) и г), давления б) и д), скорости в) и е) в момент времени $T_f = 1.9$. Кружки и пунктир — расчет, а сплошная кривая — автомодельное решение. Сетка: 1/100 — верхний ряд, 1/400 — нижний ряд

4.2. Тест Liu et al. Задача движения сильной ударной волны в среде гелия и ее преломлении на контактной границе воздуха была предложена в [18], а затем в модифицированном виде изучалась в [8] и других работах. После взаимодействия ударной волны с числом Маха 8.96 с границей раздела газов происходит распад разрыва с прошедшей волной в слой воздуха, отраженным скачком уплотнения в среде гелия и стационарным (движущимся с постоянной скоростью) контактным разрывом (гелий/воздух). Начальные условия следующие:

$$(\chi_1, \rho, v, p, \gamma) = \begin{cases} (0.000001, 0.386, -0.5, 100.102, 1.667) & \text{при } 0 \leq x < 0.1, \\ (0.000001, 0.1, -0.5, 1, 1.667) & \text{при } 0.1 \leq x < 0.4, \\ (0.999999, 1, -0.5, 1, 1.4) & \text{при } 0.4 \leq x < 1. \end{cases}$$

На рис. 2 представлены численные результаты для плотности смеси, давления и скорости, полученные на сетках с разрешением $h = 1/200$ и $1/800$ в сравнении с точным решением в момент времени $T_f = 0.07$. На грубой сетке схема CDP2 допускает небольшие колебания давления и скорости, которые уменьшаются на подробных сетках. Относительные погрешности счетного давления $\delta p = \max_{x \in I} |p - p_{\text{ex}}| / p_{\text{ex}}$ (p_{ex} — точное значение давления) в окрестности контактного разрыва на интервале $I : x \in (0.7, 0.8)$ на указанных сетках составляют $\delta p_{200} = 0.02529$ и $\delta p_{800} = 0.006094$. Относительные ошибки скорости имеют близкие значения.

4.3. Тест. По невозмущенному воздуху распространяется ударная волна с числом Маха 3, которая встречает контактный разрыв со слоем гелия. Начальные условия задачи задаются таким образом, чтобы после преломления падающей ударной волны возникало движение границы раздела газов (воздух/гелий)

