

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТУРБУЛЕНТНОГО ТЕЧЕНИЯ В ПЛОСКОМ КАНАЛЕ НА ОСНОВЕ СХЕМЫ КАБАРЕ

Д. Г. Асфандияров<sup>1</sup>

Представлены результаты моделирования классической задачи течения вязкой несжимаемой жидкости в плоском канале по схеме Кабаре при числах Рейнольдса, равных 5600, 13750 и 21900. Расчеты выполнены как при полном (прямое численное моделирование; DNS — Direct Numerical Simulation), так и неполном разрешении спектра турбулентных пульсаций. Во втором случае для расчетов используются сетки, характерные для моделирования пристенных течений методом крупных вихрей. Для более точного моделирования потока импульса на стенки при грубом разрешении пристенной области вводятся специальные искусственные граничные условия. Это позволяет повысить точность определения средних характеристик течения. Проведено сравнение полученных результатов по схеме Кабаре с результатами прямого численного моделирования по псевдоспектральному методу.

**Ключевые слова:** плоский канал, DNS, ILES, схема Кабаре, искусственные граничные условия.

**1. Введение.** В настоящее время моделирование турбулентности является одной из фундаментальных проблем, имеющей не только важное научное значение, но и огромное количество инженерных приложений. Наиболее полное описание турбулентных течений может быть получено в рамках прямого численного моделирования, основанного на разрешении полного спектра турбулентных пульсаций. На современном этапе возможности для прямого моделирования турбулентности ограничены мощностями существующих суперкомпьютеров и вычислительной эффективностью разработанных алгоритмов. В этой связи значительные усилия уделяются разработке и обоснованию различных вихреразрешающих алгоритмов, являющихся компромиссным вариантом между полнотой физического описания и объемом вычислительной работы, которую необходимо выполнить для решения уравнений Навье–Стокса.

Классический LES (Large Eddy Simulation) подход заключается в разделении крупномасштабных движений в турбулентном потоке и мелкомасштабных, близких к изотропным. Крупномасштабные вихри, несущие в себе максимум рейнольдсовых напряжений, рассчитываются явным образом при помощи интегрирования фильтрованных уравнений Навье–Стокса. Более “универсальные” мелкие вихри, не представленные на расчетной сетке, моделируются посредством замыкания полученных фильтрованных уравнений с помощью специальных подсеточных моделей.

Опыт применения LES-подхода свидетельствует о хорошей точности расчета не только средних, но и пульсационных характеристик потока для широкого круга задач. Наиболее трудной задачей для LES-моделирования является расчет пристенных течений. Течения в области стенки не являются однородными и изотропными. В непосредственной близости от твердой границы масштабы крупных энергосодержащих и мелких диссипативных вихрей перекрываются, а генерация турбулентной энергии происходит на масштабах, сравнимых с расстоянием от стенки [1]. Как и при прямом численном моделировании, при моделировании методом крупных вихрей требуется детальная информация о структуре потока вблизи стенки для получения приемлемых результатов.

Разработка новых эффективных LES-алгоритмов, корректно отражающих сложную динамику пристенного слоя, является одной из основных задач LES-моделирования. Перспективным направлением в данной области является использование неявных LES-алгоритмов (Implicit LES), базирующихся на схемах высокой разрешающей способности. В таких схемах диссипативный механизм (сглаживающий фильтр) содержится в операторе, аппроксимирующем конвективные слагаемые. Необходимое количество диссипации вводится за счет процедуры нелинейной коррекции потоков [1].

К числу таких схем относится схема Кабаре [2], отличающаяся простотой и вычислительной эффективностью. Схема определена на компактном шаблоне и имеет второй порядок аппроксимации как по времени, так и по пространству, обладает улучшенными диссипативными и дисперсионными свойствами, а также допускает введение нелинейной коррекции потоков на основе принципа максимума.

<sup>1</sup> Институт проблем безопасного развития атомной энергетики РАН, Большая Тульская ул., д. 52, 115191, Москва; мл. науч. сотр., e-mail: dasfandiyarov@ibrae.ac.ru

В настоящей статье приводятся результаты численного моделирования течения вязкой несжимаемой жидкости в плоском канале на основе схемы Кабаре при числах Рейнольдса, равных 5600, 13750 и 21900. Расчеты проводятся как на подробных, так и на грубых сетках, характерных для LES-моделирования пристенных течений. За основу взят вычислительный метод, изложенный в работе [3]. При расчете на грубых сетках дополнительно вводятся “искусственные” граничные условия, представленные в работе [4]. Полученные результаты сравниваются с результатами прямого численного моделирования по псевдоспектральному методу [5], который является наиболее точным для данного класса задач.

