

УДК 519.6:537.8:537.6:621.38

doi 10.26089/NumMet.v20r107

УЧЕТ ЭФФЕКТОВ ГИСТЕРЕЗИСА ПРИ РАСЧЕТЕ ВИХРЕВЫХ ТОКОВ

И. М. Ступаков¹, М. Э. Рояк², Н. С. Кондратьева³,
А. В. Зеленский⁴, Н. А. Винокуров⁵

Рассматривается подход, позволяющий при численном моделировании электромагнитных процессов одновременно учитывать как остаточную намагниченность, так и вихревые токи. Работоспособность разработанного метода верифицируется путем сравнения с результатами экспериментальных измерений для магнита с О-образным магнитопроводом.

Ключевые слова: математическое моделирование, численное моделирование, электромагнетизм, вихревые токи, гистерезис, метод конечных элементов, метод граничных элементов.

1. Введение. Численное моделирование электромагнитных процессов обычно основывается на решении системы уравнений Максвелла, которая в дифференциальной форме при отсутствии токов смещения имеет вид [1]

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} + \sigma \mathbf{E}, \quad (1)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (3)$$

где \mathbf{E} — напряженность электрического поля, \mathbf{H} — напряженность магнитного поля, \mathbf{B} — магнитная индукция, \mathbf{J} — плотность сторонних токов и σ — удельная проводимость.

При моделировании электромагнитных процессов во фрагментах ускорителей заряженных частиц чаще всего используется решение задачи магнитостатики [1], поскольку вихревые токи в конструкции при относительно медленном изменении тока в обмотках обычно невелики и ими можно пренебречь. Задача магнитостатики описывается системой уравнений

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J}, \quad (4)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (5)$$

где магнитная индукция \mathbf{B} связана с напряженностью \mathbf{H} соотношением $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ и μ называется магнитной проницаемостью и в общем случае является функцией от \mathbf{H} .

Однако при высоких требованиях к точности моделирования погрешность стационарной модели оказывается слишком большой и появляется потребность в разработке математических моделей, более точно описывающих процессы, и соответствующих им численных методов. Заметим, что стационарная модель (4)–(5) обычно пренебрегает не только вихревыми токами, но и остаточной намагниченностью, которая при достаточно медленных процессах дает даже более существенный вклад, чем вихревые токи [2–4].

Для учета остаточной намагниченности при численном моделировании электромагнитных процессов, протекающих при изменении тока во фрагментах ускорителей заряженных частиц, вместо соотношения $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ используется связь напряженности и индукции магнитного поля через намагниченность $\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$, где \mathbf{M} — намагниченность, а μ_0 — магнитная постоянная. При этом намагниченность может зависеть как от текущей величины магнитного поля, так и от истории его изменения. Математическая модель на основе полного и неполного скалярного магнитного потенциала рассмотрена авторами

¹ Новосибирский государственный технический университет, факультет прикладной математики и информатики, просп. К. Маркса, 20, 630073, г. Новосибирск; доцент, e-mail: istupakov@gmail.com

² Новосибирский государственный технический университет, факультет прикладной математики и информатики, просп. К. Маркса, 20, 630073, г. Новосибирск; профессор, e-mail: royak@corp.nstu.ru

³ Новосибирский государственный технический университет, факультет прикладной математики и информатики, просп. К. Маркса, 20, 630073, Новосибирск; мл. науч. сотр., e-mail: kondratyeva.ns@gmail.com

⁴ Новосибирский государственный технический университет, факультет прикладной математики и информатики, просп. К. Маркса, 20, 630073, Новосибирск; аспирант, e-mail: virus1001010@gmail.com

⁵ Институт ядерной физики им. Г. И. Будкера СО РАН, просп. Лаврентьева, 11, 630090, Новосибирск; профессор, член-корреспондент РАН, зав. лабораторией, e-mail: vinokurov@inp.nsk.su

настоящей статьи в работе [5]. Однако такая модель принципиально не позволяет учитывать вихревые токи, и поэтому для дальнейшего повышения точности численного моделирования необходимо разработать подход, позволяющий одновременно учитывать как остаточную намагниченность, так и вихревые токи. Этот подход предложен в данной статье. Насколько известно авторам, подобные задачи (с одновременным учетом вихревых токов и остаточной намагниченности) для ускорительных магнитов ранее численно не решались, и предлагаемый подход является новым.

2. Математическая модель. Для решения задачи модифицируем постановку с неполным скалярным магнитным потенциалом в непроводящей среде и векторным магнитным потенциалом в проводящей. Такая постановка рассматривалась авторами в работе [6] и позволяет учитывать вихревые токи без учета остаточной намагниченности. Рассмотрим вариант учета остаточной намагниченности в векторном потенциале.

