УДК 517.956.224, 517.518.32, 519.642 doi 10.26089/NumMet.v20r433

ПРОЕКЦИОННЫЕ АЛГОРИТМЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПОТЕНЦИАЛА РОБЕНА

В. Г. Лежнев[1], А. Н. Марковский[2]

Представлены проекционные алгоритмы метода базисных потенциалов (фундаментальных решений) вычисления плотности потенциала Робена. Доказывается полнота специальной системы потенциалов.

Ключевые слова: потенциал Робена, проекционный алгоритм, полные системы потенциалов, метод фундаментальных решений, задача Робена классической теории потенциала.

Введение. В настоящей статье предлагается алгоритм численного решения задачи Робена — определение плотности потенциала простого слоя, принимающего постоянное значение на границе заданной области, в том числе неодносвязной. В классической постановке задача формулируется как спектральная задача интегрального оператора, сопряженного к оператору потенциала двойного слоя.

Решение задачи Робена требуется при построении решений различных задач математической физики: например, при решении внешней задачи Дирихле для уравнения Лапласа, при решении задач циркуляционного обтекания контура идеальной несжимаемой жидкостью [1], при построении вихревых (вязких стоксовых) течений [2], при вычислении собственного регулярного вихря области [3] и ряде других задач.

Известны аналитические решения задачи Робена для узкого класса кривых, заданных в полярных координатах [4], для лемнискат [5] и для эллипсоида [6, стр. 10, теорема 6]. Аналитические решения представляют, несомненно, интерес, поскольку позволяют строить тестовые примеры для сравнения эффективности различных численных алгоритмов.

Существует несколько численных методов решения рассматриваемой задачи, в том числе для многосвязных областей, при этом известны трудности и ограничения их применимости, например большая размерность системы линейных уравнений, области со сложной геометрией и др.

В [7] рассматривается видоизмененная задача Дирихле, возникающая при моделировании электрического поля заряженных проводников (основная задача электростатики), рассматриваются различные численные методы, в том числе метод, основанный на представлении решения в виде суперпозиции частных решений с неоднородными условиями на одной части границы и однородными на других.

В работе [8] разработан алгоритм на основе вариационного метода Ритца с гармоническими полиномами в качестве базисных функций.

В работе [9] разработан метод, опирающийся на вычисление телесных углов системы ячеек, покрывающих границу области; в другой же своей работе автор указывает на ограничение разработанного метода [10, п. 6, стр. 1565]: “надо отметить, что данный алгоритм, действуя в условиях применимости теоремы 4, требует предварительного сглаживания границы области”.

Известны также лишенные перечисленных выше недостатков алгоритмы метода фундаментальных решений (МФР) для некоторых задач классической теории потенциала, использующие сдвиги фундаментального решения уравнения Лапласа [12], и приложение этих алгоритмов в задачах плоского обтекания идеальной несжимаемой жидкостью [13]. Общим недостатком метода фундаментальных решений, наверное, следует считать произвол выбора точек, определяющих систему потенциалов и, в конечном счете, точность решения. Известны различные подходы к выбору точек, в работе [14] представлен один из вариантов, но, в общем, проблема выбора точек в методе фундаментальных решений все еще актуальна [15].

В настоящей статье предлагается специальная система потенциалов, полная в подпространстве ортогональном плотности Робена [16]; решение выражается через проекцию на конечномерное подпространство, натянутое на элементы этой системы, что дает точность бо́льшую, чем, например, аппроксимация константы на границе заданной области традиционной для МФР системой сдвигов фундаментального решения уравнения Лапласа.

[1] Кубанский государственный университет, факультет математики и компьютерных наук, ул. Ставропольская, д. 149, 350040, Краснодар; профессор, e-mail: lzhnvv@mail.ru

[2] Кубанский государственный университет, факультет математики и компьютерных наук, ул. Ставропольская, д. 149, 350040, Краснодар; доцент, e-mail: mark@kubsu.ru

1. Задача Робена классической теории потенциала. Обозначим через S границу односвязной ограниченной области $Q \subset \mathbb{R}^n$:

$$Q^+ := \mathbb{R}^n \backslash \overline{Q}.$$

Обозначим также $Q^- := Q$, $E(x)$ — фундаментальное решение уравнения Лапласа в $\mathbb{R}^n$ [17, стр. 203, п. 8], $(\cdot,\cdot)_S$ — скалярное произведение в $L_2(S)$. Будем предполагать, что граница S удовлетворяет условию Ляпунова [17, стр. 406, п. 4].