**2. Постановка задачи.** Рассматриваемая задача о течении в плоском канале представляет собой двоякопериодический плоский канал с условием прилипания на стенках. В работе используется вычислительный метод на основе схемы Кабаре в приближении несжимаемой среды для расчета на ортогональных сетках, подробно описанный в [3]. Дополнительно рассматривается вопрос о возможности корректного учета сдвиговых эффектов непосредственно вблизи стенки при расчете на относительно грубых сетках.

Исходной для численного моделирования является система уравнений Навье–Стокса для несжимаемой жидкости:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \quad \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial(u_i u_j)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \nabla^2 u_i.$$

Расчеты на грубых сетках проводятся в рамках LES-постановки с замыканием в виде модели вихревой вязкости:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0, \quad \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{u}_i \bar{u}_j)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \nu \nabla^2 \bar{u}_i + \frac{\partial(2\nu_T S_{ij})}{\partial x_j}.$$

Здесь  $S_{ij}$  — тензор скоростей деформации, вычисленный по отфильтрованным компонентам скорости. Особенностью применяемого подхода является то, что вихревая вязкость  $\nu_T$  отлична от нуля только на границах первого слоя расчетных ячеек возле стенки. На самих стенках она тоже равна нулю. В остальной области в качестве подсеточной модели используется численная диссипация (ILES). В качестве модели вихревой вязкости в первом слое расчетных ячеек применяется улучшенная сдвиговая модель Смагоринского [6]:

$$\nu_T(\mathbf{x}, t) = (C_s \Delta)^2 \left( |S(\mathbf{x}, t)| - \left| \langle S(\mathbf{x}, t) \rangle \right| \right). \tag{1}$$

Здесь прямые скобки  $|\dots|$  определяют выражение  $|S| = \sqrt{2S_{ij}S_{ij}}$ , а треугольные  $\langle \dots \rangle$  подразумевают осреднение по ансамблю реализаций. В нашей работе используется осреднение по определенным временным интервалам [4]. Определение компонент тензора скоростей деформации  $S_{ij}$  и вихревой вязкости  $\nu_T$  вводится в центрах граней только первого слоя расчетных ячеек. Характерный подсеточный масштаб  $\Delta$  определяется из объема ячейки:  $\Delta = (\Delta x \Delta y \Delta z)^{1/3}$ . Для константы Смагоринского  $C_s$  используется стандартное значение, как и для случая однородной изотропной турбулентности  $C_s = 0.16$ . Особенностью модели (1) является то, что она позволяет учитывать вклад в перенос энергии на подсеточный масштаб как за счет турбулентных пульсаций сеточного масштаба, так и за счет среднего градиента скорости.

**2.1. Расчетная область и сетка.** При моделировании используются симметричные сетки относительно центральной плоскости, параллельной стенкам, с постепенным сгущением к стенкам. Для прямого численного моделирования сетка строится достаточно подробной, особенно в пристенной области. Размеры ячеек вдоль нормального направления определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \Delta y(i) &= y(i) - y(i-1), \quad i = 1, 2, 3, \dots, ny, \\ y(i) &= \delta \frac{\operatorname{tanch}\left(\frac{R}{ny}\left(i - \frac{ny}{2}\right)\right)}{\operatorname{tanch}\left(\frac{R}{2}\right)} + \delta, \quad i = 0, 1, 2, \dots, ny. \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь  $ny$  — количество ячеек сетки в нормальном к стенке направлении,  $R$  — коэффициент сгущения,  $\delta = 1$  — полувысота канала. Характерный размер первой ячейки в нормальном к стенке направлении в пристенных единицах выбирается таким:  $\Delta y_1^+ \approx 0.1-0.15$ .