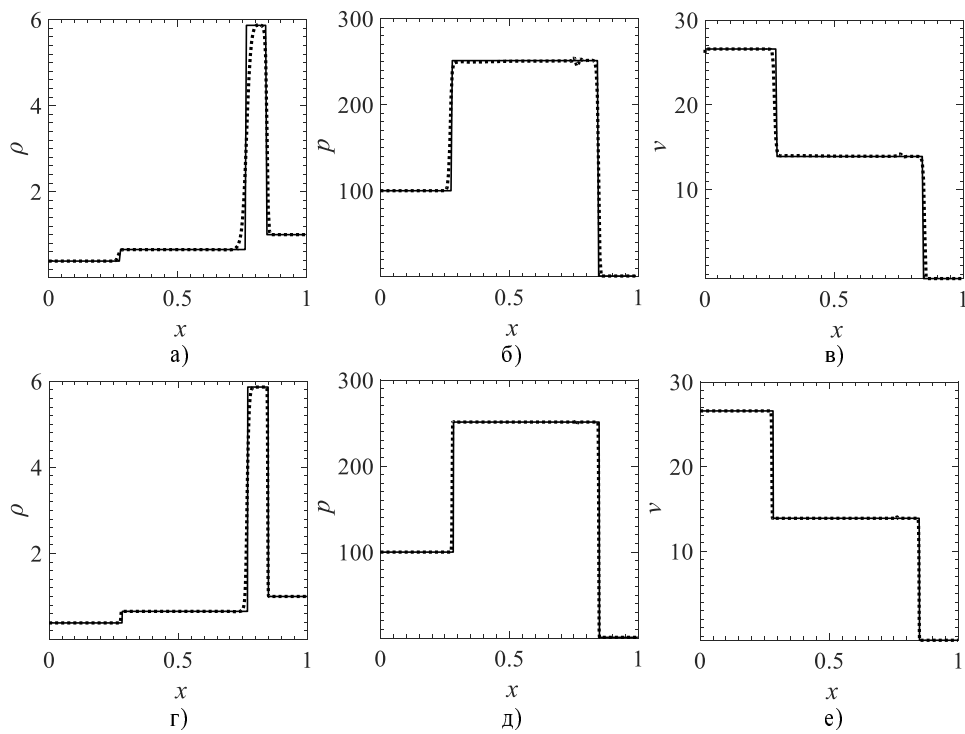


Рис. 2. Тест Liu et al. Распределения плотности смеси а) и г), давления б) и д), скорости в) и е) в момент времени $T_f = 0.07$. Пунктир — расчет, а сплошная кривая — автомодельное решение.

Сетка: 1/200 — верхний ряд, 1/800 — нижний ряд

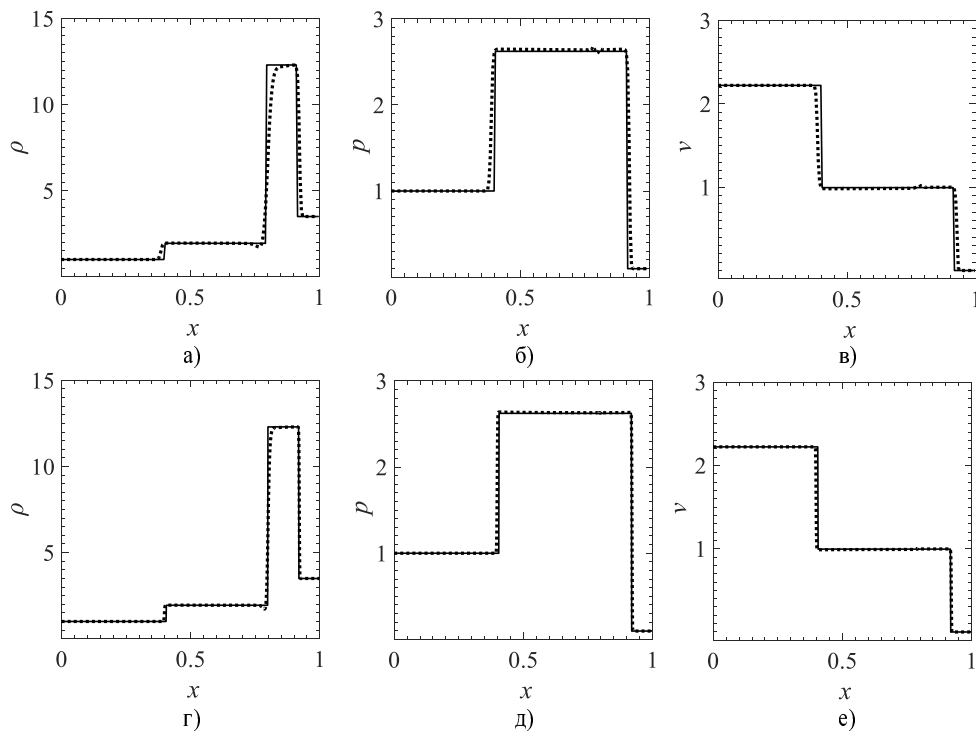


Рис. 3. Тест 4.3. Распределения плотности смеси а) и г), давления б) и д), скорости в) и е) в момент времени $T_f = 0.1844$. Пунктир — расчет, а сплошная кривая — автомодельное решение.

