

УДК 519.6

doi 10.26089/NumMet.v20r432

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДОВ АСИМПТОТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА ПРИ РЕШЕНИИ ОДНОЙ КОЭФФИЦИЕНТНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА РЕАКЦИЯ–ДИФфуЗИЯ С КУБИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

Д. В. Лукьяненко¹, А. А. Мельникова²

Продемонстрированы возможности методов асимптотического анализа в применении к решению коэффициентной обратной задачи для системы нелинейных сингулярно возмущенных уравнений типа реакция–диффузия с кубической нелинейностью. Рассматриваемая в статье задача для системы уравнений в частных производных сводится к гораздо более простой для численного исследования системе алгебраических уравнений, которая связывает данные обратной задачи (информацию о положении фронта реакции во времени) с коэффициентом, который необходимо восстановить. Численные эксперименты подтверждают эффективность предложенного подхода.

Ключевые слова: сингулярно возмущенная задача, внутренние и пограничные слои, уравнение типа реакция–диффузия, обратная задача с данными о положении внутреннего слоя.

1. Введение. В настоящей статье предложен асимптотический подход к решению коэффициентной обратной задачи для системы нелинейных сингулярно возмущенных параболических уравнений типа реакция–диффузия с кубической нелинейностью по известным данным о положении движущегося фронта (данные обратной задачи). Подобные задачи возникают в газовой динамике, биофизике, экологии, химической кинетике и ряде других областей прикладных наук. Примерами могут служить

- 1) модель образования паттернов в живой природе [1];
- 2) модель ФитцХью–Нагумо распространения нервного импульса [2];
- 3) модель Алиева–Панфилова, описывающая автоволновые механизмы сокращения сердечной мышцы [3].

Особенность прямых задач указанного типа заключается в том, что их математические модели содержат нелинейные системы параболических уравнений с малыми параметрами при старших производных. Это приводит к тому, что решения соответствующих прямых задач могут содержать узкие пограничные и/или внутренние слои (стационарные и/или движущиеся фронты). Аналитические и численные исследования подобных систем можно найти, например, в работах [4–9]. В случае наличия малых параметров высокого порядка малости, эти задачи становятся сложными для численного решения в связи с необходимостью введения чрезвычайно густых сеток как по пространственной, так и по временной переменным. Однако наличие малого параметра приводит к появлению двух противоположных эффектов: с одной стороны, чем меньше этот параметр, тем более неустойчивое численное решение будет получено; с другой стороны, чем меньше этот параметр, тем более точную априорную информацию о решении мы можем извлечь с помощью методов асимптотического анализа. Эти два факта дают возможность объединить асимптотический и численный подходы для построения эффективных методов решения как прямых, так и соответствующих обратных задач.

Идея использования методов асимптотического анализа при построении эффективных численных алгоритмов решения коэффициентных обратных задач для нелинейных сингулярно возмущенных уравнений была впервые реализована в работе [10], где была рассмотрена коэффициентная обратная задача для нелинейного сингулярно возмущенного уравнения типа реакция–диффузия–адвекция с данными в финальный момент времени. В указанной работе использовался классический итерационный градиентный метод решения, основанный на минимизации функционала невязки и требующий для вычисления градиента на каждой итерации выполнения процедуры решения прямой и сопряженной задач, каждая из

¹ Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, физический факультет, Ленинские горы, 119992, Москва; доцент, e-mail: lukyanenko@physics.msu.ru

² Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, физический факультет, Ленинские горы, 119992, Москва; ассистент, e-mail: melnikova@physics.msu.ru

которых являлась сингулярно возмущенной, а это означало, что их решения могут содержать как внутренние, так и пограничные слои. Однако при реализации этого метода использовался асимптотический анализ, заключающийся в выделении априорной информации о зависимости положения движущегося фронта от времени в решении прямой задачи и о наличии пограничных слоев в решении сопряженной задачи, для построения специальной адаптированной сетки [11–14]. Предложенный подход позволил значительно оптимизировать численный счет и существенно улучшить устойчивость решения соответствующей обратной задачи.

Однако существует и другой подход к использованию методов асимптотического анализа для решения задач рассматриваемого класса. Важной особенностью применения методов асимптотического анализа к исследованию нелинейных дифференциальных уравнений с малыми параметрами при старших производных является то, что асимптотический анализ зачастую позволяет свести исходную нелинейную сингулярно возмущенную задачу для уравнения(й) в частных производных к гораздо более простой задаче, которая не содержит малых параметров и имеет меньшую размерность (а иногда и вовсе содержит не дифференциальные, а алгебраические уравнения), получив при этом достаточно точное качественное и количественное описание решения. Более того, редуцированные с помощью методов асимптотического анализа постановки задач зачастую связывают явным образом параметры, которые необходимо восстановить при решении обратной задачи (коэффициенты в уравнении, граничные и начальные условия и др.), с положением движущегося фронта, информация о движении которого является наиболее естественной дополнительной информацией при решении реальных прикладных задач (экспериментальные наблюдения положения фронта ударной волны, фронта реакции или горения и др.). Впервые такой подход был реализован в работах [15, 16].

В предлагаемой работе коэффициентная обратная задача для системы нелинейных сингулярно возмущенных параболических уравнений типа реакция–диффузия с кубической нелинейностью и с известными данными о положении движущегося фронта сводится к существенно более простой задаче для системы алгебраических уравнений, которая полужявным образом связывает наблюдаемое в эксперименте положение движущегося фронта с искомым коэффициентом в одном из уравнений.

Необходимо отметить, что такой подход к решению рассматриваемой обратной задачи является одной из вариаций прямого метода [17]. Этот метод не зависит от начального приближения, выбор которого зачастую чрезвычайно важен при решении нелинейных задач, и использует только данные обратной задачи подобно методу граничного управления, предложенному М.И. Белишевым [18–20], глобально сходящемуся методу, предложенному М.В. Клибановым [21–26], и методу, основанному на решении многомерного аналога уравнения Гельфанда–Левитана–Крейна и предложенному С.И. Кабанихиным [27–33].

Работа построена следующим образом. В разделе 2 обсуждается постановка конкретной обратной задачи, решение которой может не иметь каких-либо особенностей, однако в ходе решения соответствующей прямой задачи могут возникнуть сложности, связанные с наличием внутреннего слоя (движущегося фронта). Далее, в разделе 3 описываются основные идеи применения методов асимптотического анализа, которые позволяют свести постановку исходной обратной задачи к гораздо более простой для последующего численного решения. В разделе 4 описан метод численного решения редуцированной постановки обратной задачи и приведены результаты некоторых численных экспериментов с целью демонстрации эффективности предложенного в работе асимптотического подхода. В заключении обсуждаются ограничения предложенного метода.

2. Постановка задачи. Рассмотрим следующую прямую задачу [13]:

$$\begin{cases} \varepsilon^4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \varepsilon^2 \frac{\partial u}{\partial t} = (u - \varphi^l(v, x, \varepsilon))(u - \varphi^0(v, x, \varepsilon))(u - \varphi^r(v, x, \varepsilon)), & x \in (0, l), \quad t \in (0, T], \\ \varepsilon^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \varepsilon^2 \frac{\partial v}{\partial t} = \gamma(x)v - \beta(x)u - k(x), & x \in (0, l), \quad t \in (0, T], \\ u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0, \quad v_x(0, t) = v_x(l, t) = 0, & t \in (0, T], \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad v(x, 0) = v_0(x), & x \in [0, l]. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь ε — малый параметр ($0 < \varepsilon < \varepsilon_0 \ll l$); функции $u_0, v_0 \in L^\infty([0, l]) \cap L^1((0, l))$ отличны от нуля; функции $\varphi^l(v, x, \varepsilon), \varphi^0(v, x, \varepsilon), \varphi^r(v, x, \varepsilon)$ в области $\{(v, x, \varepsilon) : I_v \times [0, l] \times (0, \varepsilon_0)\}$ непрерывно дифференцируемы, где I_v — некоторый промежуток изменения переменной v ; $\gamma(x), \beta(x), k(x) \in C([0, l]) \times C^1((0, l))$.

Для удобства дальнейшего изложения материала введем обозначения

$$h(u, v, x, \varepsilon) \equiv (u - \varphi^l(v, x, \varepsilon))(u - \varphi^0(v, x, \varepsilon))(u - \varphi^r(v, x, \varepsilon)), \quad g(u, v, x) \equiv \gamma(x)v - \beta(x)u - k(x)$$

и сформулируем условия, при которых будет рассматриваться задача (1) и которые позволят применить необходимые методы асимптотического анализа.

Условие C₁. В области $\{(v, x, \varepsilon) : I_v \times [0; l] \times (0; \varepsilon_0]\}$ функции $\varphi^{l,0,r}(v, x, \varepsilon)$ являются непрерывно дифференцируемыми и удовлетворяют неравенствам $\varphi^l(v, x, \varepsilon) < \varphi^0(v, x, \varepsilon) < \varphi^r(v, x, \varepsilon)$. Более того, $h_u(\varphi^{l,r}(v, x, 0), v, x, 0) > 0$ и $h_u(\varphi^0(v, x, 0), v, x, 0) < 0$.