Для ILES-вычислений требования к сетке в пристенной области менее критичные. Сетки строятся таким образом, чтобы достаточно равномерно покрывать внешнюю область потока. Размеры ячеек вдоль

нормального направления определяются следующим образом:

$$\Delta y(i) = y(i) - y(i-1), \quad i = 2, 3, \dots, ny-1,$$

$$y(i) = (\delta - \Delta y_1) \frac{\operatorname{tanch}\left(\frac{R}{ny-2}\left((i-1) - \frac{ny-2}{2}\right)\right)}{\operatorname{tanch}\left(\frac{R}{2}\right)} + \delta, \quad i = 1, 2, 3, \dots, ny-1. \quad (3)$$

При этом размер первой ячейки в нормальном к стенке направлении выбирается так, чтобы  $\Delta y_1^+ \approx 1$ .

Таблица 1  
Характеристики расчетной области

$Re_m$	Размер области	Сетка	$\Delta x^+$	$\Delta z^+$	$\Delta y_1^+$	$\Delta y_C^+$
5600	$4\pi\delta \times 2\delta \times 2\pi\delta$	$512 \times 256 \times 256$	4.4	4.4	0.064	3.88
5600	$4\pi\delta \times 2\delta \times 2\pi\delta$	$80 \times 56 \times 80$	28.0	14.0	0.71	10.8
13750	$2\pi\delta \times 2\delta \times \pi\delta$	$512 \times 256 \times 256$	4.82	4.82	0.11	9.03
13750	$4\pi\delta \times 2\delta \times 2\pi\delta$	$160 \times 64 \times 160$	30.8	15.4	1.18	20.9
21900	$2\pi\delta \times 2\delta \times \pi\delta$	$512 \times 256 \times 512$	7.2	3.6	0.14	13.8
21900	$4\pi\delta \times 2\delta \times 2\pi\delta$	$256 \times 128 \times 256$	28.8	14.4	1.18	14.1

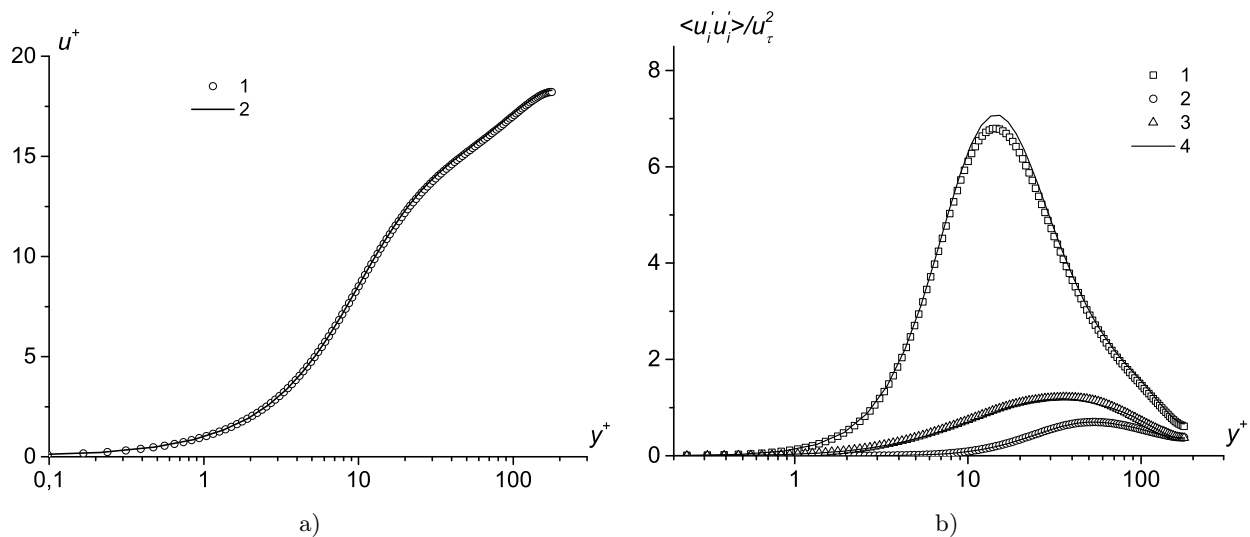


Рис. 1. Прямое численное моделирование при  $Re_m = 5600$ .

Профиль средней скорости (а): 1) Кабаре; 2) DNS [5].