Сетка: 1/200 — верхний ряд, 1/800 — нижний ряд

с параметрами, близкими к тестовой задаче о движении изолированного контактного разрыва [19]:

$$(\chi_1, \rho, v, p, \gamma) = \begin{cases} (0.999999, 1, 2.22222, 1, 1.4) & \text{при } 0 \leq x < 0.3, \\ (0.999999, 0.259259, 0, 0.0967742, 1.4) & \text{при } 0.3 \leq x < 0.5, \\ (0.000001, 0.0357986, 0, 0.0967742, 1.667) & \text{при } 0.5 \leq x < 1. \end{cases}$$

Численные результаты на сетках с дискретизацией $h = 1/200$ и $1/800$ показаны на рис. 3. Время остановки расчета $T_f = 0.1844$. Начало взаимодействия ударной волны с границей раздела газов связано с формированием профилей газодинамических параметров и порождает так называемую “стартовую ошибку”, которая заметна на грубых сетках (рис. 3а–3в). С увеличением числа ячеек относительные погрешности расчета уменьшаются: например, для давления на интервале $I : x \in (0.7, 0.9)$ максимальные отклонения по отношению к точному распределению составляют $\delta p_{200} = 0.02162$ и $\delta p_{800} = 0.009912$. Численное решение сходится к автомодельному.

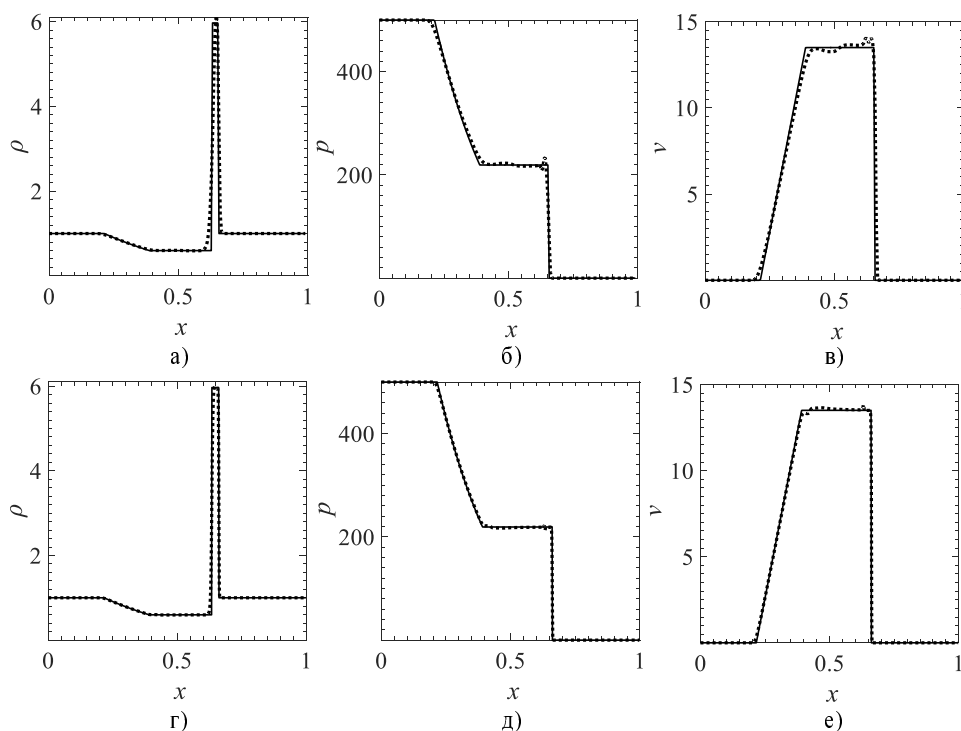


Рис. 4. Тест stiff shock-tube problem. Распределения плотности смеси а) и г), давления б) и д), скорости в) и е) в момент времени $T_f = 0.01$. Пунктир — расчет, а сплошная кривая — автомодельное решение. Сетка: $1/200$ — верхний ряд, $1/800$ — нижний ряд