Условие C₂. Каждое из уравнений $g(\varphi^l(v, x, 0), v, x) = 0$ и $g(\varphi^r(v, x, 0), v, x) = 0$ имеет единственное решение $v = v^l(x)$ и $v = v^r(x)$ соответственно. Функции $v^{l,r}(x)$ удовлетворяют неравенствам $v^l(x) < v^r(x)$ и $\frac{dg}{dv}(\varphi^{l,r}(v, x, 0), v, x) \Big|_{v=v^{l,r}(x)} > 0$.

Известно (см. [34]), что при выполнении условий **C₁**, **C₂** и **C₃** (будет сформулировано ниже) решение задачи (1) имеет внутренний слой (движущийся фронт), положение которого во времени описывается функцией $x = x_{t.p.}(t)$, индекс t.p. \equiv transition point означает точку локализации внутреннего слоя (пример решения, имеющего внутренний слой приведен на рис. 1).

Обратная задача будет заключаться в определении неизвестного коэффициента $\gamma(x)$, определяющего свойства среды, через которую проходит движущийся фронт реакции, по наблюдаемому положению этого фронта в зависимости от времени:

$$x_{t.p.}(t) \equiv f(t), \quad t \in [0, T]. \tag{2}$$

В следующем разделе представлен асимптотический анализ поставленной задачи и показано, как связаны данные обратной задачи (2) с коэффициентом $\gamma(x)$, который необходимо восстановить. Кроме того, будет строго сформулирована постановка обратной задачи.

3. Асимптотический анализ. В задаче (1) величина ε — малый параметр. Если положить $\varepsilon = 0$ (т.е. пренебречь слагаемыми, которые вносят малый вклад в уравнения рассматриваемой математической модели), то система уравнений (1) не будет дифференциальной и в общем случае ее решения не будут удовлетворять граничным и начальным условиям. Таким образом, задача (1) для системы нелинейных параболических уравнений относится к классу сингулярно возмущенных, т.е. таких прикладных проблем, малые возмущения моделей которых могут существенным образом повлиять на решение. Существуют различные аналитические методы поиска решений сингулярно возмущенных задач. В данном случае нас интересует решение типа движущегося фронта или, другими словами, нестационарное решение с внутренним слоем (внутренний слой — это область, в которой решение претерпевает резкое изменение).

В работе [34] доказана теорема существования классического решения с внутренним переходным слоем для задачи (1) и приведен алгоритм получения приближенного решения. Приближенное решение нулевого порядка (т.е. являющееся членом нулевого порядка разложения точного решения по степеням малого параметра ε) для конкретного примера, который рассматривается в данной статье, получено и обосновано в работе [35].

Будем считать, что в каждый момент времени $t \in [0, T]$ внутренний слой расположен в ε -окрестности точки $x = x_0(t)$ обеих компонент решения u и v . Здесь под $x_0(t)$ подразумевается член нулевого порядка разложения точного положения $x_{t.p.}(t)$ внутреннего слоя по степеням малого параметра ε . Опираясь на работу [34], повторим основные рассуждения метода построения асимптотического приближения решения нулевого порядка и получим уравнение для определения функции $x_0(t)$, которое будет использовано при решении обратной задачи.

Система уравнений (1) при $\varepsilon = 0$ (*вырожденная система*)

$$\begin{cases} (u - \varphi^l(v, x, 0))(u - \varphi^0(v, x, 0))(u - \varphi^r(v, x, 0)) = 0, & x \in [0, l], \quad t \in (0, T], \\ \gamma(x)v - \beta(x)u - k(x) = 0, & x \in [0, l], \quad t \in (0, T], \end{cases}$$

разрешима при выполнении условий **C₁** и **C₂** и задает постоянные (не зависящие от времени) уровни компонент u и v справа и слева от фронта. Предполагается, что решение задачи (1) слева от точки

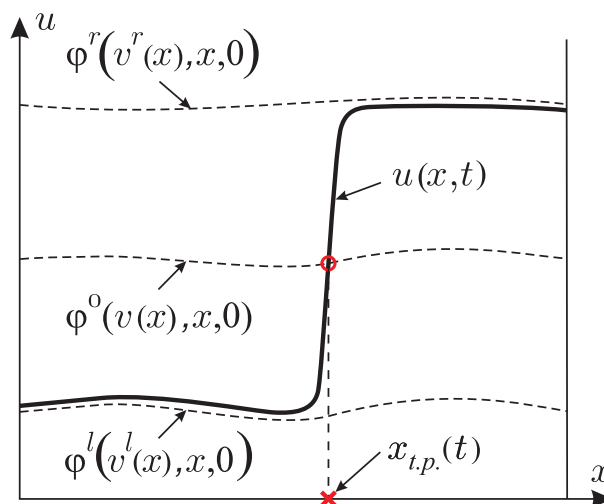


Рис. 1. Внутренний слой (движущийся фронт) в фиксированный момент времени t

$x = x_0(t)$ близко к функции $v^l(x)$ для v -компоненты и к функции $\varphi^l(v^l(x), x, 0)$ — для u -компоненты, а справа от $x = x_0(t)$ решение близко к функциям $v^r(x)$ и $\varphi^r(v^r(x), x, 0)$ для v - и u -компонент соответственно (напомним, что функции $v^l(x)$ и $v^r(x)$ определяются из условия \mathbf{C}_2).

В основе построения асимптотического приближения решения с внутренним переходным слоем лежит метод А.Б. Васильевой [36]. Согласно этому методу, решение представляется в виде суммы функций нескольких видов: функции переходного слоя, которые описывают решение в окрестности фронта и зависят от растянутых переменных $\xi = \varepsilon^{-1}(x - x_0(t))$ и $\sigma = \varepsilon^{-2}(x - x_0(t))$, и функции регулярной части, которые описывают решение вне слоя. Кроме того, вводятся функции пограничных слоев, но мы не будем их учитывать в нашей работе, исходя из предположения, что в рассматриваемой задаче внутренний слой (движущийся фронт) при своем движении не достигает окрестностей границ, всегда находясь от них вдали.

Асимптотическое приближение (функции $u_{\text{as}}(x, t)$ и $v_{\text{as}}(x, t)$) решения задачи (1) представляется в следующем виде:

$$u_{\text{as}}(x, t) = \bar{u}(x) + Qu(\xi, t) + Mu(\sigma, t), \quad v_{\text{as}}(x, t) = \bar{v}(x) + Qv(\xi, t).$$

Здесь

$$\bar{u}(x) = \begin{cases} \varphi^l(v^l(x), x, 0), & x \leq x_0(t), \\ \varphi^r(v^r(x), x, 0), & x > x_0(t), \end{cases} \quad \bar{v}(x) = \begin{cases} v^l(x), & x \leq x_0(t), \\ v^r(x), & x > x_0(t), \end{cases}$$

$$Qu(\xi, t) = \begin{cases} Q^l u(\xi, t), & \xi \leq 0, \\ Q^r u(\xi, t), & \xi > 0, \end{cases} \quad Mu(\sigma, t) = \begin{cases} M^l u(\sigma, t), & \sigma \leq 0, \\ M^r u(\sigma, t), & \sigma > 0. \end{cases}$$

Функция $Qv(\xi, t)$ тоже состоит из двух частей, аналогично функции $Qu(\xi, t)$. Согласно работе [34] функции $u(x, t)$ и $v(x, t)$ описывают решение с точностью $O(\varepsilon)$. Нулевой член $x = x_0(t)$ расположения точного положения фронта по степеням малого параметра ε определяется как точка пересечения u -компоненты решения с функцией $\varphi^0(v, x, 0)$ (см. рис. 1):

$$u(x_0(t), t) = \varphi^0(v_0(t), x_0(t), 0) + O(\varepsilon), \quad \text{где } v_0(t) : v(x_0(t), t) = v_0(t) + O(\varepsilon). \quad (3)$$

Иными словами, $v_0(t)$ — значение v -компоненты в точке $x = x_0(t)$.

Функции $u_{\text{as}}(x, t)$ и $v_{\text{as}}(x, t)$ предполагаются гладкими, т.е. в точке $x = x_0(t)$ выполнены равенства

$$\varepsilon^2 \frac{\partial \bar{u}^l}{\partial x}(x_0) + \varepsilon \frac{\partial Q^l u}{\partial \xi}(0) + \frac{\partial M^l u}{\partial \sigma}(0) = \varepsilon^2 \frac{\partial \bar{u}^r}{\partial x}(x_0) + \varepsilon \frac{\partial Q^r u}{\partial \xi}(0) + \frac{\partial M^r u}{\partial \sigma}(0), \quad (4)$$

$$\varepsilon^2 \frac{\partial \bar{v}^l}{\partial x}(x_0) + \varepsilon \frac{\partial Q^l v}{\partial \xi}(0) = \varepsilon^2 \frac{\partial \bar{v}^r}{\partial x}(x_0) + \varepsilon \frac{\partial Q^r v}{\partial \xi}(0).$$

Система уравнений для функций переходного слоя $Q^{l,r}u$, $Q^{l,r}v$, $M^{l,r}u$ имеет вид (см. [34])

$$\frac{\partial^2 Q^{l,r}v}{\partial \xi^2} = \gamma(x_0)(Q^{l,r}v + v^{l,r}(x_0)) - k(x_0) - \beta(x_0)\varphi^{l,r}(Q^{l,r}v + v^{l,r}(x_0), x_0, 0), \quad (5)$$

$$Q^{l,r}u(\xi, t) = \varphi^{l,r}(Q^{l,r}v + v^{l,r}(x_0), x_0, 0) - \varphi^{l,r}(v^{l,r}(x_0), x_0, 0),$$

$$\frac{\partial^2 M^{l,r}u}{\partial \sigma^2} + W \frac{\partial M^{l,r}u}{\partial \sigma} = h(\varphi^{l,r}(v^{l,r}(x_0), x_0, 0) + Q^{l,r}u(0, t) + M^{l,r}u, v^{l,r}(x_0) + Q^{l,r}v(0, t), x_0, 0). \quad (6)$$