Нормальные компоненты тензора реинольдсовых напряжений (б): 1)  $\bar{u}'^2$ , 2)  $\bar{v}'^2$ , 3)  $\bar{w}'^2$ , 4) DNS [5] (одинаковое обозначение для всех трех компонент)

В табл. 1 представлены соответствующие характеристики вычислительной области и расчетных сеток, используемых при моделировании. Число Рейнольдса определено через среднюю скорость в канале  $u_m$ :  $Re_m = \frac{2\delta u_m}{\nu}$ ;  $\Delta y_1^+$  и  $\Delta y_C^+$  — размеры ячейки возле стенки и в середине канала в нормальном направлении, выраженные в пристенных единицах;  $y^+ = \frac{y u_\tau}{\nu}$  и  $u_\tau$  — динамическая скорость. Размеры ячеек в пристенных единицах в табл. 1 определяются из полученного значения динамической скорости  $u_\tau$  в ходе расчетов.

**2.2. Процедура вычисления.** Расчет начинается с пуазелевского течения. Во всей расчетной области вводится небольшое возмущение, распределенное по нормальному закону. На каждом расчетном шаге по времени расход поддерживается постоянным. С течением времени возмущения нарастают, и через определенный момент течение переходит в полностью вихревое. После того как суммарная кинетическая

энергия выходит на квазипериодический уровень, для представления результатов производится осреднение характеристик течения по времени и по пространству (по двум периодическим направлениям).

Для уменьшения времени расчета при прямом численном моделировании вначале расчет производится на равномерной сетке, а после перехода течения из ламинарного в полностью вихревое поле скорости интерполируется на расчетную сетку со сгущением.

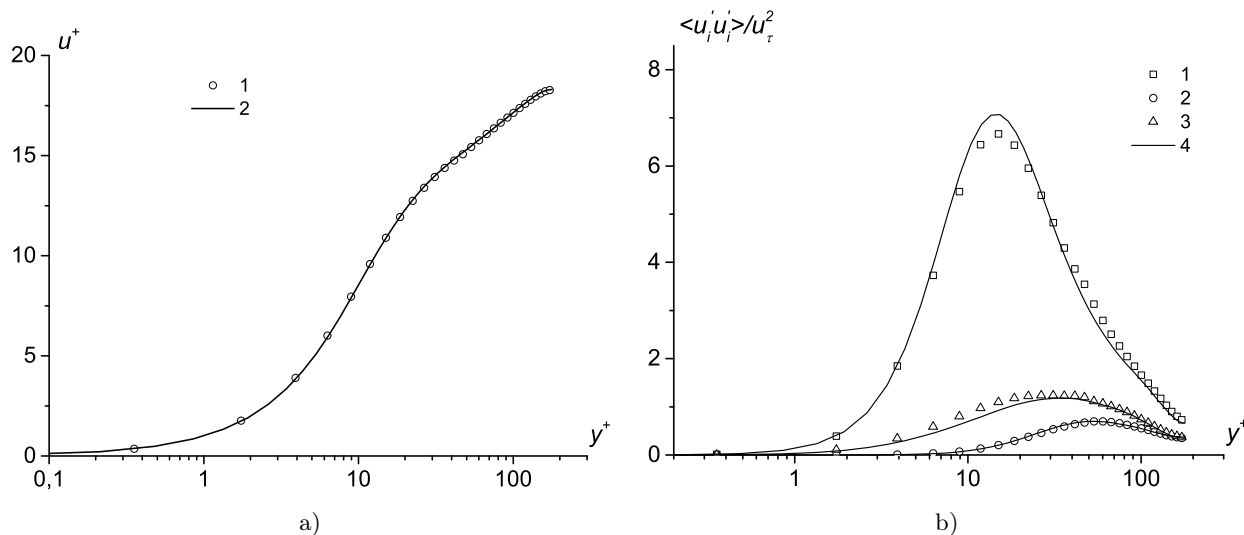


Рис. 2. ILES-моделирование при  $Re_m = 5600$ .  
Профиль средней скорости (а): 1) Кабаре; 2) DNS [5].

Нормальные компоненты тензора реинольдсовых напряжений (b): 1)  $\overline{u'^2}^+$ ,  
2)  $\overline{v'^2}^+$ , 3)  $\overline{w'^2}^+$ , 4) DNS [5] (одинаковое обозначение для всех трех компонент)