4.4. Тест stiff shock-tube problem. Задача распада разрыва в ударной трубе с большим начальным отношением давления $2500/1$ предложена в [19], изучалась применительно к WENO-схеме в [20]. В камере высокого давления (слева) находится сжатая смесь гелия и воздуха с показателем адиабаты $\gamma_L = 1.6$, что соответствует массовой концентрации воздуха $\chi_1 = 0.595$. Справа от сечения $x_0 = 0.5$ расположен невозмущенный слой воздуха низкого давления. Время окончания счета $T_f = 0.01$. Начальные условия заданы в виде

$$(\chi_1, \rho, v, p, \gamma)_L = (0.595, 1, 0, 500, 1.6),$$

$$(\chi_1, \rho, v, p, \gamma)_R = (0.999999, 1, 0, 0.2, 1.667).$$

Вычислительной сложностью данной задачи является точность расчета слабого разрыва (разрыва первой производной решения) в области сопряжения волны разрежения и зоны постоянного течения, связанного с возникновением энтропийного следа в численном решении. В этом смысле эта задача аналогична тесту react problem, которая нами изучалась с использованием модифицированного (гибридного) метода крупных частиц [21].

Результаты решения задачи приведены на рис. 4. Относительные численные ошибки давления в области постоянного течения, примыкающего к волне разрежения (энтропийного следа) $I : x \in (0.4, 0.6)$ на сетках с шагом $h = 1/200$ и $1/800$ соответственно равны $\delta p_{200} = 0.06004$ и $\delta p_{800} = 0.01342$. Полученные данные сопоставимы с результатами, рассчитанными с использованием схемы WENO типа [20].

4.5. Тест Karni and Quirk. Данная одномерная задача является модельной для пространственного расчета взаимодействия слабой ударной волны с числом Маха 1.22 в воздухе с цилиндрическим или сферическим гелиевым пузырем [3]. Начальные условия следующие:

$$(\chi_1, \rho, v, p, \gamma) = \begin{cases} (0.999999, 1.37636, 0.394729, 1.5698, 1.4) & \text{при } 0 \leq x < 0.25, \\ (0.999999, 1, 0, 1, 1.4) & \text{при } 0.25 \leq x < 0.4 \cup 0.6 \leq x < 1, \\ (0.001, 0.1380803, 0, 1, 1.4) & \text{при } 0.4 \leq x < 0.6. \end{cases}$$

К моменту окончания счета $T_f = 0.35$ реализуется пять распадов разрывов: волна разрежения и две ударные волны слева от контактного разрыва (воздух/гелий), две ударные волны справа от границы раздела газов (гелий/воздух) и скачок уплотнения внутри слоя гелия. Итоговая ударно-волновая конфигурация в виде распределений плотности смеси, давления и скорости для двух разрешений сеток ($h = 1/400$ и $1/800$) представлена на рис. 5. Сплошной кривой показан расчет с шагом $1/8000$, принятый за эталон. Максимальные амплитуды погрешности давления в области правого контакта (гелий/воздух) на интервале $I : x \in (0.6, 0.7)$ составляют $\delta p_{400} = 0.009790$ и $\delta p_{800} = 0.004836$.

