

УДК 519.633.6

doi 10.26089/NumMet.v20r105

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СХЕМЫ ДИЕЗ ПОВЫШЕННОГО ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

А. В. Соловьев¹, А. В. Данилин²

Разностная схема Диез повышенного порядка точности, ранее разработанная для решения скалярного одномерного уравнения переноса, с помощью балансно-характеристического подхода распространена на нелинейные системы уравнений мелкой воды и уравнений Эйлера. Для обеих систем уравнений решены тестовые задачи, иллюстрирующие особенности решения, полученные с помощью описываемой разностной схемы.

Ключевые слова: методика Кабаре, схема Диез, гиперболические уравнения, схемы повышенной точности.

1. Введение. Для гиперболических систем уравнений одним из распространенных методов численного решения являются конечно-объемные схемы [1]. Параметры, определенные в ячейках разностной сетки, рассчитываются по разностным уравнениям, являющимся аппроксимацией дифференциальных уравнений, проинтегрированных по ячейке.

Типичным является определение потоков на границах ячеек и, затем, использование этих потоков для определения значений внутри ячейки для нового момента времени. Существуют различные способы определения потоков на гранях. Одним из возможных подходов является балансно-характеристический [2, 3].

Балансно-характеристические схемы сочетают в себе преимущества характеристического подхода для вычисления переменных на новом слое по времени, а также преимущества консервативных разностных схем, гарантирующих выполнение в ходе расчетов основных законов сохранения. В таких разностных схемах потоковые величины на гранях ячеек рассчитываются на основе набора локальных инвариантов, остающихся постоянными на характеристиках в окрестности грани ячейки, а консервативные переменные, определенные в ячейках, рассчитываются по традиционным для конечно-объемных схем балансным уравнениям.

Одним из представителей явных балансно-характеристических схем является предложенная В. М. Головинским схема Кабаре [4]. Кроме того, можно отметить схему Active Flux [5]. Обе эти схемы имеют второй порядок точности. В отличие от схемы Active Flux, схема Кабаре основана на центрально-симметричном шаблоне, что делает ее обратимой по времени, а значит, и бездиссипативной в областях, где не требуется лимитирования потоковых значений.

Кроме второго порядка точности и бездиссипативности схема Кабаре обладает и другими замечательными качествами — хорошими дисперсионными свойствами, минимальным вычислительным шаблоном, монотонностью и др. Однако постоянно поднимается вопрос о возможности использования разностных схем класса Кабаре с более высоким, чем второй, порядком аппроксимации исходных уравнений.

Для построения разностных схем высокого порядка аппроксимации традиционным является расширение пространственного шаблона разностных операторов, входящих в схему. Такой подход приводит к известным проблемам вблизи границ области, а также при распараллеливании задачи. Однако существует и другая возможность повышения порядка аппроксимации — оставаясь в пределах одной пространственной ячейки, использовать большее количество слоев по времени.

Авторами в работе [6] для скалярного уравнения переноса предложена разностная схема Диез, построенная на тех же принципах, что и схема Кабаре, локализованная в одной пространственной ячейке и двух шагах по времени и имеющая четвертый порядок аппроксимации на решении. Показано, что схема Диез бездиссипативна и обладает хорошими дисперсионными свойствами. Настоящая статья посвящена вопросу распространения схемы Диез на некоторые гиперболические системы нелинейных уравнений сохранения.

¹ Институт проблем безопасного развития атомной энергетики РАН, Большая Тульская ул., д. 52, 115191, Москва; вед. науч. сотр., e-mail: solovjev@ibrae.ac.ru

² Институт проблем безопасного развития атомной энергетики РАН, Большая Тульская ул., д. 52, 115191, Москва; мл. науч. сотр., e-mail: bass-4@yandex.ru

2. Уравнение переноса. Прежде чем приступить к изложению применения разностной схемы Диез к системе нелинейных уравнений, следует упомянуть основные идеи применения этой схемы для решения скалярного уравнения переноса [6]. Будем решать уравнение

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + c \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \quad c = \text{const} > 0. \quad (1)$$

В качестве расчетной области рассмотрим отрезок фиксированной длины $x \in [0, L]$. В расчетной области введем равномерную сетку, состоящую из узлов x_i с координатами

$$x_i = h \cdot i, \quad h = \frac{L}{N}, \quad i = 1, \dots, N + 1$$

и ячеек $C_{i+1/2}$, $i = 1, \dots, N$. Узлы обозначаются целыми индексами, ячейки — полуцелыми. В расчетной области определим два набора разностных переменных. Один будем относить к ячейкам и обозначать полуцелыми индексами. Эти переменные будем называть консервативными. Второй набор переменных относится к узлам расчетной сетки и обозначается целыми индексами. Эти переменные определяют потоки между ячейками и называются потоковыми.