Через W обозначена производная $\frac{dx_0}{dt}$. Предполагается, что Q -функции переходного слоя отличны от нуля только в ε -окрестности точки $x = x_0(t)$ при каждом $t \in [0, T]$. Формально это требование можно записать следующим образом:

$$Q^{l,r}v(\xi, t) \rightarrow 0, \quad Q^{l,r}u(\xi, t) \rightarrow 0 \quad \text{при } \xi \rightarrow \mp\infty. \quad (7)$$

В системе уравнений (5)–(6) аргумент x заменен на x_0 , поскольку в переходном слое $x = x_0 + O(\varepsilon)$ и решение определяется с точностью $O(\varepsilon)$. Функции $M^{l,r}u$ удовлетворяют условию

$$M^{l,r}u(\sigma, t) \rightarrow 0 \quad \text{при } \sigma \rightarrow \mp\infty. \quad (8)$$

Введем обозначение: $\tilde{v}(\xi, t) = \begin{cases} Q^l v(\xi, t) + v^l(x_0), & \xi \leq 0, \\ Q^r v(\xi, t) + v^r(x_0), & \xi > 0. \end{cases}$

Запишем задачи для определения $\tilde{v}(\xi, t)$, используя уравнения (5) и условия (3), (7):

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \xi^2} = \gamma(x_0)\tilde{v} - \beta(x_0)\varphi^l(\tilde{v}, x_0, 0) - k(x_0), & \xi \in (-\infty, 0), \quad t \in [0, T], \\ \tilde{v}(-\infty, t) = v^l(x_0), \quad \tilde{v}(0, t) = v_0(t), & t \in [0, T], \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \xi^2} = \gamma(x_0)\tilde{v} - \beta(x_0)\varphi^r(\tilde{v}, x_0, 0) - k(x_0), & \xi \in (0, +\infty), \quad t \in [0, T], \\ \tilde{v}(0, t) = v_0(t), \quad \tilde{v}(+\infty, t) = v^r(x_0), & t \in [0, T]. \end{cases}$$

Из условия (4) для v -компоненты в нулевом порядке по ε следует равенство

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \xi}(-0, t) = \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \xi}(+0, t). \quad (10)$$

Левую и правую производные функции $\tilde{v}(\xi, t)$ при $\xi = 0$ можно определить, интегрируя уравнения (9) с условиями на бесконечности. Подставляя указанные производные в равенство (10), получим уравнение, связывающее неизвестные функции $v_0(t)$ и $x_0(t)$:

$$\int_{v^l(x_0)}^{v_0} (\gamma(x_0)v - \beta(x_0)\varphi^l(v, x_0, 0) - k(x_0)) dv + \int_{v_0}^{v^r(x_0)} (\gamma(x_0)v - \beta(x_0)\varphi^r(v, x_0, 0) - k(x_0)) dv = 0. \quad (11)$$

Если функции $v_0(t)$ и $x_0(t)$ удовлетворяют данному уравнению, тогда функция v_{as} является гладкой.

Введем обозначение: $\tilde{u}(\sigma, t) = \begin{cases} \varphi^l(v^l(x_0), x_0, 0) + Q^l u(0, t) + M^l u(\sigma, t), & \sigma \leq 0, \\ \varphi^r(v^r(x_0), x_0, 0) + Q^r u(0, t) + M^r u(\sigma, t), & \sigma > 0. \end{cases}$

Функция $\tilde{u}(\sigma, t)$ определяется из следующей задачи (здесь использованы уравнения для функций $M^{l,r}u$ из системы (6), а также условия (3) и (8)):

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \sigma^2} + W \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \sigma} = (\tilde{u} - \varphi^l(v_0, x_0, 0))(\tilde{u} - \varphi^0(v_0, x_0, 0))(\tilde{u} - \varphi^r(v_0, x_0, 0)), & \sigma \in (-\infty, +\infty), \quad t \in [0, T], \\ \tilde{u}(-\infty, t) = \varphi^l(v_0, x_0, 0), \quad \tilde{u}(0, t) = \varphi^0(v_0, x_0, 0), \quad \tilde{u}(+\infty, t) = \varphi^r(v_0, x_0, 0), & t \in [0, T]. \end{cases} \quad (12)$$

Из условия (4) для u -компоненты в нулевом порядке по ε следует, что функция \tilde{u} должна иметь непрерывную производную в точке $\sigma = 0$:

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \sigma}(-0, t) = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \sigma}(+0, t).$$

Первое уравнение в системе (12) эквивалентно следующей системе уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \sigma} = \Psi, & \sigma \in (-\infty, +\infty), \\ \frac{\partial \Psi}{\partial \sigma} = -W\Psi + h(\tilde{u}, v_0, x_0, 0), & \sigma \in (-\infty, +\infty). \end{cases} \quad (13)$$

На фазовой плоскости (\tilde{u}, Ψ) система уравнений (13) имеет две точки покоя типа седла: $(\varphi^l(v_0, x_0, 0), 0)$ и $(\varphi^r(v_0, x_0, 0), 0)$ (это следует из условия C_1). Гладкость функции \tilde{u} означает непрерывность сепаратрисы $\tilde{\Psi}(\tilde{u})$, соединяющей точки покоя $(\varphi^l(v_0, x_0, 0), 0)$ и $(\varphi^r(v_0, x_0, 0), 0)$. Такую сепаратрису можно представить в виде квадратичной параболы (см. [13]): $\tilde{\Psi}(\tilde{u}) = C(\tilde{u} - \varphi^l(v_0, x_0, 0))(\tilde{u} - \varphi^r(v_0, x_0, 0))$. После подстановки выражения для $\tilde{\Psi}(\tilde{u})$ в систему (13) можно получить выражение для параметра W , при котором существует соединительная сепаратриса:

$$W = \frac{\sqrt{2}}{2} (2\varphi^0(v_0, x_0, 0) - \varphi^l(v_0, x_0, 0) - \varphi^r(v_0, x_0, 0)). \quad (14)$$

Это дифференциальное уравнение относительно функции $x_0(t)$, поскольку под параметром W понимаем производную $W = \frac{dx_0}{dt}$. Функция $x_0(t)$ определяется из системы уравнений (11), (14) с дополнительным условием $x_0(0) = x_{00}$, где x_{00} — это начальное положение фронта.

Таким образом, решение $x_0(t) \in C([0, T]) \cap C^1((0, T))$.

Условие С3. Пусть существует единственное решение $x_0(t)$, $v_0(t)$ следующей системы уравнений с начальным условием $x_0(0) = x_{00}$, причем $x_0(t) \in (0, l)$, $v^l(x_0(t)) < v_0(t) < v^r(x_0(t))$ при $t \in [0, T]$:

$$\int_{v^l(x_0(t))}^{v_0(t)} (\gamma(x_0(t))v - \beta(x_0(t))\varphi^l(v, x_0(t), 0) - k(x_0(t)))dv +$$

$$+ \int_{v_0(t)}^{v^r(x_0(t))} (\gamma(x_0(t))v - \beta(x_0(t))\varphi^r(v, x_0(t), 0) - k(x_0(t)))dv = 0,$$

$$\frac{dx_0}{dt} = \sqrt{2} \left(\varphi^0(v_0(t), x_0(t), 0) - \frac{1}{2} (\varphi^l(v_0(t), x_0(t), 0) + \varphi^r(v_0(t), x_0(t), 0)) \right).$$

Здесь функции $v^l(x)$ и $v^r(x)$ определяются из уравнений

$$v^l(x) : \quad \gamma(x)v - \beta(x)\varphi^l(v, x, 0) - k(x) = 0; \quad v^r(x) : \quad \gamma(x)v - \beta(x)\varphi^r(v, x, 0) - k(x) = 0.$$

Таким образом, мы получили редуцированную систему, связывающую коэффициент $\gamma(x)$, который необходимо восстановить при решении обратной задачи (1)–(2), с членом нулевого порядка $x_0(t)$ разложения точного положения $x_{\text{т.п.}}(t)$ внутреннего слоя по степеням малого параметра ε . Другим следствием асимптотического анализа является то, что мы можем заменить функцию $x_0(t)$ функцией $x_{\text{т.п.}}(t)$ (с ошибкой порядка ε) или, что то же самое, измеренной в эксперименте функцией $f(t)$. В результате мы приходим к следующей редуцированной постановке исходной обратной задачи (1)–(2):

$$\int_{v^l(f(t))}^{v_0(t)} (\gamma(f(t))v - \beta(f(t))\varphi^l(v, f(t), 0) - k(f(t)))dv +$$

$$+ \int_{v_0(t)}^{v^r(f(t))} (\gamma(f(t))v - \beta(f(t))\varphi^r(v, f(t), 0) - k(f(t)))dv = 0, \quad t \in [0, T],$$

$$\frac{df}{dt} = \sqrt{2} \left(\varphi^0(v_0(t), f(t), 0) - \frac{1}{2} (\varphi^l(v_0(t), f(t), 0) + \varphi^r(v_0(t), f(t), 0)) \right), \quad t \in [0, T],$$

$$\gamma(x)v^l(x) - \beta(x)\varphi^l(v^l(x), x, 0) - k(x) = 0, \quad x \in (0, l),$$

$$\gamma(x)v^r(x) - \beta(x)\varphi^r(v^r(x), x, 0) - k(x) = 0, \quad x \in (0, l).$$

Можно переформулировать постановку исходной обратной задачи (1)–(2) в операторном виде

$$A(\gamma) = f,$$

где $A: C(x : (0, l)) \rightarrow C^{(1)}(t : (0, T))$.