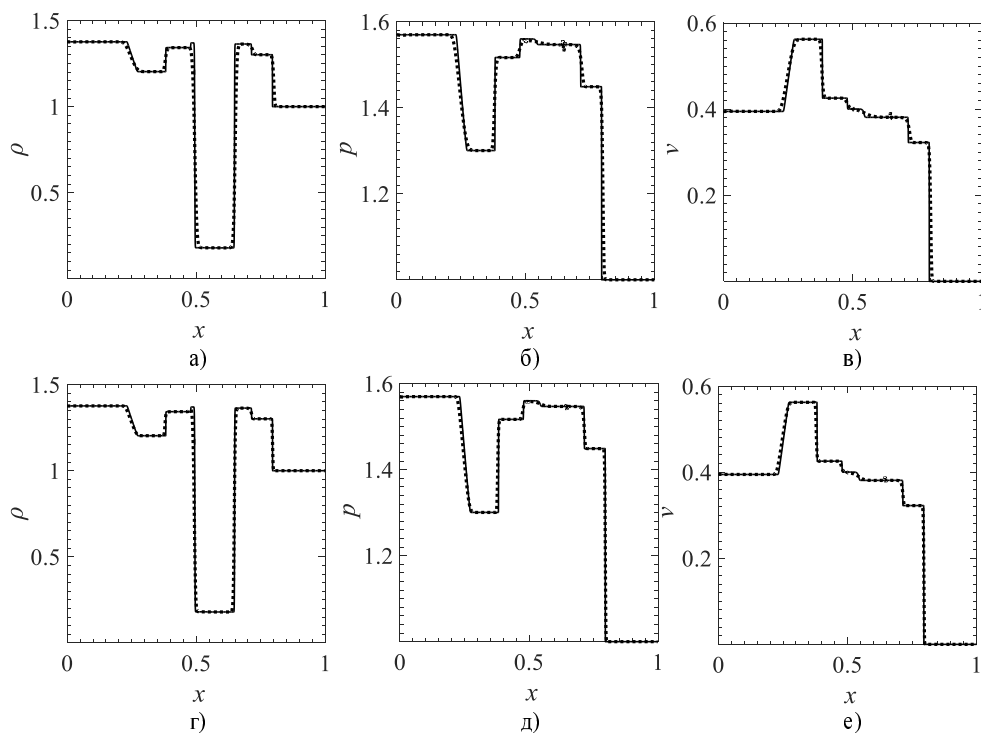


Рис. 5. Тест Karni and Quirk. Распределения плотности смеси а) и г), давления б) и д), скорости в) и е) в момент времени $T_f = 0.35$. Пунктир — расчет, а сплошная кривая — численное решение $1/8000$.

Сетка: $1/400$ — верхний ряд, $1/800$ — нижний ряд

5. Заключение. На примерах тестовых задач для многокомпонентных газовых смесей в широком диапазоне газодинамических параметров и чисел Маха изучены возможности гибридного метода крупных частиц в конечно-объемной консервативной реализации. Метод допускает умеренные колебания давления и скорости, ограниченные шириной численного размазывания границы раздела газов. Выполненный количественный анализ ошибок в окрестности контактных разрывов свидетельствует о пригодности гибридного метода крупных частиц для практических расчетов научных и инженерных задач ударно-волновых течений, содержащих поверхности раздела газов с различными термодинамическими свойствами.