В [6] предложен явный алгоритм численного решения уравнения переноса (1) по схеме высокого порядка точности Диез, каждый шаг по времени которого состоит из двух последовательных фаз. На **фазе 1** определяются потоковые переменные по следующему алгоритму. Предварительно потоковые переменные вычисляются по формуле

$$\tilde{\varphi}_{i+1}^{n+1} = \frac{2\varphi_{i+1/2}^n - (1 - \beta)(\varphi_i^n + \varphi_{i+1}^n)}{\beta} - \varphi_i^{n-1}, \quad \beta = \frac{1}{4r(1-r)}, \quad r = \frac{c \cdot \tau}{h}. \quad (2)$$

Вычисленные значения при необходимости подвергаются процедуре монотонизации:

$$\varphi_{i+1}^{n+1} = \begin{cases} \min(\varphi_{i+1/2}^n, \varphi_{i+1}^n), & \text{если } \tilde{\varphi}_{i+1}^{n+1} < \min(\varphi_{i+1/2}^n, \varphi_{i+1}^n), \\ \max(\varphi_{i+1/2}^n, \varphi_{i+1}^n), & \text{если } \tilde{\varphi}_{i+1}^{n+1} > \max(\varphi_{i+1/2}^n, \varphi_{i+1}^n), \\ \tilde{\varphi}_{i+1}^{n+1} & \text{иначе.} \end{cases}$$

На **фазе 2** вычисляются консервативные переменные в соответствии с соотношением

$$\frac{(\alpha\varphi_i^{n+1} + (1 - 2\alpha)\varphi_{i+1/2}^{n+1} + \alpha\varphi_{i+1}^{n+1}) - (\alpha\varphi_i^n + (1 - 2\alpha)\varphi_{i+1/2}^n + \alpha\varphi_{i+1}^n)}{\tau} + \frac{c}{h} \left[\frac{\varphi_{i+1}^n + \varphi_{i+1}^{n+1}}{2} - \frac{\varphi_i^n + \varphi_i^{n+1}}{2} \right] = 0, \quad \alpha = \frac{1 + 2r^2}{6}, \quad r = \frac{c \cdot \tau}{h}. \quad (3)$$

Можно показать, что как формула вычисления потоковых переменных (2), так и формула вычисления консервативных переменных (3) аппроксимируют решение уравнения (1) с четвертым порядком точности в центре ячейки.

3. Система одномерных уравнений мелкой воды. Рассмотрим одномерную систему уравнений мелкой воды с ровным дном в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hu}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial hu}{\partial t} + \frac{\partial hu^2}{\partial x} + \frac{g}{2} \frac{\partial h^2}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Для этой системы уравнений построим **характеристическую форму**. Для этого перепишем систему (4) сначала в простой форме

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial u}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Систему уравнений (5) запишем в матричном виде

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} + A \frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0, \quad A = \begin{pmatrix} u & h \\ g & u \end{pmatrix}, \quad \Psi = \{h, u\}. \quad (6)$$

Собственные значения матрицы A можно найти из решения уравнения $|A - \lambda E| = 0$, где E — единичная матрица. Корни этого уравнения запишем следующим образом:

$$\lambda_1 = u + c, \quad \lambda_2 = u - c, \quad c = \sqrt{gh}. \tag{7}$$

Для матрицы A можно найти левые собственные векторы

$$l_1 = \left(\frac{c}{h}, 1 \right), \quad l_2 = \left(-\frac{c}{h}, 1 \right).$$

Составим из левых собственных векторов матрицу

$$\Omega = \begin{pmatrix} c/h & 1 \\ -c/h & 1 \end{pmatrix} \tag{8}$$

и умножим матричное уравнение (6) слева на матрицу Ω (8). Так как справедливо тождество $\Omega \cdot A = \Omega$, то полученное после умножения матричное уравнение будет иметь следующий вид:

$$\left(\Omega \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right) + \Lambda \left(\Omega \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) = 0, \quad \Lambda = \lambda E = \begin{pmatrix} u + c & 0 \\ 0 & u - c \end{pmatrix}. \tag{9}$$

В покомпонентной записи система уравнений (9) может быть представлена в форме

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{c}{h} \frac{\partial h}{\partial t} \right) + (u + c) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{c}{h} \frac{\partial h}{\partial x} \right) &= 0, \\ \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{c}{h} \frac{\partial h}{\partial t} \right) + (u - c) \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{c}{h} \frac{\partial h}{\partial x} \right) &= 0. \end{aligned} \tag{10}$$

Такая форма записи исходной системы уравнений (4) называется **характеристической**.

4. Разностная схема. Разностная схема для системы уравнений мелкой воды является расширением разностной схемы (2)–(3), предназначенной для решения скалярного уравнения переноса. Как и ранее, каждый шаг по времени разностной схемы разобьем на две фазы. В течение первой фазы рассчитаем потоковые значения в узлах сетки. На второй фазе, используя рассчитанные потоки, определим консервативные переменные на новом слое по времени. Расчетная область и сетка определяются аналогично приведенным выше.