Однако в реальных приложениях часто имеются зашумленные данные f_δ ($\|f - f_\delta\| \leq \delta$) и решается следующая задача

$$A(\gamma_\delta) = f_\delta.$$

Кроме того, в данной работе точный оператор A задачи (1)–(2) мы заменяем на приближенный оператор $A_\varepsilon: C \rightarrow C^{(1)}$, определяемый редуцированной системой (15)–(18), и такой, что $\|A - A_\varepsilon\|_C = O(\varepsilon)$. В результате мы решаем следующую задачу:

$$A_\varepsilon(\gamma_{\delta, \varepsilon}) = f_\delta.$$

Можно доказать (соответствующие примеры см. в [37–39]), что $\|\gamma - \gamma_{\delta, \varepsilon}\| \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$, $\varepsilon \rightarrow 0$.

4. Численный алгоритм решения. В предыдущем разделе показано, как методы асимптотического анализа позволили свести исходную обратную задачу (1)–(2) к системе уравнений (15)–(18), которые непосредственно связывают искомый коэффициент $\gamma(x)$ с данными обратной задачи $f(t)$. Опишем соответствующий численный алгоритм нахождения коэффициента $\gamma(x)$ из системы (15)–(18).

1. Предполагается, что нам известны аналитические выражения для функций

$$\varphi^l(v, x, \varepsilon), \quad \varphi^0(v, x, \varepsilon), \quad \varphi^r(v, x, \varepsilon), \quad \frac{\partial \varphi^l(v, x, 0)}{\partial v}, \quad \frac{\partial \varphi^0(v, x, 0)}{\partial v}, \quad \frac{\partial \varphi^r(v, x, 0)}{\partial v}, \quad \beta(x), \quad k(x),$$

которые входят в постановку обратной задачи.

2. Введем равномерную сетку по времени $T_M = \left\{ t_m, 0 \leq m \leq M : t_m = 0 + \tau m, \tau = \frac{T-0}{M} \right\}$.
3. Предполагается, что нам известны сеточные значения $f_m \equiv f_\delta(t_m), m = \overline{0, M}$, измеренной в эксперименте функции $f_\delta(t) \equiv x_{t.p.}(t)$ на сетке T_M .
4. Сгладим функцию $f_\delta(t)$, заданную семейством сеточных значений $f_m, m = \overline{0, M}$, используя сглаживающий сплайн $s_3(t)$. Сплайн s_3 минимизирует функционал

$$F^p(s_3) = p \sum_{m=0}^M |f_m - s_3(t_m)|^2 + (1-p) \sum_{m=0}^M \left| \frac{d^2 s_3}{dt^2}(t_m) \right|^2.$$

Этот метод хорошо известен и реализован во многих программных пакетах (таких как, например, MatLab), поэтому мы не будем описывать его численную реализацию в данной статье. Значение сглаживающего параметра p должно быть согласовано с ошибкой δ входных данных f_δ ($\|f - f_\delta\| \leq \delta$, где f — точное значение входных данных). Например, параметр p может быть выбран исходя из обобщенного принципа невязки [40, 41]

$$\sum_{m=0}^M |f_m - s_3^p(t_m)|^2 - \delta^2 = 0,$$

где s_3^p — экстремаль функционала $F^p(s_3)$. Далее переопределим $f_m := s_3(t_m)$.

5. Вычислим сеточные значения $f'_m, m = \overline{0, M}$, которые являются производными сглаженной функции $f_\delta(t)$, по формулам со вторым порядком точности:

$$\begin{aligned} f'_0 &= \frac{-\frac{3}{2} f_0 + 2f_1 - \frac{1}{2} f_2}{\tau}, \\ f'_m &= \frac{f_{m+1} - f_{m-1}}{2\tau} \quad \text{для } m = \overline{1, M-1}, \\ f'_M &= \frac{\frac{3}{2} f_M - 2f_{M-1} + \frac{1}{2} f_{M-2}}{\tau}. \end{aligned}$$

6. Определим сеточные значения $v_{0m} = v_0(t_m), m = \overline{0, M}$, функции $v_0(t)$ из уравнения (16), используя метод Ньютона: при $s = \overline{0, S}$

$$v_{0m}^{(0)} = 0,$$

$$\begin{aligned} v_{0m}^{(s+1)} &= v_{0m}^{(s)} - \left(f'_m - \sqrt{2} \left(\varphi^0(v_{0m}^{(s)}, f_m, 0) - \frac{1}{2} \left(\varphi^l(v_{0m}^{(s)}, f_m, 0) + \varphi^r(v_{0m}^{(s)}, f_m, 0) \right) \right) \right) \times \\ &\quad \times \left(-\sqrt{2} \left(\frac{\partial \varphi^0}{\partial v}(v_{0m}^{(s)}, f_m, 0) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi^l}{\partial v}(v_{0m}^{(s)}, f_m, 0) + \frac{\partial \varphi^r}{\partial v}(v_{0m}^{(s)}, f_m, 0) \right) \right) \right), \end{aligned}$$

$$v_{0m} := v_{0m}^{(S+1)}.$$

Замечание. Если функции φ^l, φ^0 и φ^r являются линейными относительно переменной v , тогда следует положить $S := 0$.

7. Введем равномерную сетку по пространственной переменной

$$X_N = \left\{ x_n, 0 \leq n \leq N : x_n = 0 + hn, h = \frac{l-0}{N} \right\}.$$

8. Определим сеточные значения $\beta_n = \beta(x_n)$ и $k_n = k(x_n)$, $n = \overline{0, N}$, функций $\beta(x)$ и $k(x)$ на сетке X_N .
9. Определим значения $\beta_{t_m} = \beta(f_m)$, $m = \overline{0, M}$, путем интерполяции функции одной переменной $\beta(x)$, заданной своими сеточными значениями $\beta_n = \beta(x_n)$, $n = \overline{0, N}$.
10. Определим значения $k_{t_m} = k(f_m)$, $m = \overline{0, M}$, путем интерполяции функции одной переменной $k(x)$, заданной своими сеточными значениями $k_n = k(x_n)$, $n = \overline{0, N}$.
11. Определим $\gamma(f_m) \equiv h$ из уравнения (15), решая его методом дихотомии при каждом $t_m \in T_M$, $m = \overline{0, M}$. Это может быть сделано по следующей схеме:

- (а) Обозначим левую часть уравнения (15) через $G(h)$.
- (б) Выберем для начального приближения метода дихотомии h_0 и h_1 так, чтобы $G(h_0)G(h_1) < 0$. Такой выбор возможен, поскольку всегда имеется априорная информация относительно восстанавливаемой функции $\gamma(x)$: $h_0 \leq \min \gamma(x) \leq \gamma(x) \leq \max \gamma(x) \leq h_1$, следующая из физических основ наблюдаемого процесса.
- (с) Зададим номер итерации $s := 1$.
- (д) Следующее приближение задается в виде $h_{s+1} = (h_s + h_{s-1})/2$.
- (е) Если $G(h_{s+1})G(h_{s-1}) \leq 0$, то переопределим $h_s := h_{s-1}$.
- (ф) Переопределим $s := s + 1$. Если $|h_s - h_{s-1}| > \epsilon$ (ϵ — это заданная абсолютная точность определения h), то возвращаемся к пункту 11д. Иначе останавливаем итерационный процесс и выписываем решение $h := h_s$.

Алгоритм вычисления функции $G(h)$ имеет следующий вид.

1. Определим сеточные значения $v_n^l = v^l(x_n)$, $n = \overline{0, N}$, функции $v^l(x)$ из уравнения (17), используя метод Ньютона:

$$\begin{aligned} v_n^{l(0)} &= 0, \\ v_n^{l(s+1)} &= v_n^{l(s)} - \frac{hv_n^{l(s)} - \beta_n \varphi^l(v_n^{l(s)}, x_n, 0) - k_n}{h - \beta_n \frac{\partial \varphi^l}{\partial v}(v_n^{l(s)}, x_n, 0)}, \quad s = \overline{0, S}, \\ v_n^l &:= v_n^{l(S+1)}. \end{aligned}$$

Замечание. Если функция $\varphi^l(v, x, \epsilon)$ линейна относительно переменной v , следует положить $S := 0$.

2. Определим сеточные значения $v_n^r = v^r(x_n)$, $n = \overline{0, N}$, функции $v^r(x)$ из уравнения (18), используя метод Ньютона:

$$\begin{aligned} v_n^{r(0)} &= 0, \\ v_n^{r(s+1)} &= v_n^{r(s)} - \frac{hv_n^{r(s)} - \beta_n \varphi^r(v_n^{r(s)}, x_n, 0) - k_n}{h - \beta_n \frac{\partial \varphi^r}{\partial v}(v_n^{r(s)}, x_n, 0)}, \quad s = \overline{0, S}, \\ v_n^r &:= v_n^{r(S+1)}. \end{aligned}$$

Замечание. Если функция $\varphi^r(v, x, \epsilon)$ линейна относительно переменной v , следует положить $S := 0$.