Предложенный метод имеет ряд преимуществ: простота алгоритма и его программной реализации, хорошее соотношение диссипативных и дисперсионных свойств схемы, а также достаточно высокая разрешающая способность. Гибридный метод крупных частиц обладает возможностью решения задач негиперболического типа, например течения неравновесных газовзвесей. Дальнейшее направление исследование предполагает повышение точности расчета контактных границ за счет применения специальных процедур, например алгоритма Level-Set.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Quirk J.J., Karni S.* On the dynamics of a shock-bubble interaction // *J. Fluid Mech.* 1996. **318**. 129–163.
2. *Karni S.* Multicomponent flow calculation by a consistent primitive algorithm // *Journal of Computational Physics.* 1994. **112**. 31–43.
3. *Abgrall R.* How to prevent pressure oscillations in multicomponent flow calculations: a quasi conservative approach // *Journal of Computational Physics.* 1996. **125**, N 1. 150–160.
4. *Glimm J., Li X., Liu Y.J., et al.* Conservative front tracking with improved accuracy // *SIAM J. Numer. Anal.* 2003. **41**, N 5. 1926–1947.
5. *Terashima H., Tryggvason G.* A front-tracking/ghost-fluid method for fluid interfaces in compressible flows // *Journal of Computational Physics.* 2009. **228**, N 11. 4012–4037.
6. *Иванов И.Э., Крюков И.А.* Численное моделирование течений многокомпонентного газа с сильными разрывами свойств среды // *Математическое моделирование.* 2007. **19**, № 12. 89–100.
7. *Marquina A., Mulet P.* A flux-split algorithm applied to conservative models for multicomponent compressible flows // *Journal of Computational Physics.* 2003. **185**, N 1. 120–138.
8. *Coralic V., Colonius T.* Finite-volume WENO scheme for viscous compressible multicomponent flows // *Journal of Computational Physics.* 2014. **274**. 95–121.
9. *Данчилин А.В., Соловьев А.В.* Модификация схемы “кабаре” для расчета течения многокомпонентных газовых смесей // *Вычислительные методы и программирование.* 2015. **16**. 18–25.
10. *Садин Д.В.* TVD-схема для жестких задач волновой динамики гетерогенных сред негиперболического неконсервативного типа // *Журнал вычислительной математики и математической физики.* 2016. **56**, № 12. 2098–2109.
11. *Садин Д.В.* Схемы с настраиваемыми диссипативными свойствами для численного моделирования течений газа и газовзвесей // *Математическое моделирование.* 2017. **29**, № 12. 89–104.
12. *Садин Д.В.* Модификация метода крупных частиц до схемы второго порядка точности по пространству и времени для ударно-волновых течений газовзвеси // *Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование.* 2019. **12**, № 2. 112–122.
13. *Sod G.A.* A survey of several finite difference methods for systems of nonlinear hyperbolic conservation laws // *Journal of Computational Physics.* 1978. **27**, N 1. 1–31.
14. *Wackers J., Koren B.* A fully conservative model for compressible two-fluid flow // *Int. J. Numer. Meth. Fluids.* 2005. **47**, N 10–11. 1337–1343.
15. *Johnsen E., Colonius T.* Implementation of WENO schemes in compressible multicomponent flow problems // *Journal of Computational Physics.* 2006. **219**, N 2. 715–732.
16. *Woodward P., Colella P.* The numerical simulation of two dimensional fluid flow with strong shocks // *Journal of Computational Physics.* 1984. **54**, N 1. 115–173.
17. *Tang H., Liu T.* A note on the conservative schemes for the Euler equations // *Journal of Computational Physics.* 2006. **218**, N 2. 451–459.
18. *Liu T.G., Khoo B.C., Yeo K.S.* Ghost fluid method for strong shock impacting on material interface // *Journal of Computational Physics.* 2003. **190**, N 2. 651–681.
19. *Abgrall R., Karni S.* Computations of compressible multifluids // *Journal of Computational Physics.* 2001. **169**, N 2. 594–623.
20. *Wang B., Xiang G., Hu X.Y.* An incremental-stencil WENO reconstruction for simulation of compressible two-phase flows // *International Journal of Multiphase Flow.* 2018. **104**. 20–31.
21. *Садин Д.В., Давидчук В.А.* Сравнение модифицированного метода крупных частиц с некоторыми схемами высокой разрешающей способности. Одномерные тесты // *Вычислительные методы и программирование.* 2019. **20**. 138–146.

Поступила в редакцию
05.11.2019

D. V. Sadin¹

¹ *Mozhaisky Military Space Academy, ulitsa Zhdanovskaya 13, Saint Petersburg, 197198, Russia;
Dr. Sci., Professor, e-mail: sadin@yandex.ru*

Received November 5, 2019

Abstract: This paper is devoted to a generalization of a hybrid large-particle method for the numerical simulation of multicomponent gas mixture flows in the presence of gas interfaces with various thermodynamic properties. The method belongs to the class of shock-capturing and interface-capturing algorithms. The employed difference scheme is conservative and uniform and possesses the second order approximation in space and time on smooth solutions. The obtained numerical results show the efficiency of the method in a wide range of Mach numbers and ratios of gas dynamic parameters. The error analysis performed near the contact discontinuities on grids of various resolutions confirms the convergence of numerical results to the self-similar solutions.

Keywords: hybrid large-particle method, multicomponent gas mixtures, test problems.