Фаза 1. Для простоты изложения ограничимся случаем, когда скорость течения, описываемого уравнениями (4), меньше скорости звука c , определяемой формулой (7). Тогда, исходя из характеристической формы (10), в окрестности произвольного узла x_i можно определить два локальных инварианта

$$R = u + G_R \cdot h, \quad Q = u + G_Q \cdot h, \quad G_R = c/h, \quad G_Q = -c/h \tag{11}$$

и переписать характеристическую систему в инвариантном виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial t} + (u + c) \frac{\partial R}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial Q}{\partial t} + (u - c) \frac{\partial Q}{\partial x} &= 0. \end{aligned}$$

Инвариант R в дозвуковом случае приходит в узел x_i слева, а инвариант Q — справа. Для вычисления предварительных значений инвариантов R_i^{n+1} и Q_i^{n+1} будем использовать формулы, аналогичные (2):

$$\tilde{R}_i^{n+1} = \frac{2R_{i-1/2}^n - (1 - \beta_R)(R_{i-1}^n + R_i^n)}{\beta_R} - R_{i-1}^{n-1}, \quad \beta_R = \frac{1}{4r_R(1 - r_R)}, \quad r_R = \frac{(u + c)_{i-1/2}^n \cdot \tau_n}{h_{i-1/2}}, \tag{12}$$

$$\tilde{Q}_i^{n+1} = \frac{2Q_{i+1/2}^n - (1 - \beta_Q)(Q_i^n + Q_{i+1}^n)}{\beta_Q} - Q_{i+1}^{n-1}, \quad \beta_Q = \frac{1}{4r_Q(1 - r_Q)}, \quad r_Q = \frac{(u - c)_{i+1/2}^n \cdot \tau_n}{h_{i+1/2}}, \tag{13}$$

$$G_R = \left(\frac{c}{h} \right)_{i-1/2}^n, \quad G_Q = -\left(\frac{c}{h} \right)_{i+1/2}^n.$$

Окончательно значения инвариантов определяются после процедуры нелинейной коррекции:

$$R_i^{n+1} = \begin{cases} \min(R_{i-1/2}^n, R_i^n), & \text{если } \tilde{R}_i^{n+1} < \min(R_{i-1/2}^n, R_i^n), \\ \min(R_{i-1/2}^n, R_i^n), & \text{если } \tilde{R}_i^{n+1} > \max(R_{i-1/2}^n, R_i^n), \\ \tilde{R}_i^{n+1} & \text{иначе;} \end{cases} \quad (14)$$

$$Q_i^{n+1} = \begin{cases} \min(Q_{i+1/2}^n, Q_i^n), & \text{если } \tilde{Q}_i^{n+1} < \min(Q_{i+1/2}^n, Q_i^n), \\ \max(Q_{i+1/2}^n, Q_i^n), & \text{если } \tilde{Q}_i^{n+1} > \max(Q_{i+1/2}^n, Q_i^n), \\ \tilde{Q}_i^{n+1} & \text{иначе.} \end{cases} \quad (15)$$

В формулах (12)–(15) в правые части входят значения инвариантов с различными индексами как по пространству, так и по времени. Все они вычисляются по аналогичным формулам. Для любых индексов j и m из (12)–(15) будем использовать определения

$$R_j^m = u_j^m + G_R \cdot h_j^m, \quad Q_j^m = u_j^m + G_Q \cdot h_j^m,$$

где $G_R = \frac{c_{i-1/2}^n}{h_{i-1/2}^n}$, $G_Q = -\frac{c_{i-1/2}^n}{h_{i-1/2}^n}$, что согласуется с определением (11). По вычисленным значениям инвариантов R_i^{n+1} и Q_i^{n+1} можно найти потоковые переменные h_i^{n+1} и u_i^{n+1} , решив систему уравнений

$$\begin{aligned} R_i^{n+1} &= u_i^{n+1} + G_R \cdot h_i^{n+1}, \\ Q_i^{n+1} &= u_i^{n+1} + G_Q \cdot h_i^{n+1}. \end{aligned}$$

Фаза 2 схемы служит для определения консервативных переменных на новом слое по времени. Для этого представим уравнения мелкой воды (4) в виде

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0, \quad \varphi = \begin{Bmatrix} h \\ hu \end{Bmatrix}, \quad \theta = \begin{Bmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{g}{2} h^2 \end{Bmatrix}$$

и используем формулу, аналогичную (3):

$$\begin{aligned} & \frac{(\alpha \varphi_i^{n+1} + (1 - 2\alpha) \varphi_{i+1/2}^{n+1} + \alpha \varphi_{i+1}^{n+1}) - (\alpha \varphi_i^n + (1 - 2\alpha) \varphi_{i+1/2}^n + \alpha \varphi_{i+1}^n)}{\tau_n} + \\ & + \frac{1}{h_{i+1/2}} \left[\frac{\theta_{i+1}^n + \theta_{i+1}^{n+1}}{2} - \frac{\theta_i^n + \theta_i^{n+1}}{2} \right] = 0, \quad \alpha = \frac{1 + 2r^2}{6}, \quad r = \frac{\tau_n}{h_{i+1/2}}. \end{aligned} \quad (16)$$

Так как все потоковые переменные на слое времени $n + 1$ уже определены, то в формуле (16) неизвестной остается только консервативная переменная на новом слое $\varphi_{i+1/2}^{n+1}$, которая может быть найдена явно.