Потенциалом Робена для S называется потенциал простого слоя

$$R(x) = \int\limits_S \varphi^*(y) E(x-y)\, dS_y,$$

такой, что

$$R(x) = R_S \equiv \text{const}, \quad x \in S.$$

Функция φ^* и константа R_S называются соответственно плотностью и константой Робена. Задача определения плотности φ^* для заданной S называется задачей Робена [18, стр. 84, см. краевая задача теории потенциала, п. 5].

Плотность φ^* является непрерывной и знакопостоянной функцией. Для плоских областей постоянная Робена R_S может принимать любые значения от $-\infty$ до $+\infty$, в трехмерном случае $R_S \geqslant 0$, если полагать $\varphi^* \geqslant 0$.

Рассмотрим потенциал Робена для окружности $S_r = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| = r\}$. Интеграл

$$I(x) = \int\limits_{S_r} E(x-y) dS_y = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{S_r} \ln|x-y|\, dS_y,$$

не зависит от x, если $x \in S_r$. Следовательно, $I(x)$ — потенциал Робена с постоянной плотностью. Интеграл $I(x)$ — функция гармоническая в круге и, следовательно, $R(x) \equiv I(0) = r \ln r$ в круге радиуса r. Иными словами, для окружности радиуса r потенциал Робена $R(x)$ с плотностью $\varphi^* \equiv 1$ имеет вид

$$R(x) = \begin{cases} r \ln|x|, & |x| \geqslant r, \\ r \ln r, & |x| \leqslant r. \end{cases}$$

Для единичной окружности постоянная Робена равна нулю: $R_{S_1} = 0$. Отсюда следует тождество

$$\int\limits_{|y|<1} \ln|x-y|\, dy \equiv 0, \quad |x| = 1.$$

Рассмотрим потенциал двойного слоя

$$v_2(x) = \int\limits_S q(y) \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}(y)} E(x-y)\, dS_y.$$

Последнее равенство на множестве непрерывных функций, заданных на S, определяет интегральный оператор B_2, $v_2 = B_2 q$.

Обозначим через B_2^* сопряженный к B_2 оператор в $L_2(S)$. Интегральное ядро сопряженного оператора B_2^* представляется симметричной функцией по отношению к функции-ядру оператора B_2, таким образом

$$B_2^* q = \int\limits_S q(y) \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}(x)} E(x-y)\, dS_y.$$

Для предельных значений нормальной производной потенциала простого слоя при $x \to \bar{x} \in S$, $x \in Q^\pm$, справедливы равенства [17, стр. 412, п. 6]

$$\lim_{x \to \bar{x}} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}} \int\limits_S q(y) E(x-y)\, dS_y = \pm\frac{1}{2}\, q(x) + \int\limits_S q(y) \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}(x)} E(x-y)\, dS_y, \quad x = \bar{x} \in S,$$

откуда, в частности, для потенциала Робена при $x \in Q^-$ получаем

$$\lim_{x \to \bar{x}} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}} R(x) = 0,$$

или, подробнее,

$$-\frac{1}{2}\varphi^*(x) + \int_S \varphi^*(y) \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}(x)} E(x-y)\, dS_y = 0, \quad x \in S,$$

или в виде интегрального уравнения

$$\left(\frac{1}{2} - B_2^*\right)\varphi^* = 0.$$

Справедливы следующие утверждения [19].

1. Плотность потенциала Робена φ^* является собственной функцией оператора B_2^* с собственным числом $\lambda = \dfrac{1}{2}$ (отсюда, в частности, следует существование потенциала Робена).
2. Число $\lambda = \dfrac{1}{2}$ — простое собственное число оператора B_2^*.
3. Скалярное произведение φ^* и единицы не равно нулю: $(\varphi^*, 1) \neq 0$.
4. Число $\lambda = -\dfrac{1}{2}$ не является собственным для оператора B_2^*.

Таким образом, задача Робена — это спектральная задача для интегрального оператора B_2^* с сингулярным ядром, сопряженного оператору потенциала двойного слоя на S, с собственным числом $\lambda = \dfrac{1}{2}$.