3. Определим значения $v_{t_m}^l \equiv v^l(f_m)$, $m = \overline{0, M}$, с помощью интерполяции функции одной переменной $v^l(x)$, заданной своими сеточными значениями $v_n^l = v^l(x_n)$, $n = \overline{0, N}$.
4. Определим значения $v_{t_m}^r \equiv v^r(f_m)$, $m = \overline{0, M}$, с помощью интерполяции функции одной переменной $v^r(x)$, заданной своими сеточными значениями $v_n^r = v^r(x_n)$, $n = \overline{0, N}$.

5. Введем равномерную сетку по переменной v_1 с тем, чтобы вычислить первый интеграл в (15):

$$V_{1 I_1} = \left\{ v_{1i}, 0 \leq i \leq I_1 : v_{1i} = v_{1t_m}^l + dv_1 i, dv_1 = \frac{v_{0m} - v_{1t_m}^l}{I_1} \right\}.$$

6. Введем равномерную сетку по переменной v_2 с тем, чтобы вычислить второй интеграл в (15):

$$V_{2 I_2} = \left\{ v_{2i}, 0 \leq i \leq I_2 : v_{2i} = v_{0m} + dv_2 i, dv_2 = \frac{v_{1t_m}^r - v_{0m}}{I_2} \right\}.$$

7. Вычислим $G(h)$ (левую часть уравнения (15)):

$$G(h) = \sum_{i=1}^{I_1} \frac{1}{2} \left((hv_{1i-1} - \beta_{t_m} \varphi^l(v_{1i-1}, f_m, 0) - k_{t_m}) + (hv_{1i} - \beta_{t_m} \varphi^l(v_{1i}, f_m, 0) - k_{t_m}) \right) dv_1 + \\ + \sum_{i=1}^{I_2} \frac{1}{2} \left((hv_{2i-1} - \beta_{t_m} \varphi^r(v_{2i-1}, f_m, 0) - k_{t_m}) + (hv_{2i} - \beta_{t_m} \varphi^r(v_{2i}, f_m, 0) - k_{t_m}) \right) dv_2.$$

Таким образом, неизвестная функция $\gamma(x)$ восстанавливается поточечно во всех точках $x = f_m, m = \overline{0, M}$. Это означает, что функция $\gamma(x)$ может быть восстановлена только в тех точках отрезка $x \in [0, l]$, в которых в ходе экспериментальных наблюдений зафиксировано положение движущегося фронта.

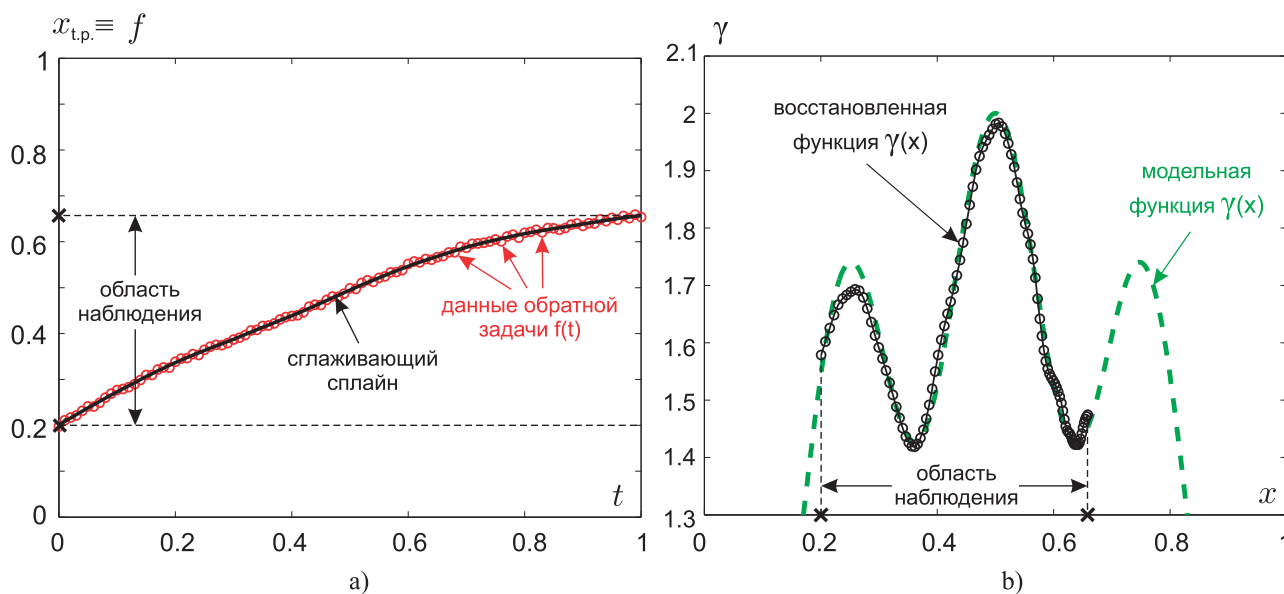


Рис. 2. Пример 1а. Модельная функция $\gamma(x)$ (b) восстановлена для данных обратной задачи $x_{t.p.}(t) \equiv f(t)$ при $\delta \simeq 2\%$ (a)

4.1. Некоторые результаты численных экспериментов. В качестве примера эффективности применения предложенного метода была использована модель городской экосистемы [42, 43]. Данная модель описывает город как систему, в которой различные факторы (социально-экономические либо природные и антропогенные) взаимодействуют по типу активатор–ингибитор, и обратная задача состоит в определении параметров среды $\gamma(x)$, через которую движется наблюдаемый фронт реакции:

$$\begin{cases} \varepsilon^4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \varepsilon^2 \frac{\partial u}{\partial t} = (u - \varphi^l(v, x, \varepsilon))(u - \varphi^0(v, x, \varepsilon))(u - \varphi^r(v, x, \varepsilon)), & x \in (0, 1), \quad t \in (0, T], \\ \varepsilon^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \varepsilon^2 \frac{\partial v}{\partial t} = \gamma(x)v - \beta(x)u - k(x), & x \in (0, 1), \quad t \in (0, T], \\ u_x(0, t) = u_x(1, t) = 0, \quad v_x(0, t) = v_x(1, t) = 0, & t \in (0, T], \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad v(x, 0) = v_0(x), & x \in [0, 1], \\ x_{t.p.}(t) = f_\delta(t), & t \in [0, T]. \end{cases}$$

Пример 1а. Расчет примера проведен для функций и значений параметров численной схемы:

$$\begin{aligned} \varphi^l(v, x, \varepsilon) &= -1, \quad \varphi^0(v, x, \varepsilon) = 1 - 0.125v - 0.5x, \quad \varphi^r(v, x, \varepsilon) = 1, \\ \beta(x) &= (x + 1.4), \quad k(x) = 3(x + 1.4), \quad \gamma(x) = 0.5 \cos(12(x - 0.5))^2 + 1.5 - 4(x - 0.5)^2, \\ u_0(x) &= \tanh(\varepsilon^{-1}(x - x_{00})), \quad v_0(x) = (x_{00} + 1.4) \left(\tanh(\varepsilon^{-1}(x - x_{00})) + 3 \right), \\ x_{t.p.}(0) &\equiv x_{00} = 0.2, \quad T = 1, \quad \varepsilon = 10^{-2}, \quad \delta \sim 2\%, \\ N &= 50, \quad M = 100, \quad I_1 = I_2 = 100. \end{aligned}$$

Заметим, что начальные функции $u_0(x)$ и $v_0(x)$ и начальное положение фронта реакции $x_{00} = x_{t.p.}(0)$ используются только для того, чтобы смоделировать входные данные обратной задачи $x_{t.p.}(t) \equiv f_\delta(t)$. Моделирование входных данных $f_\delta(t)$ предполагает решение полной прямой задачи, что является достаточно трудоемким процессом, который здесь не описывается (пример решения подобной прямой задачи обсуждается в [14]).

Результаты расчетов представлены на рис. 2 и демонстрируют эффективность предложенного в работе подхода. Еще раз обратим внимание на то, что разработанный метод позволяет восстановить функцию $\gamma(x)$ только в тех точках отрезка $x \in [0, 1]$, в которых наблюдалось прохождение движущегося фронта (т.е. в области экспериментальных наблюдений).