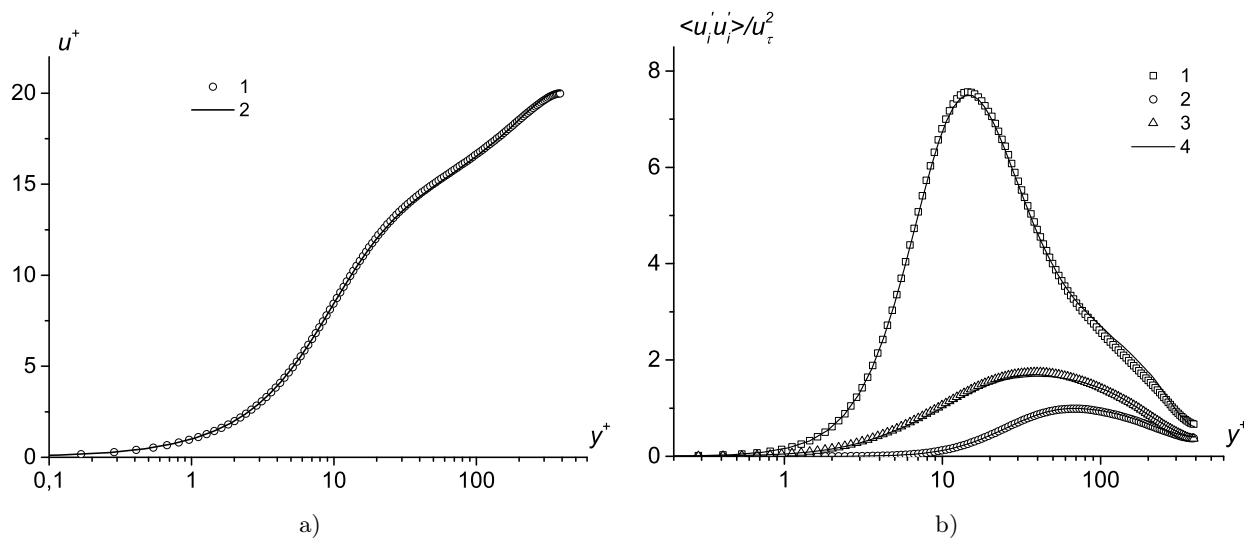


Рис. 3. Прямое численное моделирование при  $Re_m = 13750$ .  
Профиль средней скорости (а): 1) Кабаре; 2) DNS [5].

Нормальные компоненты тензора реинольдсовых напряжений (b): 1)  $\overline{u'^2}^+$ ,  
2)  $\overline{v'^2}^+$ , 3)  $\overline{w'^2}^+$ , 4) DNS [5] (одинаковое обозначение для всех трех компонент)

**3. Результаты и обсуждение.** В этом разделе приводятся результаты численного моделирования течения в плоском канале по схеме Кабаре при числах Рейнольдса, равных 5600, 13750 и 21900. Расчеты проводились как на подробных сетках в рамках прямого численного моделирования, так и на относительно грубых сетках в рамках ILES-подхода.

На рис. 1–6 представлены рассчитанные средние характеристики течения в плоском канале: средний профиль скорости и три нормальные компоненты тензора реинольдсовых напряжений. Сравнение проводится с результатами прямого численного моделирования по псевдоспектральному методу [5].

Результаты прямого численного моделирования (рис. 1, 3, 5) по схеме Кабаре показывают очень хорошее совпадение с результатами расчета по псевдоспектральному методу. При расчете по описанной методике на грубых сетках (рис. 2, 4, 6) первые и вторые моменты скорости тоже определяются с хорошей точностью. В работе [4] показано, что при расчете течения в плоском канале на грубых сетках без использования искусственных граничных условий отсутствие дополнительного учета сдвиговых эффектов, вводимых моделью (1) в области вблизи стенки, приводит к увеличению интенсивности продольных турбулентных пульсаций  $\overline{u'^2}^+$  и, как следствие, к подавлению интенсивности турбулентных пульсаций в нормальном  $\overline{v'^2}^+$  и поперечном  $\overline{w'^2}^+$  направлениях.