2. Гидродинамическая интерпретация плотности Робена. Рассмотрим на плоскости точечные вихри $z_j \in \mathbb{R}^2$ с соответствующими положительными интенсивностями c_j, $j = 1, 2, \ldots, N$. Система точечных вихрей индуцирует векторное поле $\boldsymbol{w}(x) = \nabla_c \psi(x)$ с функцией тока

$$\psi(x) = \sum_{j=1}^{N} c_j E(x - z_j), \quad x \in \mathbb{R}^2 \backslash \{z_j\}_{j=1}^N,$$

где $\nabla_c = \left\{-\dfrac{\partial}{\partial x_2}, \dfrac{\partial}{\partial x_1}\right\}$ — оператор коградиента.

Обозначим $S = \partial Q$ линию уровня функции $\psi(x)$, отвечающую константе B:

$$Q = \{z \in \mathbb{C} : \psi(x) < B\}.$$

Линии уровня функции $\psi(x)$ являются линиями тока векторного поля $\boldsymbol{w}(x)$.

Пусть константа B такая, что S — связное множество. На S справедливо тождество [5]

$$B = \psi(x) = \int_S \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}} \psi(y) E(x-y)\, dS_y, \quad x \in S,$$

где $\dfrac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}}$ — операция дифференцирования по внешней для области Q нормали к границе S. Интеграл справа, в последнем равенстве, является потенциалом Робена.

Поскольку

$$\boldsymbol{n}(y) = \frac{1}{\left|\nabla \psi(y)\right|} \nabla \psi(y), \quad y \in S,$$

то несложно видеть, что

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}} \psi(y) = \left|\nabla_c \psi(y)\right|, \quad y \in S.$$

Таким образом, плотность потенциала Робена $\varphi^*(y)$ является модулем касательной скорости $\left|\nabla_c \psi(y)\right|$ чисто циркуляционного векторного поля $\boldsymbol{w}(y)$ на S.

3. Полные системы потенциалов. Ограниченную последовательность точек z^m, $m = 1, 2, \ldots$, будем называть *множеством единственности* гармонических функций, если гармонические функции $u_1(x)$ и $u_2(x)$, равные в точках z^m, равны тождественно: $u_1(x) \equiv u_2(x)$.

Будем называть последовательность точек $\{z^m\}_{m=1}^{\infty}$ — *базисной*, если она принадлежит области Q^+ (или Q^-), отделена от границы и является множеством единственности гармонических функций.

Рассмотрим следующее разложение пространства $L_2(S)$:

$$L_2(S) = \{\varphi^*\} \oplus L_2^{\varphi}(S), \tag{1}$$

где $\{\varphi^*\}$ — одномерное подпространство, а $L_2^{\varphi}(S)$ — подпространство функций из $L_2(S)$, ортогональных плотности φ^*.

Пусть последовательность $\{z^m\}_{m=1}^{\infty}$ принадлежит Q^- и является базисной. Рассмотрим на S систему потенциалов

$$\alpha_m^-(x) = E(z^{m+1} - x) - E(z^m - x), \quad m = 1, 2, \ldots\,. \tag{2}$$

Лемма 1. *Система функций $\alpha_m^-(x)$, $m = 1, 2, \ldots$, линейно независима и замкнута в подпространстве $L_2^{\varphi}(S)$.*

Доказательство. Покажем, что $\alpha_m^- \in L_2^{\varphi}(S)$. Действительно,

$$\begin{aligned}(\varphi^*, \alpha_m^-) &= \int\limits_S \varphi^*(y)\Big[E(z^{m+1} - y) - E(z^m - y)\Big]\, dS_y = \\ &= \int\limits_S \varphi^*(y)E(z^{m+1} - y)\, dS_y - \int\limits_S \varphi^*(y)E(z^m - y)\, dS_y = R(z^{m+1}) - R(z^m) = 0, \quad m = 1, 2, \ldots\,,\end{aligned}$$

поскольку $R(x) \equiv R_S$ для любого $x \in Q^-$ и $\{z^m\}_{m=1}^{\infty} \subset Q^-$.