Пусть \mathbf{H}_{ext} — напряженность магнитного поля, создаваемого сторонними токами в однородном пространстве. Это поле может быть вычислено через закон Био–Савара–Лапласа [7].

Обозначим область с нулевой проводимостью через Ω_0 . Представим напряженность магнитного поля в Ω_0 в следующем виде:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_{\text{ext}} - \text{grad } u, \quad \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}. \quad (6)$$

Здесь u — неполный скалярный магнитный потенциал.

Запишем уравнение (3) в слабой форме, умножив его скалярно на пробную функцию v :

$$\int_{\Omega_0} \text{div } \mathbf{B} v \, d\Omega = 0.$$

Применяя к этому уравнению формулу интегрирования по частям, получаем

$$-\int_{\Omega_0} \mathbf{B} \cdot \text{grad } v \, d\Omega = -\oint_{\partial\Omega_0} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} v \, dS.$$

Воспользуемся соотношениями (6):

$$\mu_0 \int_{\Omega_0} \text{grad } u \cdot \text{grad } v \, d\Omega - \mu_0 \int_{\Omega_0} \mathbf{H}_{\text{ext}} \cdot \text{grad } v \, d\Omega = -\oint_{\partial\Omega_0} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} v \, dS.$$

Применим ко второму интегралу формулу интегрирования по частям. С учетом равенства дивергенции поля \mathbf{H}_{ext} нулю внутри области Ω_0 получим уравнение для поиска скалярного потенциала в слабой форме

$$\mu_0 \int_{\Omega_0} \text{grad } u \cdot \text{grad } v \, d\Omega = \mu_0 \oint_{\partial\Omega_0} \mathbf{H}_{\text{ext}} \cdot \mathbf{n} v \, dS - \oint_{\partial\Omega_0} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} v \, dS, \quad (7)$$

где v — скалярная пробная функция, $u, v \in H^1(\Omega_0)$, $H^1(\Omega_0)$ — пространство Соболева.

Обозначим область с ненулевой проводимостью через Ω_F . Будем считать, что в этой области отсутствуют сторонние токи, т.е. $\mathbf{J} = 0$. Введем векторный магнитный потенциал \mathbf{A} следующим образом:

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}. \quad (8)$$

Введенный таким образом потенциал \mathbf{A} обеспечивает автоматическое выполнение уравнений (2) и (3) в области Ω_F .

Запишем уравнение (1) в слабой форме для области Ω_F :

$$\int_{\Omega_F} \text{rot } \mathbf{H} \cdot \Psi \, d\Omega = \int_{\Omega_F} \sigma \mathbf{E} \cdot \Psi \, d\Omega.$$

Здесь Ψ — произвольная векторная пробная функция из пространства $H^{\text{rot}}(\Omega_F)$. Применяя к этому уравнению формулу интегрирования по частям, получаем

$$\int_{\Omega_F} \mathbf{H} \cdot \text{rot } \Psi \, d\Omega = \int_{\Omega_F} \sigma \mathbf{E} \cdot \Psi \, d\Omega + \oint_{\partial\Omega_F} (\mathbf{H} \times \mathbf{n}) \cdot \Psi \, dS.$$

Воспользуемся соотношениями (8). В итоге получаем уравнение в слабой форме для векторного потенциала

$$\frac{1}{\mu_0} \int_{\Omega_F} \text{rot } \mathbf{A} \cdot \text{rot } \Psi \, d\Omega + \int_{\Omega_F} \sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \cdot \Psi \, d\Omega = \int_{\Omega_F} \mathbf{M} \cdot \text{rot } \Psi \, d\Omega + \oint_{\partial\Omega_F} (\mathbf{H} \times \mathbf{n}) \cdot \Psi \, dS, \quad (9)$$

где $\mathbf{A}, \Psi \in H^{\text{rot}}(\Omega_F)$.

Обозначим $\partial\Omega_0 \cap \partial\Omega_F$ через Γ и будем считать, что на всех внешних границах расчетной области либо нормальная компонента \mathbf{B} , либо касательная компонента \mathbf{H} равны нулю (что соответствует наиболее распространенным условиям симметрии или удаленной границе). Фактически это означает, что все интегралы по внешней границе в формулах (7) и (9) обращаются в нуль за счет выбора соответствующих краевым условиям пространств $H^1(\Omega_0)$ и $H^{\text{rot}}(\Omega_F)$.