Фазы 1 и 2 разностной схемы составляют замкнутый набор соотношений, необходимых для вычисления всех переменных на новом слое по времени, причем все они обладают четвертым порядком аппроксимации на решении — как по времени, так и по пространству.

5. Примеры расчетов. Рассмотрим задачу о столкновении двух потоков. Разделим расчетную область пополам и зададим начальные данные, указанные в табл. 1.

При таких начальных данных от центра области в обе стороны бегут две ударные волны. Граничные условия на концах расчетной области несущественны, так как расчет прекращается до достижения их ударной волной. Данная задача численно решалась как по обсуждаемой схеме Диез, так и по схеме Кабаре, тоже хорошо отслеживающей фронт ударной волны. На рис. 1 приведен фрагмент решения, соответствующий правому фронту.

Видно, что как схема Кабаре (линия), так и схема Диез (маркеры) размазывают фронт примерно на две ячейки, но размазывание у схемы Диез меньше.

Кроме того, была рассмотрена задача о двух разбегающихся потоках, решением которой являются две волны разрежения. Рис. 2 соответствует правой волне разрежения. Видно, что решение по схеме Диез точнее соответствует аналитическому решению, но содержит немонотонности.

Таблица 1

Параметр	Слева	Справа
h	1	1
u	2	-2

Таблица 2

Параметр	Слева	Справа
h	1	1
u	-2	2

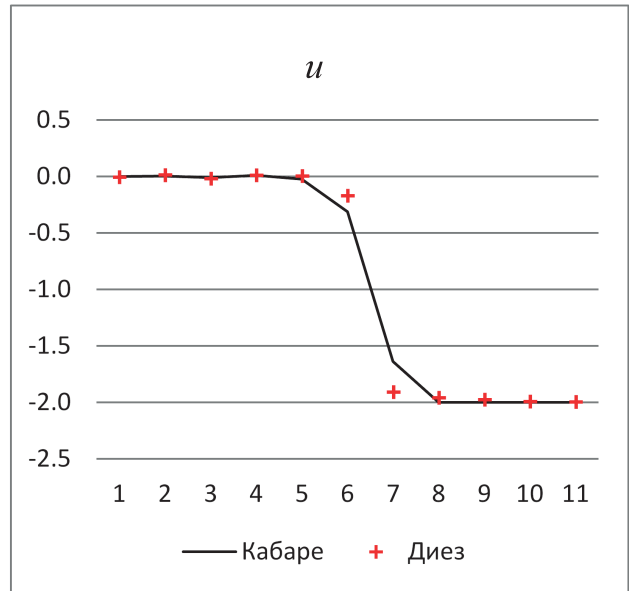
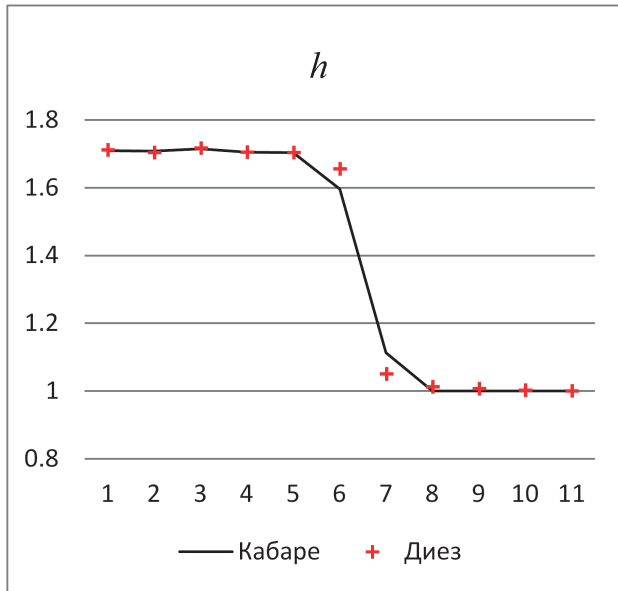