Далее, докажем замкнутость. Пусть $f \in L_2^{\varphi}(S)$ и

$$v(x) = \int\limits_S f(y)E(x - y)\, dS_y, \quad x \in Q^-.$$

Предположим, что $(f, \alpha_m^-) = 0$, т.е.

$$\int\limits_S f(y)\Big[E(z^{m+1} - y) - E(z^m - y)\Big]\, dS_y = 0, \quad m = 1, 2, \ldots\,.$$

Следовательно,

$$v(z^m) = \int\limits_S f(y)E(z^m - y)\, dS_y = c_0, \quad z^m \in Q^-, \quad m = 1, 2, \ldots\,,$$

и по теореме единственности для гармонических функций получаем, что $v(x) \equiv c_0$ в Q^-. Отсюда следует, что $f(x)$ может быть либо плотностью Робена, что невозможно по условию, либо нулем. Замкнутость доказана.

Докажем линейную независимость. Пусть функция

$$F(x) = \sum c_{m_j} \alpha_{m_j}^-(x)$$

ограничена на бесконечности и по предположению о линейной зависимости тождественно равна нулю на S. Тогда $F(x) \equiv 0$ при $x \in Q^+$. В силу представления, функция $F(x)$ гармоническая в Q^- кроме базисных точек z^m, и при $x \to z^{m_1}$ равенство нулю выполняться не может и мы получаем противоречие. Лемма доказана. □

Система (2) и другие системы базисных потенциалов эффективно применяются при решении различных задач математической физики [20, 21] и гидродинамики [2, 3].

4. Алгоритм метода базисных потенциалов. Согласно разложению (1), любая функция из $L_2(S)$, в том числе и единица, представляется в виде суммы

$$1 = c_0\varphi^*(x) + h(x), \quad x \in S, \tag{3}$$

где $h(x)$ — функция из подпространства $L_2^{\varphi}(S)$ и $c_0 \neq 0$, поскольку $(\varphi^*, 1) \neq 0$.

Обозначим через h^N конечномерную проекцию функции h на подпространство, натянутое на вектора $\alpha_1^-(x), \ldots, \alpha_N^-(x)$:

$$h^N(x) = \sum_{m=1}^{N} c_m \alpha_m^-(x);$$

тогда (3) запишется в виде

$$1 = c_0\varphi^*(x) + h^N(x) + \rho_N(x), \quad x \in S, \tag{4}$$

где $\rho_N(x) \to 0$ при $N \to \infty$ и $\rho_N(x)$ — ортогонален каждому базисному вектору $\alpha_m^-(x)$, $m = 1, 2, \ldots, N$.

Умножим скалярно на $\alpha_k^-(x)$ равенство (4), получаем систему линейных уравнений с матрицей Грама $G\big(\alpha_1^-, \ldots, \alpha_N^-\big)$ для определения коэффициентов $c_1, \ldots, c_N$:

$$\sum_{m=1}^{N} c_m \big(\alpha_m^-, \alpha_k^-\big) = \big(1, \alpha_k^-\big), \quad k = 1, 2, \ldots, N.$$

Решая систему, получаем приближенную плотность Робена

$$c_0\varphi_N^*(x) = 1 - \sum_{m=1}^{N} c_m \alpha_m^-(x).$$

Константу c_0 можно определить из естественного условия полного заряда

$$\int\limits_S \varphi^*(x)\, dS = 1.$$

Таким образом, окончательно имеем приближенную плотность Робена

$$\varphi_N^*(y) = c_0^{-1}\left[1 - \sum_{m=1}^{N} c_m \alpha_m^-(y)\right],$$

и приближенный потенциал Робена

$$R_N(x) = \int\limits_S \varphi_N^*(y) E(x-y)\, dy, \quad x \in Q^+.$$

Замкнутость системы $\big\{\alpha_m^-\big\}_1^\infty$ обеспечивает сходимость в норме $L_2(S)$ приближенной плотности Робена φ_N^* к точной φ^*: $\big\|\varphi_N^* - \varphi^*\big\| \to 0$, $N \to \infty$; тогда последовательность приближенных потенциалов $R_N(x)$ сходится равномерно внутри Q^+ к потенциалу Робена $R(x)$ и, в силу гладкости S, равномерная сходимость имеет место вплоть до границы.