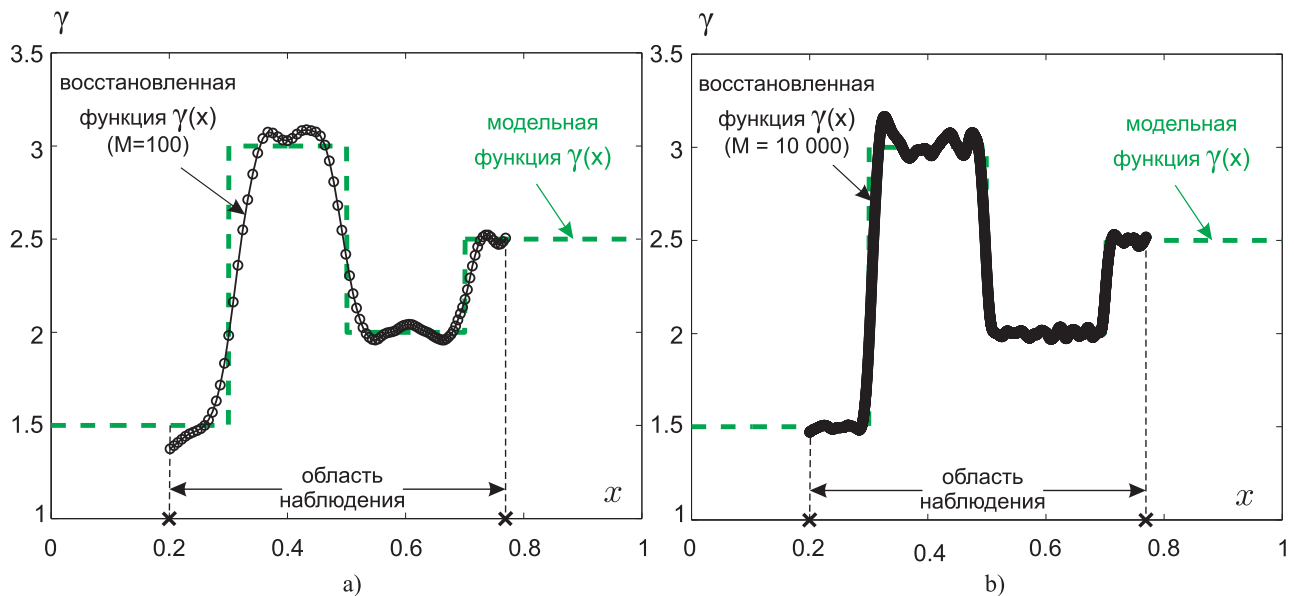


Рис. 3. Пример 1б. Результат восстановления модельной кусочно-постоянной функции $\gamma(x)$ для различных значений параметра M

Пример 1б. Расчет второго примера был выполнен для того же набора данных, что и в предыдущем примере, за исключением вида модельной функции $\gamma(x)$:

$$\gamma(x) = \begin{cases} 1.5 & \text{для } 0 \leq x < 0.3, \\ 3 & \text{для } 0.3 \leq x < 0.5, \\ 2 & \text{для } 0.5 \leq x < 0.7, \\ 2.5 & \text{для } 0.7 \leq x < 1. \end{cases}$$

В этом случае функция $\gamma(x)$ не удовлетворяет не только условию гладкости, но также является и разрывной (что соответствует некоторым реальным практическим ситуациям). Несмотря на этот факт, результаты работы алгоритма оказались вполне приемлемыми (см. рис. 3), что дает возможность предполагать, что предложенный в работе подход может быть обобщен и на существенно более широкий класс прикладных задач рассматриваемого типа.

Заключение. В работе продемонстрированы возможности методов асимптотического анализа в применении к решению коэффициентной обратной задачи для системы нелинейных сингулярно возмущенных уравнений типа реакция-диффузия с кубической нелинейностью по известным данным о положении

движущегося фронта реакции. Предложенный подход основан на строгом асимптотическом анализе, позволяющем свести исходную обратную задачу для уравнений в частных производных к гораздо более простой для численного решения системе алгебраических уравнений, связывающей данные обратной задачи (информацию о положении фронта реакции во времени) с коэффициентом, который необходимо восстановить. Особенностью алгоритма, разработанного на основе предложенного подхода, является то, что

1) неизвестный коэффициент (функция) восстанавливается поточечно и только в области, через которую проходит движущийся фронт и где его параметры (входные данные обратной задачи) были измерены экспериментально;

2) качество решения зависит от величины малого параметра.

В качестве перспектив развития предложенного метода следует отметить его обобщение на более широкий класс восстанавливаемых функций (в том числе разрывных) и реализацию методов выполнения апостериорной оценки точности полученного решения [44–49]. Кроме того, подобно результатам работы [15], можно выполнить численное исследование регуляризирующих свойств предложенного алгоритма (включая анализ взаимосвязи и влияние на результат решения обратной задачи уровня шума входных данных обратной задачи и величины малого параметра ε).

Работа выполнена при поддержке РФФИ (коды проектов 18–01–00865 и 18–31–00204).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Meinhardt H.* Models of biological pattern formation. London: Academic Press, 1982.
2. *FitzHugh R.* Impulses and physiological states in theoretical model of nerve membrane // *Biophys. J.* 1961. **1**, N 6. 445–466.
3. *Ahiev R.R., Panfilov A.V.* A simple two-variable model of cardiac excitation // *Chaos, Solitons and Fractals.* 1996. **7**, N 3. 293–301.
4. *Ham Y.M.* Internal layer oscillations in FitzHugh–Nagumo equation // *Journal of Computational and Applied Mathematics.* 1999. **103**, N 2. 287–295.
5. *Hagberg A., Meron E.* Pattern formation in non-gradient reaction–diffusion systems: the effects of front bifurcations // *Nonlinearity.* 1994. **7**, N 3. 805–835.
6. *Wu S.-L., Zhao H.-Q.* Traveling fronts for a delayed reaction-diffusion system with a quiescent stage // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation.* 2011. **16**, N 9. 3610–3621.
7. *Larralde H., Araujo M., Havlin S., Stanley H.E.* Diffusion–reaction kinetics for $A+B(\text{static})\rightarrow C(\text{inert})$ for one-dimensional systems with initially separated reactants // *Physical Review A.* 1992. **46**, N 10. R6121–R6123.
8. *Kessler D.A., Levine H.* Fluctuation-induced diffusive instabilities // *Nature.* 1998. **394**, N 6693. 556–558.
9. *Prum R.O., Williamson S.* Reaction–diffusion models of within-feather pigmentation patterning // *Proceedings of the Royal Society B: Biological Sciences.* 2002. **269**, N 1493. 781–792.
10. *Lukyanenko D.V., Shishlenin M.A., Volkov V.T.* Solving of the coefficient inverse problems for a nonlinear singularly perturbed reaction–diffusion–advection equation with the final time data // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation.* 2018. **54**. 233–247.
11. *Лукьяненко Д.В., Волков В.Т., Неведов Н.Н.* Построение динамически адаптированной сетки для эффективного численного решения сингулярно возмущенного уравнения типа реакция–адвекция–диффузия // *Моделирование и анализ информационных систем.* 2017. **24**, № 3. 322–338.
12. *Lukyanenko D., Nefedov N., Nikulin E., Volkov V.* Use of asymptotics for new dynamic adapted mesh construction for periodic solutions with an interior layer of reaction–diffusion–advection equations // *Lecture Notes in Computer Science.* Vol. 10187. Heidelberg: Springer, 2017. 107–118.
13. *Melnikova A., Levashova N., Lukyanenko D.* Front dynamics in an activator–inhibitor system of equations // *Lecture Notes in Computer Science.* Vol. 10187. Heidelberg: Springer, 2017. 492–499.
14. *Волков В.Т., Лукьяненко Д.В., Неведов Н.Н.* Аналитико-численный подход для описания периодических по времени движущихся фронтов в сингулярно возмущенных моделях реакция–диффузия–адвекция // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2019. **59**, No 1. 50–62.
15. *Lukyanenko D.V., Shishlenin M.A., Volkov V.T.* Asymptotic analysis of solving an inverse boundary value problem for a nonlinear singularly perturbed time-periodic reaction–diffusion–advection equation // *J. Inverse Ill-Posed Probl.* 2019. **27**. doi 10.1515/jiip-2017-0074.
16. *Lukyanenko D.V., Grigorev V.B., Volkov V.T., Shishlenin M.A.* Solving of the coefficient inverse problem for a nonlinear singularly perturbed two-dimensional reaction–diffusion equation with the location of moving front data // *Computers and Mathematics with Applications.* 2019. **77**, N 5. 1245–1254.
17. *Kabanikhin S.I.* Definitions and examples of inverse and ill-posed problems // *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems.* 2008. **16**, N 4. 317–357.
18. *Belishev M.I., Kuryev Y.V.* Boundary control, wave field continuation and inverse problems for the wave-equation // *Computers and Mathematics with Applications.* 1991. **22**, N 4–5. 27–52.