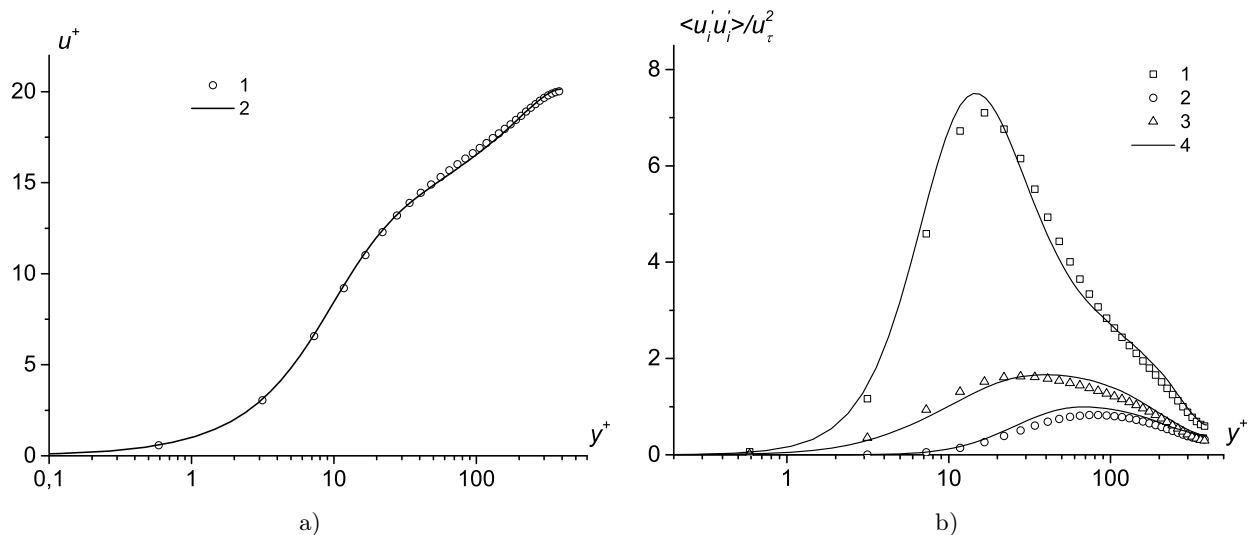


Рис. 4. LES-моделирование при  $Re_m = 13750$ .

Профиль средней скорости (а): 1) Кабаре; 2) DNS [5].

Нормальные компоненты тензора реинольдсовых напряжений (б): 1)  $\overline{u'^2}^+$ , 2)  $\overline{v'^2}^+$ , 3)  $\overline{w'^2}^+$ , 4) DNS [5] (одинаковое обозначение для всех трех компонент)

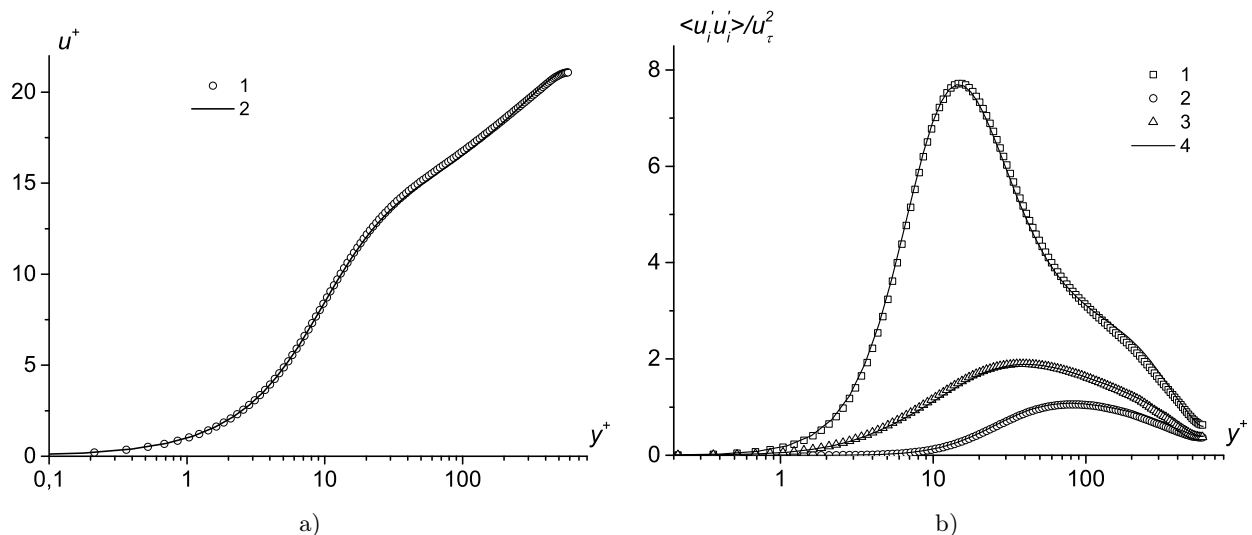


Рис. 5. Прямое численное моделирование при  $Re_m = 21900$ .