5. Алгоритм для тонких областей. Матрица Грама $G(\alpha_1^-, \ldots, \alpha_N^-)$ может быть плохо обусловлена, если область Q достаточно узкая. Вообще говоря, можно показать, что для любого положительного ε найдется такое число N_0, что при всех $N > N_0$ определитель матрицы Грама $G\big(\alpha_1^-, \ldots, \alpha_N^-\big)$ будет меньше ε; трехмерный случай для систем сдвигов фундаментального решения уравнения Лапласа рассмотрен в [22, стр. 246, теорема 5]. Таким образом, для решения получаемой линейной системы с плохо обусловленной матрицей Грама требуются специальные методы [23]; подробнее по этому поводу см. раздел "Устойчивость решения и метод регуляризации" [22, стр. 40, § 1.4].

Если константа Робена $R_S \neq 0$, то можно применить другой алгоритм, когда базисные точки z^m расположены во внешней области Q^+ и используется система

$$\sigma_m(x) = \int\limits_S E\big(z^m - y\big) E(x-y)\, dS_y, \quad x \in S, \quad m = 1, 2, \ldots .$$

Аналогично лемме 1 можно доказать, что если $R_S \neq 0$, то система функций $\{\sigma_m\}_1^\infty$ линейно независима и замкнута в $L_2(S)$; если $R_S = 0$, то эта система замкнута в $L_2^{\varphi}(S)$ при условии, что последовательность $\big\{z^m\big\}_1^\infty$ — базисная в Q^+.

Обозначим $h_N(x)$ проекцию константы R_S на конечномерное подпространство, натянутое на векторы $\sigma_1, \ldots, \sigma_N$; тогда

$$R_S = h_N(x) + \rho_N(x) = \sum_{m=1}^{N} b_m \sigma_m(x) + \rho_N(x),$$

где $\rho_N(x) \to 0$ при $N \to \infty$ и $\rho_N \perp \sigma_m$ для всех $m = 1, 2, \ldots, N$.

Переобозначим коэффициенты, разделив на R_S: $c_m = R_S^{-1} b_m$. Умножим скалярно в $L_2(S)$ последнее полученное равенство на σ_k и получим для коэффициентов систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{m=1}^{N} c_m(\sigma_m, \sigma_k) = (1, \sigma_k), \quad k = 1, 2, \ldots, N.$$

Решая систему, получаем аппроксимацию потенциала Робена

$$R_N(x) = \sum_{m=1}^{N} c_m \sigma_m(x),$$

при этом $R_N(x) \approx 1$ для $x \in Q$, т.е. вычисляется нормированный потенциал Робена. Оценкой погрешности аппроксимации могут служить числа

$$\mu = \left(\int\limits_S \bigl|1 - R_N(x)\bigr|^2 \right)^{1/2}, \quad \nu = \left(\int\limits_Q \bigl|1 - R_N(x)\bigr|^2 \right)^{1/2}.$$

Аппроксимация φ_N^* плотности Робена φ^* имеет вид

$$\varphi_N^*(y) = \sum_{m=1}^{N} c_m E\bigl(z^m - y\bigr), \quad y \in S.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лежнев В.Г.* Функция тока задачи плоского обтекания, потенциал Робена и внешняя задача Дирихле // Докл. РАН. 2004. **394**, № 5. 615–617.
2. *Лежнев В.Г., Марковский А.Н.* Проекционные алгоритмы вихревых 2D течений в сложных областях // Таврич. вест. информатики и математики. 2015. № 1. 42–49.
3. *Морозов В.А., Лежнев В.Г., Токарев Н.М.* Вариационная задача для бигармонического уравнения // Вычислительные методы и программирование. 2012. **13**. 409–412.
4. *Russo R., Tartaglione A.* On the Robin problem in classical potential theory // Math. Models Methods Appl. Sci. 2001. **11**, N 8. 1343–1347.
5. *Марковский А.Н.* Интегральное представление линейной комбинации фундаментальных решений уравнения Лапласа // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2011. **4**. 49–54.
6. *Анер Д., Дякин В.В., Раевский В.Я., Риттер С.* О спектральных свойствах операторов теории гармонического потенциала // Матем. заметки. 1996. **59**, № 1. 3–11.
7. *Вабищевич П.Н.* Приближенное решение видоизмененной задачи Дирихле // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1991. **31**, № 11. 1655–1669.
8. *Дякин В.В., Лебедев Ю.Г., Раевский В.Я.* Исследование магнитостатической модели в теории ЦМД // Физ. металлов и металловедение. 1983. **56**, № 2. 246–248.
9. *Чегис И.А.* Алгоритм численного решения интегрального уравнения для плотности потенциала простого слоя // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1989. **29**, № 12. 1904–1907.
10. *Чегис И.А.* Однозначная разрешимость интегрального уравнения и компьютерный алгоритм в решении внутренней задачи Неймана // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2001. **41**, № 10. 1557–1565.
11. *Белых В.Н.* К проблеме численного решения задачи Дирихле гармоническим потенциалом простого слоя // Докл. РАН. 1993. **329**, № 4. 392–395.
12. *Fairweather G., Johnston R.L.* The method of fundamental solutions for problems in potential theory // Treatment of Integral Equations by Numerical Methods. London: Academic Press, 1982. 349–359.
13. *Johnston R.L., Fairweather G.* The method of fundamental solutions for problems in potential flow // Appl. Math. Model. 1984. **8**, N 4. 265–270.