19. *Belishev M.I., Kuryiev Y.V.* To the reconstruction of a Riemannian manifold via its spectral data (BC-method) // Communications in Partial Differential Equations. 1992. **17**, N 5–6. 767–804.
20. *Belishev M.I.* Boundary control in reconstruction of manifolds and metrics (the BC method) // Inverse Problems. 1997. **13**, N 5. R1–R45.
21. *Beilina L., Klibanov M.V.* A globally convergent numerical method for a coefficient inverse problem // SIAM Journal on Scientific Computing. 2008. **31**, N 1. 478–509.
22. *Pantong N., Su J., Shan H., Klibanov M.V., Liu H.L.* Globally accelerated reconstruction algorithm for diffusion tomography with continuous-wave source in an arbitrary convex shape domain // Journal of the Optical Society of America A Optics Image Science and Vision. 2009. **26**, N 3. 456–472.
23. *Klibanov M.V., Fiddy M.A., Beilina L., Pantong N., Schenk J.* Picosecond scale experimental verification of a globally convergent algorithm for a coefficient inverse problem // Inverse Problems. 2010. **26**, N 4. doi 10.1088/0266-5611/26/4/045003.
24. *Thánh N.T., Beilina L., Klibanov M.V., Fiddy M.A.* Imaging of buried objects from experimental backscattering time-dependent measurements using a globally convergent inverse algorithm // SIAM J. Imaging Sciences. 2015. **8**, N 1. 757–786.
25. *Klibanov M.V., Koshev N.A., Li J., Yagola A.G.* Numerical solution of an ill-posed Cauchy problem for a quasilinear parabolic equation using a Carleman weight function // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. 2016. **24**, N 6. 761–776.
26. *Klibanov M.V., Yagola A.G.* Convergent numerical methods for parabolic equations with reversed time via a new Carleman estimate // Inverse Problems (in press). 2019. doi 10.1088/1361-6420/ab2777
27. *Kabanikhin S.I., Shishlenin M.A.* Boundary control and Gel'fand–Levitan–Krein methods in inverse acoustic problem // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. 2004. **12**, N 2. 125–144.
28. *Kabanikhin S.I., Shishlenin M.A.* Numerical algorithm for two-dimensional inverse acoustic problem based on Gel'fand–Levitan–Krein equation // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. 2011. **18**, N 9. 979–995.
29. *Kabanikhin S.I., Novikov N.S., Oseledets I.V., Shishlenin M.A.* Fast Toeplitz linear system inversion for solving two-dimensional acoustic inverse problem // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. 2015. **23**, N 6. 687–700.
30. *Kabanikhin S.I., Shishlenin M.A.* Two-Dimensional Analogs of the Equations of Gelfand, Levitan, Krein, and Marchenko // Eurasian Journal of Mathematical and Computer Applications. 2015. **3**, N 2. 70–99.
31. *Kabanikhin S.I., Sabelfeld K.K., Novikov N.S., Shishlenin M.A.* Numerical solution of an inverse problem of coefficient recovering for a wave equation by a stochastic projection methods // Monte Carlo Methods and Applications. 2015. **21**, N 3. 189–203.
32. *Kabanikhin S.I., Sabelfeld K.K., Novikov N.S., Shishlenin M.A.* Numerical solution of the multidimensional Gelfand–Levitan equation // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. 2015. **23**, N 5. 439–450.
33. *Kabanikhin S.I., Shishlenin M.A.* Comparative analysis of boundary control and Gel'fand–Levitan methods of solving inverse acoustic problem // Inverse Problems in Engineering Mechanics IV. Amsterdam: Elsevier, 2003. 503–512.
34. *Левашова Н.Т., Мельникова А.А.* Контрастная структура типа ступеньки в сингулярно возмущенной системе параболических уравнений // Дифференциальные уравнения. 2015. **51**, № 3. 339–358.
35. *Мельникова А.А., Чэнь М.* Существование и асимптотическое представление автоволнового решения системы уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2018. **58**, № 5, 705–715.
36. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М.: Высшая школа, 1990.
37. *Лаврентьев М.М.* Об интегральных уравнениях первого рода // Доклады Академии наук СССР. 1959. **127**, № 1. 31–33.
38. *Тихонов А.Н.* О регуляризации некорректно поставленных задач // Доклады Академии наук СССР. 1963. **153**, № 1. 49–52.
39. *Vasin V.V., Ageev A.L.* Ill-posed problems with a priori information. Utrecht: VSP, 1995.
40. *Tikhonov A.N., Goncharsky A.V., Stepanov V.V., Yagola A.G.* Numerical methods for the solution of ill-posed problems. Dordrecht: Kluwer, 1995.
41. *Морозов В.А.* О регуляризации некорректно поставленных задач и выборе параметра регуляризации // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1966. **6**, № 1. 170–175.
42. *Сидорова А.Э., Левашова Н.Т., Мельникова А.А., Дерюгина Н.Н., Семина А.Е.* Автоволновая самоорганизация в неоднородных природно-антропогенных экосистемах // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2016. № 5. 107–113.
43. *Левашова Н.Т., Мельникова А.А., Лукьяненко Д.В., Сидорова А.Э., Быцюра С.В.* Моделирование урбоэкосистем как процессов самоорганизации // Математическое моделирование. 2017. **29**, № 11. 40–52.
44. *Yagola A.G., Leonov A.S., Titarenko V.N.* Data errors and an error estimation for ill-posed problems // Inverse Problems in Engineering. 2002. **10**, N 2. 117–129.
45. *Дорофеев К.Ю., Титаренко В.Н., Ягола А.Г.* Алгоритмы построения апостериорных погрешностей решения для некорректных задач // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2003. **43**, № 1. 12–25.
46. *Titarenko V., Yagola A.* Error estimation for ill-posed problems on piecewise convex functions and sourcewise represented sets // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. 2008. **16**, N 6. 625–638.
47. *Yagola A.G., Korolev Y.M.* Error estimation in ill-posed problems in special cases // Springer Proceedings in

- Mathematics and Statistics. Vol. 48. New York: Springer, 2013. 155–164.
48. Leonov A.S. Which of inverse problems can have a priori approximate solution accuracy estimates comparable in order with the data accuracy // Numerical Analysis and Applications. 2014. **7**, N 4. 284–292.
49. Leonov A.S. A posteriori accuracy estimations of solutions to ill-posed inverse problems and extra-optimal regularizing algorithms for their solution // Numerical Analysis and Applications. 2012. **5**, N 1. 68–83.

Поступила в редакцию
11.08.2019

Application of Asymptotic Analysis Methods for Solving a Coefficient Inverse Problem for a System of Nonlinear Singularly Perturbed Reaction–Diffusion Equations with Cubic Nonlinearity

D. V. Lukyanenko¹ and A. A. Melnikova²

¹ *Lomonosov Moscow State University, Faculty of Physics; Leninskie Gory, Moscow, 119991, Russia; Ph.D., Associate Professor, e-mail: lukyanenko@physics.msu.ru*

² *Lomonosov Moscow State University, Faculty of Physics; Leninskie Gory, Moscow, 119991, Russia; Ph.D., Assistant, e-mail: melnikova@physics.msu.ru*

Received August 11, 2019

Abstract: The capabilities of asymptotic analysis methods for solving a coefficient inverse problem for a system of nonlinear singularly perturbed equations of reaction–diffusion type with cubic nonlinearity are shown. The problem considered for a system of partial differential equations is reduced to a system of algebraic equations that is much simpler for a numerical study and relates the data of the inverse problem (the information on the position of the reaction front in time) with the coefficient to be recovered. Numerical results confirm the efficiency of the proposed approach.

Keywords: singularly perturbed problem, interior and boundary layers, reaction-diffusion equation, inverse problem with the location of moving front data.

References

1. H. Meinhardt, *Models of Biological Pattern Formation* (Academic Press, London, 1982).
2. R. FitzHugh, “Impulses and Physiological States in Theoretical Models of Nerve Membrane,” *Biophys. J.* **1** (6), 445–466 (1961).
3. R. R. Aliev and A. V. Panfilov, “A Simple Two-Variable Model of Cardiac Excitation,” *Chaos Soliton Fract.* **7** (3), 293–301 (1996).
4. Y. M. Ham, “Internal Layer Oscillations in FitzHugh–Nagumo Equation,” *J. Comput. Appl. Math.* **1999**, **103** (2), 287–295 (1999).
5. A. Hagberg and E. Meron, “Pattern Formation in Non-gradient Reaction–Diffusion Systems: The Effects of Front Bifurcations,” *Nonlinearity* **7** (3), 805–835 (1994).
6. S.-L. Wu and H.-Q. Zhao, “Traveling Fronts for a Delayed Reaction–Diffusion System with a Quiescent Stage,” *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **16** (9), 3610–3621 (2011).
7. H. Larralde, M. Araujo, S. Havlin, and H. E. Stanley, “Diffusion–Reaction Kinetics for $A+B(\text{static}) \rightarrow C(\text{inert})$ for One-Dimensional Systems with Initially Separated Reactants,” *Phys. Rev. A* **46** (10), R6121–R6123 (1992).
8. D. A. Kessler and H. Levine, “Fluctuation-Induced Diffusive Instabilities,” *Nature* **394** (6693), 556–558 (1998).
9. R. O. Prum and S. Williamson, “Reaction–Diffusion Models of within-feather Pigmentation Patterning,” *Proc. R. Soc. Lond. B: Biol. Sci.* **269** (1493), 781–792 (2002).
10. D. V. Lukyanenko, M. A. Shishlenin, and V. T. Volkov, “Solving of the Coefficient Inverse Problems for a Nonlinear Singularly Perturbed Reaction–Diffusion–Advection Equation with the Final Time Data,” *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **54**, 233–247 (2018).