Потребуем, чтобы на границе Γ были непрерывны нормальная компонента \mathbf{B} и касательная компонента \mathbf{H} . Для этого подставим в уравнение для векторного потенциала (9) представление для \mathbf{H} из соотношений для скалярного потенциала (6), а в уравнение для скалярного потенциала (7) представление для \mathbf{B} из соотношений для векторного потенциала (8):

$$\frac{1}{\mu_0} \int_{\Omega_F} \text{rot } \mathbf{A} \cdot \text{rot } \Psi \, d\Omega + \int_{\Omega_F} \sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \cdot \Psi \, d\Omega + \int_{\Gamma} (\text{grad } u \times \mathbf{n}) \cdot \Psi \, dS = \int_{\Omega_F} \mathbf{M} \cdot \text{rot } \Psi \, d\Omega + \int_{\Gamma} (\mathbf{H}_{\text{ext}} \times \mathbf{n}) \cdot \Psi \, dS, \quad (10)$$

$$- \int_{\Gamma} (\text{rot } \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}) v \, dS + \mu_0 \int_{\Omega_0} \text{grad } u \cdot \text{grad } v \, d\Omega = -\mu_0 \int_{\Gamma} \mathbf{H}_{\text{ext}} \cdot \mathbf{n} v \, dS. \quad (11)$$

Здесь \mathbf{n} — нормаль к Γ , внешняя по отношению к Ω_F .

С учетом доказанного в [6] соотношения

$$\int_{\Gamma} (\text{rot } \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}) v \, dS = \int_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot (\text{grad } v \times \mathbf{n}) \, dS,$$

уравнение (11) можно переписать в виде

$$- \int_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot (\text{grad } v \times \mathbf{n}) \, dS + \mu_0 \int_{\Omega_0} \text{grad } u \cdot \text{grad } v \, d\Omega = -\mu_0 \int_{\Gamma} \mathbf{H}_{\text{ext}} \cdot \mathbf{n} v \, dS. \quad (12)$$

3. Учет остаточной намагниченности. Будем считать, что область Ω_0 разбита на конечные элементы со скалярными базисными функциями φ , а область Ω_F разбита на конечные элементы с векторными базисными функциями ψ . Эти же функции являются пробными, т.е.

$$u = \sum_j p_j \varphi_j, \quad \mathbf{A} = \sum_j q_j \psi_j. \quad (13)$$

Подставим эти функции в уравнения (10) и (12) и запишем результат в матричном виде

$$\begin{bmatrix} A^v & C^T \\ -C & A^s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f^v + f^{\text{mag}} \\ f^s \end{bmatrix}, \quad (14)$$

где

$$\begin{cases} A_{ij}^v = \frac{1}{\mu_0} \int_{\Omega_F} \text{rot } \psi_j \cdot \text{rot } \psi_i \, d\Omega + \int_{\Omega_F} \gamma \psi_j \cdot \psi_i \, d\Omega, & A_{ij}^s = \mu_0 \int_{\Omega_0} \text{grad } \varphi_j \cdot \text{grad } \varphi_i \, d\Omega, \\ C_{ij} = \int_{\Gamma} \psi_j \cdot (\text{grad } \varphi_i \times \mathbf{n}) \, dS, & f_i^v = \int_{\Gamma} (\mathbf{H}_{\text{ext}} \times \mathbf{n}) \cdot \psi_i \, dS + \int_{\Omega_F} \mathbf{F} \cdot \psi_i \, d\Omega, & f_i^s = -\mu_0 \int_{\Gamma} \mathbf{H}_{\text{ext}} \cdot \mathbf{n} \varphi_i \, dS, \end{cases}$$

а γ и \mathbf{F} получаются из аппроксимации уравнений разностной схемой по времени (подробно про разностную аппроксимацию по времени см. [1]).

Если принять, что намагниченность является постоянной на каждом конечном элементе Ω_F^k (k — номер элемента) и зависит от среднего на нем значения \mathbf{B} (обозначим его $\tilde{\mathbf{B}}^k$), то соответствующее интегралу от намагниченности в (10) выражение будет иметь вид

$$f_i^{\text{mag}} = \int_{\Omega_F} \mathbf{M} \cdot \text{rot } \psi_i d\Omega = \sum_k \mathbf{M}(\tilde{\mathbf{B}}^k) \cdot \mathbf{R}_i,$$

где $\mathbf{R}_i = \int_{\Omega_F^k} \text{rot } \psi_i d\Omega$.