Рис. 1. Ударная волна для системы уравнений мелкой воды

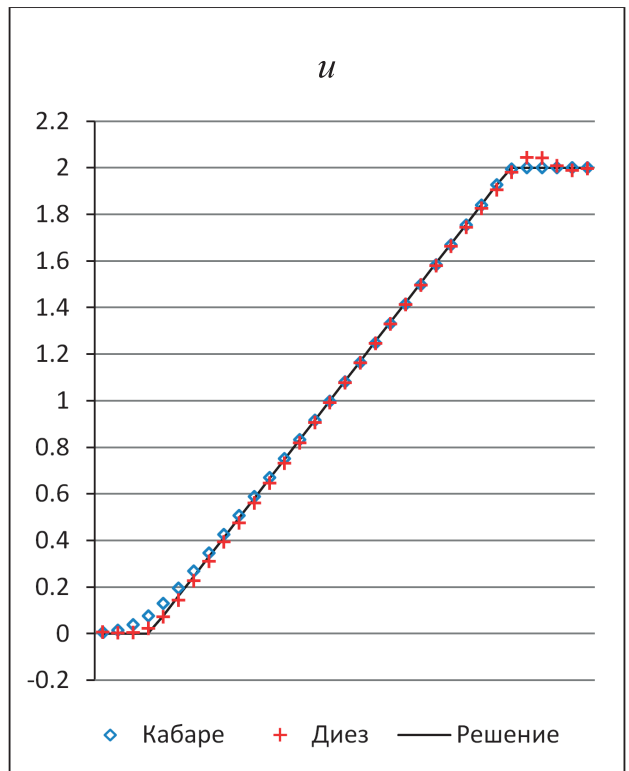
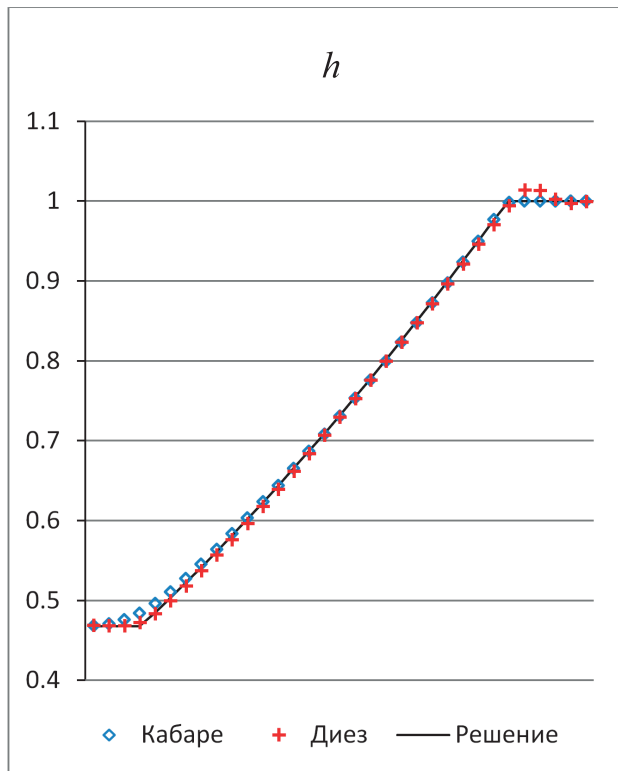


Рис. 2. Волна разрежения для системы уравнений мелкой воды

6. Идеальный газ. Система одномерных уравнений Эйлера. Рассмотрим систему уравнений Эйлера для идеального газа

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u^2 + p)}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial u (\rho E + p)}{\partial x} &= 0\end{aligned}\quad (17)$$

с уравнением состояния

$$p = (\gamma - 1)\rho\varepsilon, \quad (18)$$

где $E = u^2/2 + \varepsilon$ — удельная полная энергия. Без доказательства (см., например, [4]) отметим, что систему уравнений (17)–(18) можно привести к простой форме

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} + A \frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0, \quad (19)$$

где $A = \begin{pmatrix} u & \rho & 0 \\ 0 & u & \rho^{-1} \\ 0 & \rho c^2 & u \end{pmatrix}$, $\Psi = \{\rho, u, p\}$. Матрица A имеет три собственных значения: $\lambda_{1,2} = u \pm c$, $\lambda_3 = u$ и $c = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}$. Матрица, составленная из левых собственных векторов, имеет следующий вид:

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & 1 & (\rho c)^{-1} \\ 0 & 1 & -(\rho c)^{-1} \\ -c^2 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Умножая систему уравнений (19) слева на матрицу (20), получим, как и выше, характеристический вид уравнений:

$$\left(\Omega \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right) + \Lambda \left(\Omega \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) = 0, \quad \text{где } \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u+c & 0 & 0 \\ 0 & u-c & 0 \\ 0 & 0 & u \end{pmatrix}. \quad (21)$$

7. Разностная схема. Как и выше, введем на отрезке $0 \leq x \leq L$ сетку с узлами

$$x_i = h \cdot i, \quad h = \frac{L}{N}, \quad i = 1, \dots, N+1$$

и с ячейками $C_{i+1/2}$, ограниченными этими узлами. В узлах введем переменные $\rho_i, u_i, \varepsilon_i, p_i$, которые будем называть потоковыми, а в ячейках — переменные $\rho_{i+1/2}, u_{i+1/2}, \varepsilon_{i+1/2}, p_{i+1/2}$, которые будем называть консервативными. Явный шаг по времени так же разобьем на две фазы. В течение первой фазы вычислим все потоковые переменные на новом слое, а в течение второй фазы — консервативные. Для вычисления потоковых переменных будем использовать характеристическую форму уравнений Эйлера (21), а для вычисления консервативных переменных — консервативную форму (17).