14. *Katsurada M., Okamoto H.* The collocation points of the fundamental solution method for the potential problem // Comput. Math. Appl. 1996. **31**, N 1. 123–137.
15. *Chen C.S., Karageorghis A., Li Y.* On choosing the location of the sources in the MFS // Numer. Algorithms. 2016. **72**, N 1. 107–130.
16. *Лежнев В.Г.* Системы потенциалов, полные на границе области // Тр. межд. конф. “Математическая физика. Владимиров-90”. Москва: МИАН им. Стеклова, 2013.
17. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1971.
18. Математическая энциклопедия. Т. 3. М.: Советская энциклопедия, 1984.
19. *Михайлов В.П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1976.
20. *Лежнев В.Г., Марковский А.Н.* Метод базисных потенциалов для неоднородного бигармонического уравнения // Вест. Сам. гос. ун-та. Естест. науч. сер. 2008. № 1. 127–139.
21. *Лежнев В.Г., Марковский А.Н.* Проекционный алгоритм краевой задачи для неоднородного уравнения Ламе // Вест. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2011. № 1. 236–240.
22. *Алексидзе М.А.* Фундаментальные функции в приближенных решениях граничных задач. М.: Наука, 1991.
23. *Морозов В.А.* Регулярные методы решения некорректно поставленных задач. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1987.

Поступила в редакцию
14.07.2019

Projection Algorithms for Calculating the Roben Potential

V. G. Lezhnev[1] **and A. N. Markovsky**[2]

[1] *Kuban State University, Faculty of Mathematics and Computer Sciences; ulitsa Stavropol'skaya 149, Krasnodar, 350040, Russia; Dr. Sci., Professor, e-mail: lzhnvv@mail.ru*

[2] *Kuban State University, Faculty of Mathematics and Computer Sciences; ulitsa Stavropol'skaya 149, Krasnodar, 350040, Russia; Ph.D., Associate Professor, e-mail: mark@kubsu.ru*

Received July 14, 2019

Abstract: Several projection algorithms of the basic potential method are proposed for calculating the density of the Roben potential. The completeness of a special system of potentials is proved.

Keywords: Roben potential, projection algorithm, complete systems of potentials, method of fundamental solutions, Roben problem of the classical potential theory.

References

1. V. G. Lezhnev, “Stream Function of the Two-Dimensional Flow Problem, Robin Potential, and the Exterior Dirichlet Problem,” Dokl. Akad. Nauk **394** (5), 615–617 (2004) [Dokl. Phys. **49** (2), 116–118 (2004)].

2. V. G. Lezhnev and A. N. Markovsky, “Projection Algorithms for 2D Vortex Flows in Complicated Domains,” Taurida Vestn. Inform. Mat., No. 1, 42–49 (2015).

3. V. A. Morozov, V. G. Lezhnev, and N. M. Tokarev, “A Variational Problem for the Biharmonic Equation,” Vychisl. Metody Programm. **13**, 409–412 (2012).

4. R. Russo and A. Tartaglione, “On the Robin Problem in Classical Potential Theory,” Math. Models Methods Appl. Sci. **11** (8), 1343–1347 (2001).