Для вычисления $\tilde{\mathbf{B}}^k$ воспользуемся формулой

$$\tilde{\mathbf{B}}^k = \frac{1}{|\Omega_F^k|} \int_{\Omega_F^k} \mathbf{B} d\Omega = \frac{1}{|\Omega_F^k|} \sum_j q_j \mathbf{R}_j,$$

где $|\Omega_F^k|$ — объем элемента Ω_F^k и q_j — искомые веса разложения из (13).

Для решения нелинейной задачи (14) будем использовать метод Ньютона, необходимые для этого производные можно записать в виде

$$\frac{\partial f_i^{\text{mag}}}{\partial q_j} = \sum_k \frac{1}{|\Omega_F^k|} \mathbf{R}_j^T \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathbf{B}} \mathbf{R}_i. \quad (15)$$

В большинстве моделей гистерезиса намагниченность зависит не от \mathbf{B} , а от \mathbf{H} [8–13]. В таком случае $\mathbf{M}(\mathbf{B})$ можно получить, решая уравнение

$$\mathbf{H} + \mathbf{M}(\mathbf{H}) = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0}$$

относительно \mathbf{H} при заданной зависимости $\mathbf{M}(\mathbf{H})$, а для вычисления производных использовать выражение

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathbf{B}} = \frac{1}{\mu_0} \left(\mathbf{I} + \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathbf{H}} \right)^{-1} \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathbf{H}}.$$

В качестве векторной модели гистерезиса $\mathbf{M}(\mathbf{H})$ будем использовать модель, полученную из скалярной на основе подхода Майергойца [9]:

$$\mathbf{M}(\mathbf{H}) = \sum_n w_n M(\mathbf{H} \cdot \mathbf{r}_n) \mathbf{r}_n, \quad \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathbf{H}} = \sum_n w_n M'(\mathbf{H} \cdot \mathbf{r}_n) \mathbf{r}_n \otimes \mathbf{r}_n.$$

Здесь w_n и \mathbf{R}_n — веса и узлы квадратуры для интегрирования по единичной сфере, а $M(H)$ — скалярная модель гистерезиса. Заметим, что такой выбор модели гистерезиса обеспечивает симметричность матрицы метода Ньютона, элементы которой определяются выражением (15).

Как показали вычислительные эксперименты, гладкость выбранной модели гистерезиса $M(H)$ существенно влияет на сходимость метода Ньютона, поэтому приведенные ниже результаты получены с использованием модели Прейсаха [10], являющейся гладкой.

Намагниченность в этой модели может быть представлена в виде

$$M(H) = \iint \varphi(-h_1) \varphi(h_2) \gamma_H(h_1, h_2) dh_1 dh_2,$$

где $\gamma_H(h_1, h_2)$ принимает значение $+1$ или -1 в зависимости от истории изменения H . Одномерное распределение φ задается выражением

$$\varphi(x) = \frac{ae^{-bx}}{(1 + ce^{-bx})^2},$$

где a , b и c — параметры модели.

4. Результаты экспериментов. Продемонстрируем работоспособность предлагаемого подхода на примере расчета поля с заметным влиянием вихревых токов и эффектов гистерезиса. Расчеты будем