Профиль средней скорости (а): 1) Кабаре; 2) DNS [5].

Нормальные компоненты тензора реинольдсовых напряжений (б): 1)  $\overline{u'^2}^+$ , 2)  $\overline{v'^2}^+$ , 3)  $\overline{w'^2}^+$ , 4) DNS [5] (одинаковое обозначение для всех трех компонент)

В табл. 2 представлено сравнение коэффициента сопротивления (КС), рассчитанного по схеме Кабаре на различных сетках в исследуемом диапазоне чисел Рейнольдса. Использование искусственных граничных условий позволяет добиться высокой точности в определении КС для течения в плоском канале (в пределах 1% в сравнении с данными DNS-расчетов).

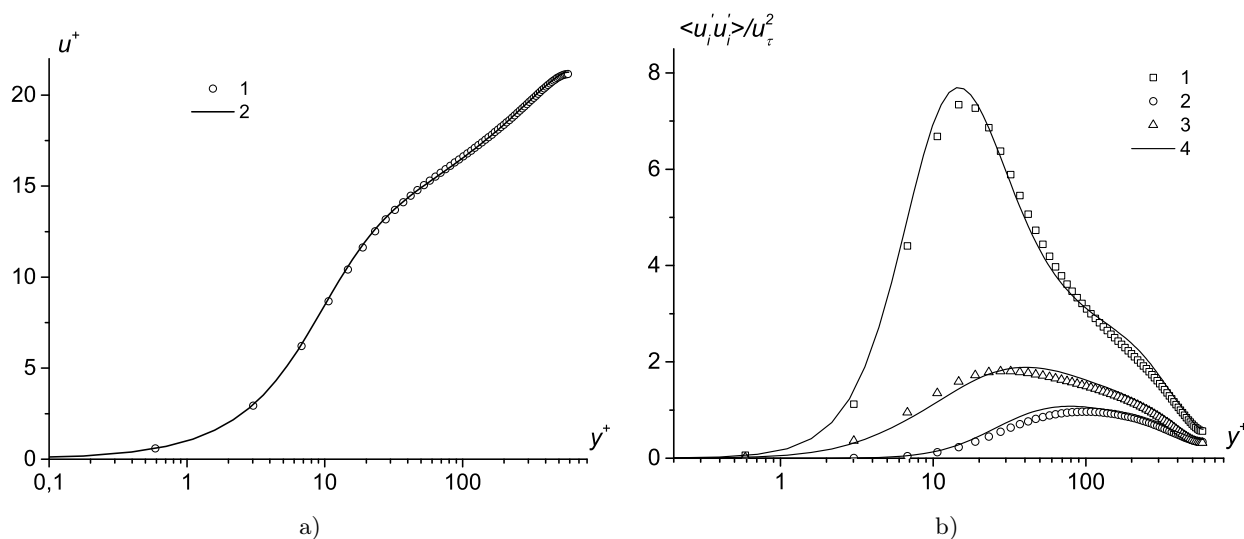


Рис. 6. Прямое численное моделирование  $Re_m = 21900$ .  
 Профиль средней скорости (а): 1) Кабаре; 2) DNS [5].  
 Нормальные компоненты тензора реинольдсовых напряжений (b): 1)  $\overline{u'^2}^+$ ,  
 2)  $\overline{v'^2}^+$ , 3)  $\overline{w'^2}^+$ , 4) DNS [5] (одинаковое обозначение для всех трех компонент)

Таблица 2

Сравнительные данные по  $C_f$

$Re_m$	$C_f$ , DNS	$C_f$ , ILES	$C_f$ DNS, Мозер и др. [5]
5600	$8.2 \times 10^{-3}$	$8.17 \times 10^{-3}$	$8.1 \times 10^{-3}$
13750	$6.50 \times 10^{-3}$	$6.50 \times 10^{-3}$	$6.50 \times 10^{-3}$
21900	$5.75 \times 10^{-3}$	$5.78 \times 10^{-3}$	$5.75 \times 10^{-3}$

**4. Заключение.** В настоящей статье представлены результаты моделирования классической задачи течения вязкой несжимаемой жидкости в плоском канале по схеме Кабаре при различных числах Рейнольдса. Результаты прямого численного моделирования по схеме Кабаре показывают очень хорошее совпадение с результатами прямого численного моделирования по псевдоспектральному методу, который является наиболее точным для данного типа задач. Кроме того, приводятся результаты расчета на относительно грубых сетках, характерных для LES-моделирования пристенных течений. Представленный алгоритм расчета на таких сетках позволяет достаточно точно рассчитывать первые и вторые моменты скорости течения.