Фаза 1. Как и выше, в данном изложении ограничимся случаем, когда скорость течения, описываемого уравнениями (17), меньше скорости звука. Тогда, исходя из характеристической формы (21) и в окрестности произвольного узла x_i предполагая в течение одного шага постоянство энтропии в каждой из примыкающих к узлу ячейке, можно определить три локальных инварианта

$$R = u + G \cdot p^\mu, \quad Q = u - G \cdot p^\mu, \quad S = \ln\left(\frac{p}{\rho^\gamma}\right), \quad \text{где } G = \frac{2\sqrt{\gamma}(\exp \Phi)^{1/2\gamma}}{\gamma - 1}; \quad \Phi = \ln\left(\frac{p}{\rho^\gamma}\right); \quad \mu = \frac{\gamma - 1}{2\gamma},$$

и переписать характеристическую систему в инвариантном виде

$$\begin{aligned}\frac{\partial R}{\partial t} + (u+c) \frac{\partial R}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial Q}{\partial t} + (u-c) \frac{\partial Q}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial S}{\partial x} &= 0.\end{aligned}$$

Инвариант R в дозвуковом случае приходит в узел x_i слева, инвариант Q — справа, а для определения источника инварианта S необходимо учесть знак потоковой скорости в узле. Для вычисления предварительных значений инвариантов R_i^{n+1} , Q_i^{n+1} и S_i^{n+1} будем использовать формулы, аналогичные (12)–(13):

$$\tilde{R}_i^{n+1} = \frac{2R_{i-1/2}^n - (1 - \beta_R)(R_{i-1}^n + R_i^n)}{\beta_R} - R_{i-1}^{n-1}, \quad \beta_R = \frac{1}{4r_R(1 - r_R)}, \quad r_R = \frac{(u + c)_{i-1/2}^n \cdot \tau_n}{h_{i-1/2}}, \quad (22)$$

$$\tilde{Q}_i^{n+1} = \frac{2Q_{i+1/2}^n - (1 - \beta_Q)(Q_i^n + Q_{i+1}^n)}{\beta_Q} - Q_{i+1}^{n-1}, \quad \beta_Q = \frac{1}{4r_Q(1 - r_Q)}, \quad r_Q = \frac{(u - c)_{i+1/2}^n \cdot \tau_n}{h_{i+1/2}}. \quad (23)$$

Инвариант \tilde{S}_i^{n+1} вычисляется по формуле, аналогичной (22), при $u_i^n \geq 0$ или по формуле, аналогичной (23), при $u_i^n < 0$. Все три инварианта должны пройти процедуру нелинейной коррекции, аналогичную (14)–(15). При вычислении всех инвариантов значения параметров G и Φ вычисляются в центре ячейки, через которую проходит соответствующая характеристика.

После того как будут вычислены все три инварианта R_i^{n+1} , Q_i^{n+1} и S_i^{n+1} , фаза 1 завершается вычислением потоковых значений u_i^{n+1} и p_i^{n+1} из решения системы уравнений

$$\begin{aligned} u_i^{n+1} + G_{i-1/2} \cdot p^\gamma &= R_i^{n+1}, \\ u_i^{n+1} - G_{i+1/2} \cdot p^\gamma &= Q_i^{n+1}. \end{aligned}$$

Затем потоковая переменная ρ_i^{n+1} может быть найдена из соотношения

$$\ln\left(\frac{p}{\rho^\gamma}\right)_i^{n+1} = S_i^{n+1}.$$

Фаза 2. На второй фазе шага по времени определяются консервативные переменные. Запишем систему уравнений Эйлера (17) в матричном виде

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0, \quad \varphi = \begin{Bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho E \end{Bmatrix}, \quad \theta = \begin{Bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ u(\rho E + p) \end{Bmatrix}.$$

Значения консервативных переменных на новом слое определяются из соотношений

$$\begin{aligned} &\frac{(\alpha\varphi_i^{n+1} + (1 - 2\alpha)\varphi_{i+1/2}^{n+1} + \alpha\varphi_{i+1}^{n+1}) - (\alpha\varphi_i^n + (1 - 2\alpha)\varphi_{i+1/2}^n + \alpha\varphi_{i+1}^n)}{\tau_n} + \\ &+ \frac{1}{h_{i+1/2}} \left[\frac{\theta_{i+1}^n + \theta_{i+1}^{n+1}}{2} - \frac{\theta_i^n + \theta_i^{n+1}}{2} \right] = 0, \quad \alpha = \frac{1 + 2r^2}{6}, \quad r = \frac{\tau_n}{h_{i+1/2}}. \end{aligned}$$

Таблица 3

Параметр	Слева	Справа
Плотность	1	1
Скорость	1	-1
Давление	4	4

Таблица 4

Параметр	Слева	Справа
Плотность	1	1
Скорость	-1	1
Давление	4	4

8. Примеры расчетов. Так же, как и в случае уравнений мелкой воды, рассмотрим две задачи. В первой задаче рассчитаем столкновение двух одинаковых потоков, порождающих две разбегающиеся ударные волны (табл. 3).

На рис. 3 приведен фрагмент решения, соответствующий правому фронту. Решение по схеме Диез несколько меньше размывает разрыв.

Изменив скорости на противоположные, получим решение в виде двух разбегающихся волн разрежения (табл. 4).