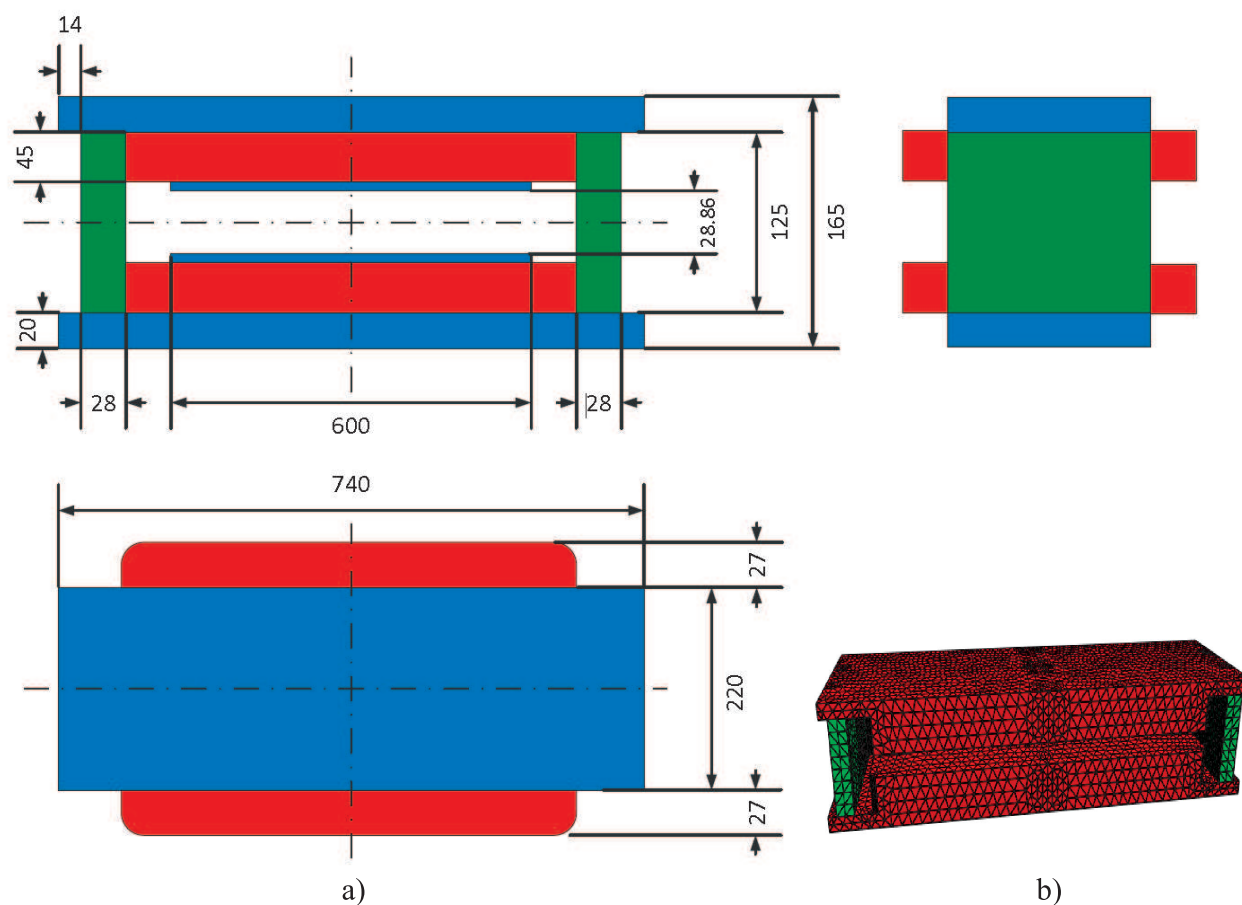


Рис. 1. Поворотный магнит: а) схема магнита, б) конечно-элементная сетка на поверхности магнита

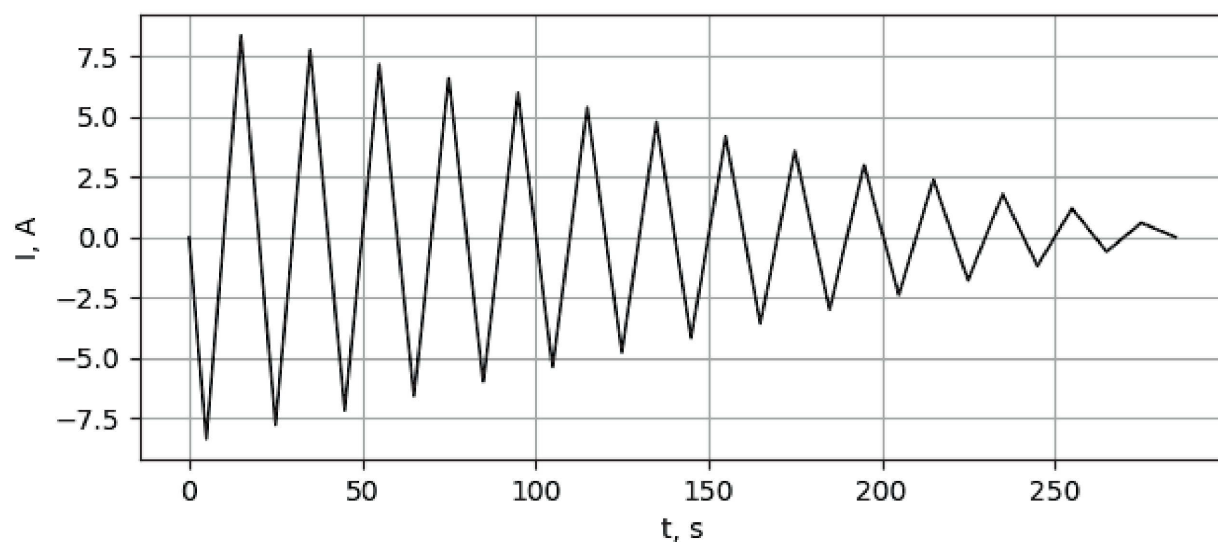


Рис. 2. График зависимости тока в обмотках от времени

проводить для поворотного магнита (рис. 1а) с O-образным магнитопроводом из статьи [5], в которой для магнита были подобраны параметры моделей гистерезиса. На этом магните были проведены измерения поля в центре магнита при токе в обмотках, график которого показан на рис. 2.