5. A. N. Markovsky, “Integral Representation of a Linear Combination of the Fundamental Solutions to The Laplace Equation,” Ekologich. Vestn. Nauchnykh Tsentrov, No. 4, 49–54 (2011).

6. J. F. Ahner, V. V. Dyakin, V. Ya. Raevskii, and St. Ritter, “Spectral Properties of Operators of the Theory of Harmonic Potential,” Mat. Zametki **59** (1), 3–11 (1996) [Math. Notes **59** (1), 3–9 (1996)].

7. P. N. Vabishchevich, “Approximate Solution of the Modified Dirichlet Problem,” Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz. **31** (11), 1655–1669 (1991) [USSR Comput. Math. Math. Phys. **31** (11), 37–47 (1991)].

8. V. V. Dyakin, Yu. G. Lebedev, and V. Ya. Rayevskii, “Investigation of a Magnetostatic Model in TsMD Theory,” Fiz. Met. Metalloved. **56** (2), 246–248 (1983).

9. I. A. Chegis, “An Algorithm for Numerical Solution of an Integral Equation for the Density of a Simple Layer Potential,” Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz. **29** (12), 1904–1907 (1989) [USSR Comput. Math. Math. Phys. **29** (6), 213–216 (2001)].

10. I. A. Chegis, "Unique Solvability of an Integral Equation and a Computer Algorithm for an Inner Neumann Problem," Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz. **41** (10), 1557–1565 (2001) [Comput. Math. Math. Phys. **41** (10), 1480–1488 (2001)].

11. V. N. Belykh, "On the Problem of Numerical Solution of the Dirichlet Problem by a Harmonic Single-Layer Potential," Dokl. Akad. Nauk **329** (4), 392–395 (1993) [Dokl. Math. **47** (2), 252–256 (1993)].

12. G. Fairweather and R. L. Johnston, "The Method of Fundamental Solutions for Problems in Potential Theory," in *Treatment of Integral Equations by Numerical Methods* (Academic Press, London, 1982), pp. 349–359.

13. R. L. Johnston and G. Fairweather, "The Method of Fundamental Solutions for Problems in Potential Flow," Appl. Math. Model. **8** (4), 265–270 (1984).

14. M. Katsurada and H. Okamoto, "The Collocation Points of the Fundamental Solution Method for the Potential Problem," Comput. Math. Appl. **31** (1), 123–137 (1996).

15. C. S. Chen, A. Karageorghis, and Y. Li, "On Choosing the Location of the Sources in the MFS," Numer. Algor. **72** (1), 107–130 (2016).

16. V. G. Lezhnev, "Systems of Potentials that are Complete on the Boundary of a Domain," in *Proc. Int. Conf. "Mathematical Physics. Vladimirov-90" Dedicated to the 90th Anniversary of Academician V. S. Vladimirov, Moscow, Russia, November 13–15, 2013*
http://www.mathnet.ru/php/conference.phtml?confid=364&option_lang=eng. Cited September 19, 2019.

17. V. S. Vladimirov, *Equations of Mathematical Physics* (Nauka, Moscow, 1971; M. Dekker, New York, 1971).

18. M. Hazewinkel (Ed.), *Encyclopaedia of Mathematics*, Vol. 3 (Sovetskaya Entsiclopediya, Moscow, 1984; Springer, New York, 1995).

19. V. P. Mikhailov, *Partial Differential Equations* (Nauka, Moscow, 1976; Mir, Moscow, 1978).

20. V. G. Lezhnev and A. N. Markovskiy, "The Basic Potential Method for an Inhomogeneous Biharmonic Equation," Vestn. Samar. Gos. Univ., No. 1, 127–139 (2008).

21. V. G. Lezhnev and A. N. Markovskiy, "Projective Algorithm of Boundary Value Problem for Inhomogeneous Lame's Equation," Vestn. Samar. Gos. Tekh. Univ., Ser.: Fiz. Mat., No. 1, 236–240 (2011).

22. M. A. Aleksidze, *Fundamental Functions in Approximate Solutions of Boundary Value Problems* (Nauka, Moscow, 1991) [in Russian].

23. V. A. Morozov, *Regular Methods for Solving Ill-Posed Problems* (Mosk. Gos. Univ., Moscow, 1987) [in Russian].