На рис. 4 показана правая волна. Так же, как и для системы уравнений мелкой воды, решение по схеме Диез лучше соответствует точному решению, но содержит осцилляции перед фронтом волны.

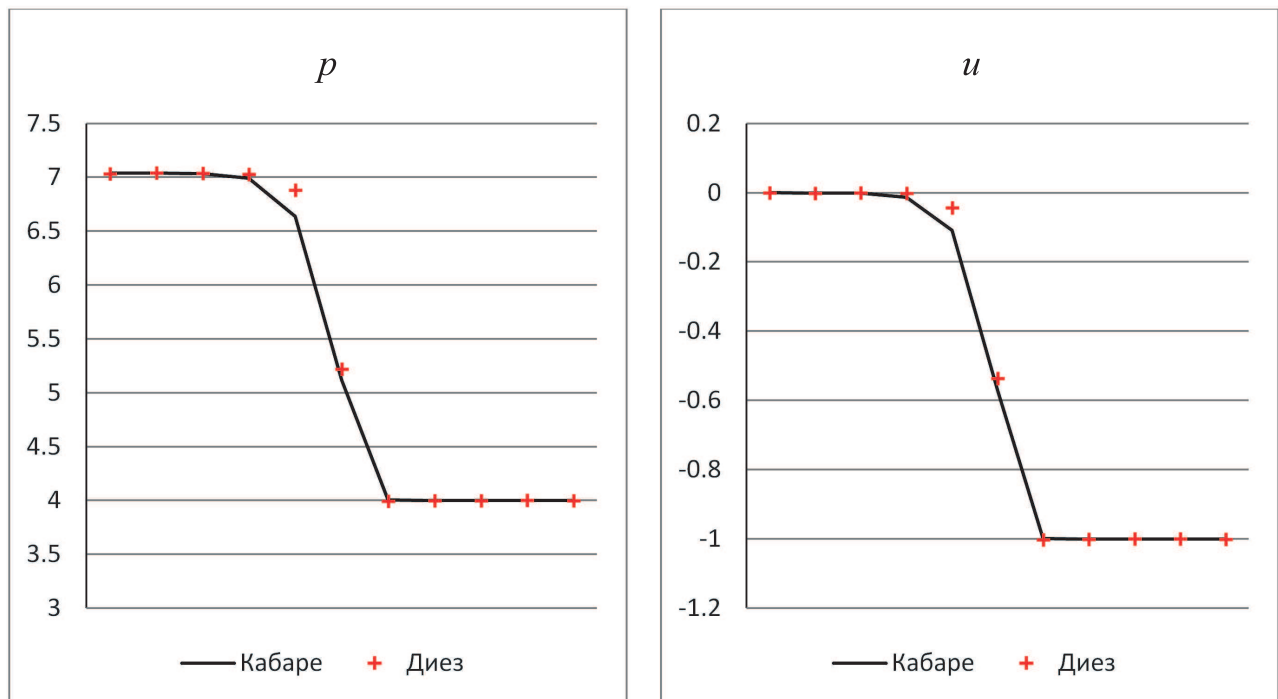


Рис. 3. Ударная волна для системы уравнений Эйлера

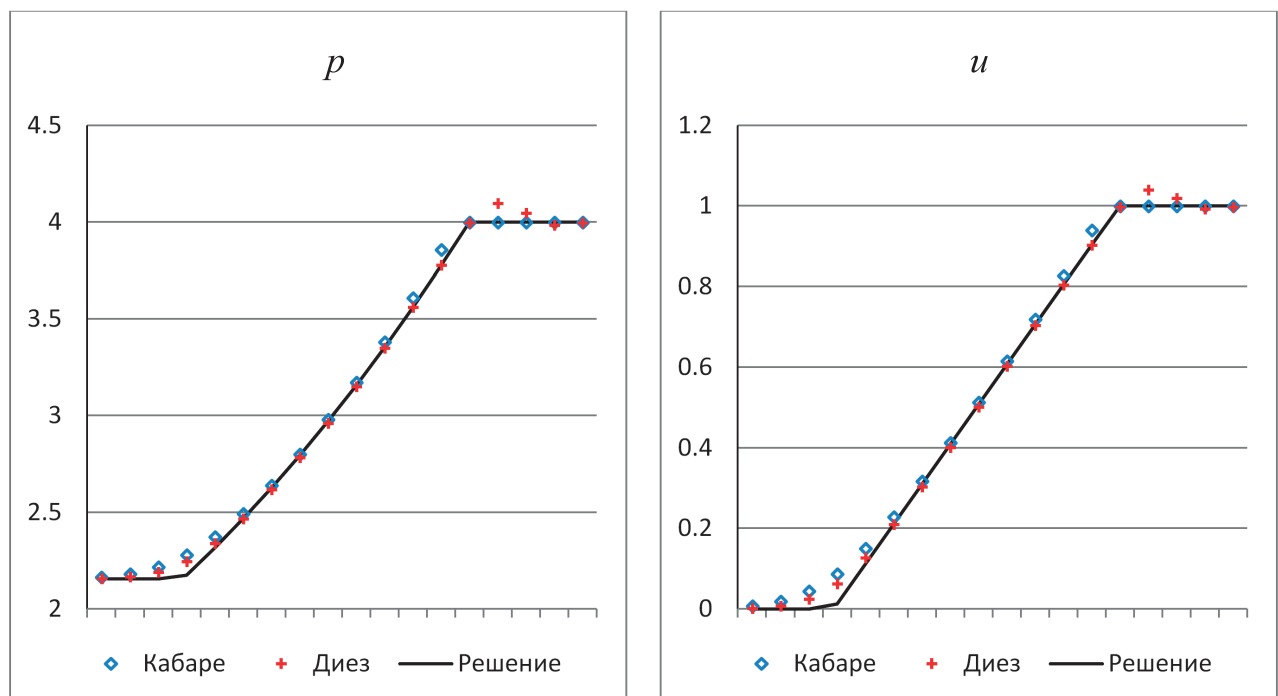


Рис. 4. Волна разрежения для системы уравнений Эйлера

9. Заключение. В настоящей статье разностная схема Диез, ранее построенная для скалярного уравнения переноса, с помощью балансно-характеристического подхода распространена на нелинейные гиперболические системы уравнений сохранения — систему уравнений мелкой воды и систему уравнений Эйлера для идеального газа. Эта разностная схема обладает четвертым порядком аппроксимации на решении и локализована внутри одной пространственной ячейки. Показано, что, несмотря на некоторые осцилляции в решении, разностная схема Диез хорошо отражает особенности решения — как на ударных

волнах, так и на волнах разрежения.

Авторы выражают самую искреннюю благодарность д.ф.-м.н., профессору В.М. Головизнину за поддержку данной работы. Его внимание и ценные советы позволили получить приведенные здесь результаты и наметить новые цели на будущее.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 16–01–00333 “Построение и анализ разностных схем повышенной точности и их применение к задачам гидродинамики”).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: Физматлит, 2001.
2. Головизнин В.М., Карабасов С.А., Кобринский И.М. Балансно-характеристические схемы с разделенными консервативными и потоковыми переменными // Математическое моделирование. 2003. **15**, № 9. 29–48.
3. Головизнин В.М., Четверушкин Б.Н. Алгоритмы нового поколения в вычислительной гидродинамике // Журнал вычислительной математики и математической физики 2018. **58**, № 8. 20–29.
4. Головизнин В.М., Зайцев М.А., Карабасов С.А., Короткин И.А. Новые алгоритмы вычислительной гидродинамики для многопроцессорных вычислительных комплексов. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2013.
5. Eymann T.A., Roe P.L. Active Flux schemes for systems // Proc. 20th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference. 2011. doi 10.2514/6.2011-3840.