При численном моделировании была использована конечно-элементная сетка, степень подробности

которой показана на рис. 1b. Реально была задана 1/8 часть этого магнита, число конечных элементов в металле составило 867. Задача решалась с шагом по времени 0.25 с двухслойной полностью неявной схемой. Общее время моделирования — 2 часа 15 минут на компьютере с процессором Intel Core I7-3770 K и 32 Гб оперативной памяти. Основное время заняло итерационное решение методом Ньютона нелинейных задач на каждом шаге по времени.

На рис. 3 слева приводятся графики зависимости индукции магнитного поля от тока (при этом для наглядности из индукции вычтен ток, умноженный на 50) для расчета с использованием рассматриваемого подхода и для результатов измерений. Удельная проводимость σ при моделировании была задана равной 3×10^6 см/м.

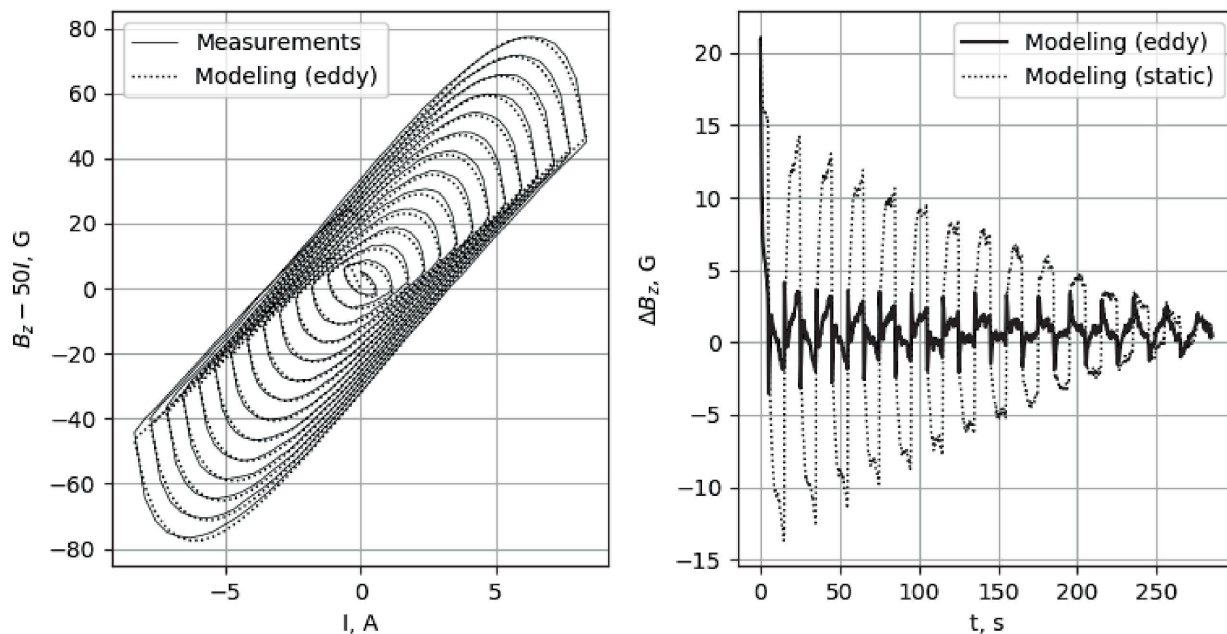


Рис. 3. Сравнение результатов численного моделирования с результатами измерений

Для оценки влияния вихревых токов на рис. 3 справа приводится зависимость от времени разности результатов расчета и измерений. Для сравнения на этом же графике приводится результат расчета методом, описанным в статьях [5, 14], в котором эффект гистерезиса учитывается без влияния вихревых токов.

Как видно из приведенных графиков, без учета вихревых токов погрешность численного моделирования достигает 15 Гс (что составляет около 3% от величины поля). При этом с использованием предложенного подхода погрешность не превышает 3 Гс, за исключением начального состояния процесса, которое в расчете считается полностью размагниченным.