Работа выполнена с использованием оборудования Центра коллективного пользования сверхвысокопроизводительными вычислительными ресурсами МГУ им. М.В. Ломоносова.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Волков К.Н., Емельянов В.Н. Моделирование крупных вихрей в расчетах турбулентных течений. М.: Физматлит, 2008.
2. Головизнин В.М., Зайцев М.А., Карабасов С.А., Короткин И.А. Новые алгоритмы вычислительной гидродинамики для многопроцессорных вычислительных комплексов. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2013.
3. Асфандияров Д.Г., Головизнин В.М., Финогенов С.А. Беспараметрический метод расчета турбулентного течения в плоском канале в широком диапазоне чисел Рейнольдса // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2015. 55, № 9. 1545–1558.
4. Асфандияров Д.Г. Искусственные граничные условия при ILES-моделировании течения в плоском канале по схеме Кабаре // Вычислительные методы и программирование. 2019. 20. 12–20.
5. Moser R.D., Kim J., Mansour N.N. Direct numerical simulation of turbulent channel flow up to  $Re_\tau = 590$  // Phys. Fluids. 1999. 11, N 4. 943–945.
6. Lévêque E., Toschi F., Shao L., Bertoglio J.P. Shear-improved Smagorinsky model for large-eddy simulation of wall-bounded turbulent flows // J. Fluid Mech. 2007. 570. 491–502.

Поступила в редакцию  
12.07.2019

## Numerical Modeling of Turbulent Flow in a Plane Channel on the Basis of the Cabaret Scheme

D. G. Asfandiyarov<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Nuclear Safety Institute, Russian Academy of Sciences; ulitsa Bol'shaya Tul'skaya 52, Moscow, 115191, Russia; Junior Scientist, e-mail: dasfandiyarov@ibrae.ac.ru*

Received July 12, 2019

**Abstract:** Some results of modeling the classical problem of flow of a viscous incompressible fluid in a plane channel at the Reynolds numbers equal to 5600, 13750, and 21900 using the Cabaret scheme are discussed. The computations are performed for the complete turbulence spectrum resolution (direct numerical simulation) and for the incomplete resolution. In the latter case, the grids typical for the large eddy simulation of near-wall turbulent flows are used. In order to obtain a more accurate representation of the momentum transfer toward the wall, some artificial boundary conditions are introduced. This allows us to model the mean flow characteristics with a higher accuracy. The numerical results obtained by the Cabaret scheme are compared with the numerical results obtained by the pseudospectral method.

**Keywords:** plane channel, DNS, ILES, Cabaret scheme, artificial boundary conditions.

### References

1. K. N. Volkov and V. N. Emel'yanov, *Large Eddy Simulation in Calculations of Turbulent Flows* (Fizmatlit, Moscow, 2008) [in Russian].
2. V. M. Goloviznin, M. A. Zaitsev, S. A. Karabasov, and I. A. Korotkin, *New CFD Algorithms for Multiprocessor Computer Systems* (Mosk. Gos. Univ., Moscow, 2013) [in Russian].
3. D. G. Asfandiyarov, V. M. Goloviznin, and S. A. Finogenov, "Parameter-Free Method for Computing the Turbulent Flow in a Plane Channel in a Wide Range of Reynolds Numbers," *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.* **55** (9), 1545–1558 (2015) [*Comput. Math. Math. Phys.* **55** (9), 1515–1526 (2015)].
4. D. G. Asfandiyarov, "Artificial Boundary Conditions for the ILES Modeling of Plane Channel Flow Using the Cabaret Scheme," *Vychisl. Metody Programm.* **20**, 12–20 (2019).
5. R. D. Moser, J. Kim., and N. N. Mansour, "Direct Numerical Simulation of Turbulent Channel Flow up to  $Re_\tau = 590$ ," *Phys. Fluids* **11** (4), 943–945 (1999).
6. E. Lévêque, F. Toschi, L. Shao, and J.-P. Bertoglio, "Shear-Improved Smagorinsky Model for Large-Eddy Simulation of Wall-Bounded Turbulent Flows," *J. Fluid Mech.* **570**, 491–502 (2007).