11. D. V. Lukyanenko, V. T. Volkov, and N. N. Nefedov, “Dynamically Adapted Mesh Construction for the Efficient Numerical Solution of a Singular Perturbed Reaction–Diffusion–Advection Equation,” *Model. Analiz Inform. Sist.* **24** (3), 322–338 (2017).
12. D. Lukyanenko, N. Nefedov, E. Nikulin, and V. Volkov, “Use of Asymptotics for New Dynamic Adapted Mesh Construction for Periodic Solutions with an Interior Layer of Reaction–Diffusion–Advection Equations,” in *Lecture Notes in Computer Science* (Springer, Heidelberg, 2017), Vol. 10187, pp. 107–118.
13. A. Melnikova, N. Levashova, and D. Lukyanenko, “Front Dynamics in an Activator-Inhibitor System of Equations,” in *Lecture Notes in Computer Science* (Springer, Heidelberg, 2017), Vol. 10187, pp. 492–499.
14. V. T. Volkov, D. V. Lukyanenko, and N. N. Nefedov, “Analytical-Numerical Approach to Describing Time-Periodic Motion of Fronts in Singularly Perturbed Reaction–Advection–Diffusion Models,” *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.* **59** (1), 50–62 (2019) [*Comput. Math. Math. Phys.* **59** (1), 46–58 (2019)].
15. D. V. Lukyanenko, M. A. Shishlenin, and V. T. Volkov, “Asymptotic Analysis of Solving an Inverse Boundary Value Problem for a Nonlinear Singularly Perturbed Time-Periodic Reaction–Diffusion–Advection Equation,” *J. Inverse Ill-Posed Probl.* **27** (2019). doi 10.1515/jiip-2017-0074
16. D. V. Lukyanenko, V. B. Grigorev, V. T. Volkov, and M. A. Shishlenin, “Solving of the Coefficient Inverse Problem for a Nonlinear Singularly Perturbed Two-Dimensional Reaction–Diffusion Equation with the Location of Moving Front Data,” *Comput. Math. Appl.* **77** (5), 1245–1254 (2019).
17. S. I. Kabanikhin, “Definitions and Examples of Inverse and Ill-Posed Problems,” *J. Inverse Ill-Posed Probl.* **16** (4), 317–357 (2008).
18. M. I. Belishev and Ya. V. Kuryiev, “Boundary Control, Wave Field Continuation and Inverse Problems for the Wave-Equation,” *Comput. Math. Appl.* 1991. **22** (4–5), 27–52 (1991).
19. M. I. Belishev and Ya. V. Kuryiev, “To the Reconstruction of a Riemannian Manifold via its Spectral Data (BC-Method),” *Commun. Part. Diff. Eq.* **17** (5–6), 767–804 (1992).
20. M. I. Belishev, “Boundary Control in Reconstruction of Manifolds and Metrics (the BC Method),” *Inverse Probl.* **13** (5), R1–R45 (1997).
21. L. Beilina and M. V. Klibanov, “A Globally Convergent Numerical Method for a Coefficient Inverse Problem,” *SIAM J. Sci. Comput.* **31** (1), 478–509 (2008).
22. N. Pantong, J. Su, H. Shan, et al., “Globally Accelerated Reconstruction Algorithm for Diffusion Tomography with Continuous-Wave Source in an Arbitrary Convex Shape Domain,” *J. Opt. Soc. Am. A Opt. Image Sci. Vis.* 2009. **26** (3), 456–472 (2009).
23. M. V. Klibanov, M. A. Fiddy, L. Beilina, et al., “Picosecond Scale Experimental Verification of a Globally Convergent Algorithm for a Coefficient Inverse Problem,” *Inverse Probl.* **26** (2010). doi 10.1088/0266-5611/26/4/045003
24. N. T. Thánh, L. Beilina, M. V. Klibanov, and M. A. Fiddy, “Imaging of Buried Objects from Experimental Backscattering Time-Dependent Measurements Using a Globally Convergent Inverse Algorithm,” *SIAM J. Imaging Sci.* **8** (1), 757–786 (2015).
25. M. V. Klibanov, N. A. Koshev, J. Li, and A. G. Yagola, “Numerical Solution of an Ill-Posed Cauchy Problem for a Quasilinear Parabolic Equation Using a Carleman Weight Function,” *J. Inverse Ill-Posed Probl.* **24** (6), 761–776 (2016).
26. M. V. Klibanov and A. G. Yagola, “Convergent Numerical Methods for Parabolic Equations with Reversed Time via a New Carleman Estimate,” *Inverse Probl.* (in press). doi 10.1088/1361-6420/ab2777
27. S. I. Kabanikhin and M. A. Shishlenin, “Boundary Control and Gel’fand–Levitan–Krein Methods in Inverse Acoustic Problem,” *J. Inverse Ill-Posed Probl.* **12** (2), 125–144 (2004).
28. S. I. Kabanikhin and M. A. Shishlenin, “Numerical Algorithm for Two-Dimensional Inverse Acoustic Problem Based on Gel’fand–Levitan–Krein Equation,” *J. Inverse Ill-Posed Probl.* **18** (9), 979–995 (2011).
29. S. I. Kabanikhin, N. S. Novikov, I. V. Oseledets, and M. A. Shishlenin, “Fast Toeplitz Linear System Inversion for Solving Two-Dimensional Acoustic Inverse Problem,” *J. Inverse Ill-Posed Probl.* **23** (6), 687–700 (2015).
30. S. I. Kabanikhin and M. A. Shishlenin, “Two-Dimensional Analogs of the Equations of Gelfand, Levitan, Krein, and Marchenko,” *Eurasian J. Math. Comput. Appl.* **3** (2), 70–99 (2015).
31. S. I. Kabanikhin, K. K. Sabelfeld, N. S. Novikov, and M. A. Shishlenin, “Numerical Solution of an Inverse Problem of Coefficient Recovering for a Wave Equation by a Stochastic Projection Methods,” *Monte Carlo Methods Appl.* **21** (3), 189–203 (2015).
32. S. I. Kabanikhin, K. K. Sabelfeld, N. S. Novikov, and M. A. Shishlenin, “Numerical Solution of the Multidimensional Gelfand–Levitan Equation,” *J. Inverse Ill-Posed Probl.* **23** (5), 439–450 (2015).
33. S. I. Kabanikhin and M. A. Shishlenin, “Comparative Analysis of Boundary Control and Gel’fand–

Levitan Methods of Solving Inverse Acoustic Problem,” in *Inverse Problems in Engineering Mechanics IV* (Elsevier, Amsterdam, 2003), pp. 503–512.

34. N. T. Levashova and A. A. Mel’nikova, “Step-like Contrast Structure in a Singularly Perturbed System of Parabolic Equations,” *Differ. Uravn.* **51** (3), 339–358 (2015) [*Differ. Equ.* **51** (3), 342–361 (2015)].

35. A. A. Melnikova and M. Chen, “Existence and Asymptotic Representation of the Autowave Solution of a System of Equations,” *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.* **58** (5), 705–715 (2018) [*Comput. Math. Math. Phys.* **58** (5), 680–690 (2018)].

36. A. B. Vasil’eva and V. F. Butuzov, *Asymptotic Methods in the Theory of Singular Perturbations* (Vysshaya Shkola, Moscow, 1990) [in Russian].

37. M. M. Lavrent’ev, “On Integral Equations of the First Kind,” *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **127** (1), 31–33 (1959).

38. A. N. Tikhonov, “Regularization of Incorrectly Posed Problems,” *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **153** (1), 49–52 (1963) [*Sov. Math. Dokl.* **4** (6), 1624–1627 (1963)].

39. V. V. Vasin and A. L. Ageev, *Ill-Posed Problems with A Priori Information* (VSP, Utrecht, 1995).

40. A. N. Tikhonov, A. V. Goncharsky, V. V. Stepanov, and A. G. Yagola, *Numerical Methods for the Solution of Ill-Posed Problems* (Kluwer, Dordrecht, 1995).

41. V. A. Morozov, “Regularization of Incorrectly Posed Problems and the Choice of Regularization Parameter,” *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.* **6** (1), 170–175 (1966) [*USSR Comput. Math. Math. Phys.* **6** (1), 242–251 (1966)].

42. A. E. Sidorova, N. T. Levashova, A. A. Melnikova, et al., “Autowave Self-Organization in Heterogeneous Natural-Anthropogenic Ecosystems,” *Vestn. Mosk. Univ., Ser. 3: Fiz. Astron., No. 5*, 107–113 (2016) [*Moscow Univ. Phys. Bull.* **71** (6), 562–568 (2016)].

43. N. T. Levashova, A. A. Melnikova, D. V. Luk’yanenko, et al., “Modeling of Ecosystems as a Process of Self-Organization,” *Mat. Model.* **29** (11), 40–52 (2017).

44. A. G. Yagola, A. S. Leonov, and V. N. Titarenko, “Data Errors and an Error Estimation for Ill-Posed Problems,” *Inverse Probl. Eng.* **10** (2), 117–129 (2002).

45. K. Yu. Dorofeev, V. N. Titarenko, and A. G. Yagola, “Algorithms for Constructing a Posteriori Errors of Solutions to Ill-Posed Problems,” *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.* **43** (1), 12–25 (2003) [*Comput. Math. Math. Phys.* **43** (1), 10–23 (2003)].

46. V. Titarenko and A. Yagola, “Error Estimation for Ill-Posed Problems on Piecewise Convex Functions and Sourcewise Represented Sets,” *J. Inverse Ill-Posed Probl.* **16** (6), 625–638 (2008).

47. A. G. Yagola and Y. M. Korolev, “Error Estimation in Ill-Posed Problems in Special Cases,” in *Applied Inverse Problems. Springer Proceedings in Mathematics and Statistics* (Springer, New York, 2013), Vol. 48, pp. 155–164.

48. A. S. Leonov, “Which of Inverse Problems Can Have a Priori Approximate Solution Accuracy Estimates Comparable in Order with the Data Accuracy,” *Numer. Anal. Appl.* **7** (4), 284–292 (2014).

49. A. S. Leonov, “A Posteriori Accuracy Estimations of solutions to Ill-Posed Inverse Problems and Extra-Optimal Regularizing Algorithms for Their Solution,” *Numer. Anal. Appl.* **5** (1), 68–83 (2012).