5. Выводы. Изложенные в настоящей статье результаты показывают, что рассмотренный подход является вполне работоспособным и позволяет достаточно точно учитывать как вихревые токи, так и остаточную намагниченность. Заметим, однако, что использованная скалярная модель Прейсаха не является самой эффективной для учета остаточной намагниченности, поэтому разработка методов решения нелинейной задачи (10), (12), позволяющих использовать менее гладкие модели гистерезиса, остается актуальной.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 17-41-543174 «Численное моделирование электромагнитных процессов с существенным влиянием вихревых токов и зависимостью намагниченности от предыстории» и Правительства Новосибирской области.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Соловейчик Ю.Г., Рояк М.Э., Персова М.Г. Метод конечных элементов для решения скалярных и векторных задач. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2007.
2. Нейман Л.А., Нейман В.Ю. Моделирование процессов в электромагнитном вибрационном преобразователе с

- потерями энергии в магнитопроводе // Доклады Томского государственного университета систем управления и радиоэлектроники. 2016. **19**, № 1. 73–78.
3. *Подберезная И.Б.* Алгоритмы моделирования магнитного гистерезиса // Известия высших учебных заведений. Электромеханика. 2015. № 6. 5–13.
 4. *Подберезная И.Б.* Программный комплекс для расчета трехмерных электромагнитных полей электротехнических устройств методом пространственных интегральных уравнений // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Технические науки. 2017. № 1. 19–23.
 5. *Рояк М.Э., Ступаков И.М., Кондратьева Н.С., Винокуров Н.А., Шевченко О.А., Середняков С.С., Горбачёв Я.И.* Применение новой модели остаточной намагниченности железа для расчета поворотного магнита ускорителя // Письма в Журнал технической физики. 2017. **43**, № 20. 28–36.
 6. *Royak M., Stupakov I., Kondratyeva N., Antokhin E.* Finite element formulation with coupled vector-scalar magnetic potentials for eddy current problems // Proc. 11th International Forum on Strategic Technology (IFOST-2016). New York: IEEE Press, 2016. 456–460.
 7. *Stupakov I.M., Royak M.E., Kondratyeva N.S.* The method for calculating magnetic field induced by current coils // Proc. 13th International Scientific-Technical Conference on Actual Problems of Electronics Instrument Engineering (APEIE-2016). Vol. 2. New York: IEEE Press, 2016. 347–350.
 8. *Матюк В.Ф., Осипов А.А.* Математические модели кривой намагничивания и петель магнитного гистерезиса. Часть I. Анализ моделей // Неразрушающий контроль и диагностика. 2011. № 2. 3–35.
 9. *Mayergoyz I.D.* Mathematical models of hysteresis and their applications. New York: Academic Press, 2003.
 10. *Szabó Zs., Tugyi I., Kádár Gy., Fűzi J.* Identification procedures for scalar Preisach model // Physica B: Condensed Matter. 2004. **343**, N 1–4. 142–147.
 11. *Денисов П.А.* Описание петли гистерезиса с использованием явных выражений для модели Джилса–Атертона второго уровня // Известия высших учебных заведений. Электромеханика. 2018. **61**, № 1. 6–12.
 12. *Чернышев А.В.* Модель магнитного гистерезиса Джайльса–Эйтертона и ее модификации // Контроль. Диагностика. 2016. № 2. 55–60.
 13. *Кулаев Ю.В., Курбатов П.А.* Модель гистерезисных магнитных свойств материалов при наложении постоянного и переменного магнитных полей // Альтернативная энергетика и экология. 2015. № 22. 23–29.
 14. *Винокуров Н.А., Шевченко О.А., Середняков С.С., Щеглов М.А., Рояк М.Э., Ступаков И.М., Кондратьева Н.С.* Учет гистерезиса при расчете поля в элементах магнитных систем ускорителей // Письма в Журнал технической физики. 2016. **42**, № 13. 96–103.

Поступила в редакцию
28.09.2018

Taking Account of the Hysteresis Effects in the Calculation of Eddy Currents

I. M. Stupakov¹, M. E. Royak², N. S. Kondratyeva³,
A. V. Zelenskiy⁴, and N. A. Vinokurov⁵

¹ *Novosibirsk State Technical University, Faculty of Applied Mathematics and Informatics; prospekt K. Marksa, 20, 630073, Novosibirsk, Russia; Ph.D., Associate Professor, e-mail: istupakov@gmail.com*

² *Novosibirsk State Technical University, Faculty of Applied Mathematics and Informatics; prospekt K. Marksa, 20, 630073, Novosibirsk, Russia; Dr. Sci., Professor, e-mail: royak@corp.nstu.ru*

³ *Novosibirsk State Technical University, Faculty of Applied Mathematics and Informatics; prospekt K. Marksa, 20, 630073, Novosibirsk, Russia; Junior Scientist, e-mail: kondratyeva.ns@gmail.com*

⁴ *Novosibirsk State Technical University, Faculty of Applied Mathematics and Informatics; prospekt K. Marksa, 20, 630073, Novosibirsk, Russia; Graduate Student, e-mail: virus1001010@gmail.com*