References

1. J. J. Quirk and S. Karni, "On the Dynamics of a Shock–Bubble Interaction," *J. Fluid Mech.* **318**, 129–163 (1996).
2. S. Karni, "Multicomponent Flow Calculation by a Consistent Primitive Algorithm," *J. Comput. Phys.* **112**, 31–43 (1994).
3. R. Abgrall, "How to Prevent Pressure Oscillations in Multicomponent Flow Calculations: A Quasi Conservative Approach," *J. Comput. Phys.* **125** (1), 150–160 (1996).
4. J. Glimm, X. Li, Y. Liu, et al., "Conservative Front Tracking with Improved Accuracy," *SIAM J. Numer. Anal.* **41** (5), 1926–1947 (2003).
5. H. Terashima and G. Tryggvason, "A Front-Tracking/Ghost-Fluid Method for Fluid Interfaces in Compressible Flows," *J. Comput. Phys.* **228** (11), 4012–4037 (2009).
6. I. E. Ivanov and I. A. Kryukov, "Numerical Modeling of Multicomponent Gas Flows with Strong Discontinuities of Medium Properties," *Mat. Model.* **19** (2), 89–100 (2007).
7. A. Marquina and P. Mulet, "A Flux-Split Algorithm Applied to Conservative Models for Multicomponent Compressible Flows," *J. Comput. Phys.* **185** (1), 120–138 (2003).
8. V. Coralic and T. Colonius, "Finite-Volume WENO Scheme for Viscous Compressible Multicomponent Flows," *J. Comput. Phys.* **274**, 95–121 (2014).
9. A. V. Danilin and A. V. Solovjev, "A Modification of the CABARET Scheme for the Computation of Multicomponent Gaseous Flows," *Vychisl. Metody Programm.* **16**, 18–25 (2015).
10. D. V. Sadin, "TVD Scheme for Stiff Problems of Wave Dynamics of Heterogeneous Media of Nonhyperbolic Nonconservative Type," *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.* **56** (12), 2098–2109 (2016) [*Comput. Math. Math. Phys.* **56** (12), 2068–2078 (2016)].
11. D. V. Sadin, "Schemes with Customizable Dissipative Properties as Applied to Gas-Suspensions Flow Simulation," *Mat. Model.* **29** (12), 89–104 (2017).
12. D. V. Sadin, "A Modification of the Large-Particle Method to a Scheme Having the Second Order of Accuracy in Space and Time for Shockwave Flows in a Gas Suspension," *Vestn. Yuzhn. Ural. Gos. Univ. Ser. Mat. Model. Programm.* **12** (2), 112–122 (2019).
13. G. A. Sod, "A Survey of Several Finite Difference Methods for Systems of Nonlinear Hyperbolic Conservation Laws," *J. Comput. Phys.* **27** (1), 1–31 (1978).
14. J. Wackers and B. Koren, "A Fully Conservative Model for Compressible Two-Fluid Flow," *Int. J. Numer. Meth. Fluids* **47** (10–11), 1337–1343 (2005).
15. E. Johnsen and T. Colonius, "Implementation of WENO Schemes in Compressible Multicomponent Flow Problems," *J. Comput. Phys.* **219** (2), 715–732 (2006).
16. P. Woodward and P. Colella, "The Numerical Simulation of Two-Dimensional Fluid Flow with Strong Shocks," *J. Comput. Phys.* **54** (1), 115–173 (1984).
17. H. Tang and T. Liu, "A Note on the Conservative Schemes for the Euler Equations," *J. Comput. Phys.* **218** (2), 451–459 (2006).
18. T. G. Liu, B. C. Khoo, and K. S. Yeo, "Ghost Fluid Method for Strong Shock Impacting on Material Interface," *J. Comput. Phys.* **190** (2), 651–681 (2003).

19. R. Abgrall and S. Karni, "Computations of Compressible Multifluids," *J. Comput. Phys.* **169** (2), 594–623 (2001).
20. B. Wang, G. Xiang, and X. Y. Hu, "An Incremental-Stencil WENO Reconstruction for Simulation of Compressible Two-Phase Flows," *Int. J. Multiphase Flow* **104**, 20–31 (2018).
21. D. V. Sadin and V. A. Davidchuk, "Comparison of a Modified Large-Particle Method with Some High Resolution Schemes. One-Dimensional Test Problems," *Vychisl. Metody Programm.* **20**, 138–146 (2019).