⁵ *Budker Institute of Nuclear Physics, Siberian Branch of Russian Academy of Sciences; prospekt Lavrentieva 11, 630090, Novosibirsk, Russia; Dr. Sci., Professor, Corresponding Member of Russian Academy of Sciences, Head of Laboratory, e-mail: vinokurov@inp.nsk.su*

Received September 28, 2018

Abstract: An approach that allows one to take into account the residual magnetization and the eddy currents simultaneously during the numerical simulation of electromagnetic processes is considered. The efficiency of the proposed approach is verified by comparing with the results of experimental measurements for a magnet with an O-shaped magnetic core.

Keywords: mathematical modeling, numerical modeling, electromagnetism, eddy currents, hysteresis, finite element method, boundary element method.

References

1. Yu. G. Soloveichik, M. E. Royak, and M. G. Persova, *Finite Element Method for Scalar and Vector Problems* (Novosib. Gos. Tekh. Univ., Novosibirsk, 2007) [in Russian].
2. L. A. Neyman and V. Yu. Neyman, "Simulation of Processes in an Electromagnetic Vibration Converter with Power Loss in the Steel Magnetic Core," *Dokl. Tomsk Gos. Univ. Sistem Upravl. Radioelektron.* **19** (1), 73–78 (2016).
3. I. B. Podbereznyaya, "Algorithms of Modeling of a Magnetic Hysteresis," *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved., Elektromekhan.*, No. 6, 5–13 (2015).
4. I. B. Podbereznyaya, "Complex Modeling Software Three-Dimensional Electromagnetic Fields by the Spatial Integral Equations for Electrical Problems," *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved., Tekhnich. Nauki*, No. 1, 19–23 (2017).
5. M. E. Royak, I. M. Stupakov, N. S. Kondratyeva, et al., "Application of a New Model of Residual Magnetization of Iron for Calculating the Deflecting Magnet of an Accelerator," *Pis'ma Zh. Tekh. Fiz.* **43** (20), 28–36 (2017) [Tech. Phys. Lett. **43** (10), 924–927 (2017)].
6. M. Royak, I. Stupakov, N. Kondratyeva, and E. Antokhin, "Finite Element Formulation with Coupled Vector-Scalar Magnetic Potentials for Eddy Current Problems," in *Proc. 11th Int. Forum on Strategic Technology (IFOST-2016), Novosibirsk, Russia, June 1–3, 2016* (IEEE Press, New York, 2016), pp. 456–460.
7. I. M. Stupakov, M. E. Royak, and N. S. Kondratyeva, "The Method for Calculating Magnetic Field Induced by Current Coils," in *Proc. 13th Int. Scientific-Technical Conf. on Actual Problems of Electronics Instrument Engineering (APEIE-2016), Novosibirsk, Russia, October 3–6, 2016* (IEEE Press, New York, 2016), Vol. 2, pp. 347–350.
8. V. F. Matyuk and A. A. Osipov, "The Mathematical Models of the Magnetization Curve and the Magnetic Hysteresis Loops. Part 1. Analysis of Models," *Nerazrush. Kontr. Diagn.*, No. 2, 3–35 (2011).
9. I. D. Mayergoyz, *Mathematical Models of Hysteresis and Their Applications* (Academic Press, New York, 2003).
10. Zs. Szabó, I. Tugyi, Gy. Kádá, and J. Füzi, "Identification Procedures for Scalar Preisach Model," *Physica B: Condens. Matter* **343** (1–4), 142–147 (2004).
11. P. A. Denisov, "Description of the Hysteresis Loop with the use of Explicit Expressions for the Jiles–Atherton Second-Level Model," *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved., Elektromekhan.* **61** (1), 6–12 (2018).
12. A. V. Chernyshev, "The Model of Magnetic Hysteresis of Jiles–Atherton and Its Modifications," *Kontrol Diagnost.*, No. 2, 55–60 (2016).
13. Yu. V. Kulayev and P. A. Kurbatov, "Model of Magnetic Hysteresis Properties of Materials in the Application of a Constant and Variable Magnetic Fields," *Al'ternativ. Energet. Ekologiya*, No. 22, 23–29 (2015).
14. N. A. Vinokurov, O. A. Shevchenko, S. S. Serednyakov, et al., "Allowing for Hysteresis in the Calculation of Fields in the Elements of Accelerator Magnetic Systems," *Pis'ma Zh. Tekh. Fiz.* **42** (13), 96–103 (2016) [Tech. Phys. Lett. **42** (7), 708–711 (2016)].