6. Соловьев А.В., Данилин А.В. Об одной разностной схеме класса Кабаре повышенного порядка точности для решения уравнения переноса // Вычислительные методы и программирование. Новые вычислительные технологии. 2018. **19**. 185–193.

Поступила в редакцию
23.12.2018

Using the Sharp Scheme of Higher-Order Accuracy for Solving Some Nonlinear Hyperbolic Systems of Equations

A. V. Solovjev¹ and A. V. Danilin²

¹ Nuclear Safety Institute, Russian Academy of Sciences; ulitsa Bol'shaya Tul'skaya 52, Moscow, 115191, Russia; Ph.D., Leading Scientist, e-mail: solovjev@ibrae.ac.ru

² Nuclear Safety Institute, Russian Academy of Sciences; ulitsa Bol'shaya Tul'skaya 52, Moscow, 115191, Russia; Junior Scientist, e-mail: bass-4@yandex.ru

Received December 23, 2018

Abstract: The Sharp difference scheme of higher-order accuracy developed previously for solving the scalar one-dimensional transport equation is extended to the shallow water nonlinear systems and to the systems of Euler equations using the balance-characteristic approach. For these systems, a number of test problems are solved to illustrate the features of the solutions obtained by the described difference scheme.

Keywords: Cabaret method, Sharp scheme, hyperbolic equations, high-accuracy schemes.

References

1. A. G. Kulikovskii, N. V. Pogorelov, and A. Yu. Semenov, *Mathematical Aspects of Numerical Solution of Hyperbolic Systems*, (Fizmatlit, Moscow, 2001; CRC Press, Boca Raton, 2001).
2. V. M. Goloviznin, S. A. Karabasov, and I. M. Kobrinskii, “Balance-Characteristic Schemes with Separated Conservative and Flux Variables,” *Mat. Model.* **15** (9), 29–48 (2003).
3. V. M. Goloviznin and B. N. Chetverushkin, “New Generation Algorithms for Computational Fluid Dynamics,” *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.* **58** (8), 20–29 (2018) [*Comput. Math. Math. Phys.* **58** (8), 1217–1225 (2018)].
4. V. M. Goloviznin, M. A. Zaitsev, S. A. Karabasov, and I. A. Korotkin, *New CFD Algorithms for Multiprocessor Computer Systems* (Mosk. Gos. Univ., Moscow, 2013) [in Russian].
5. T. A. Eymann and P. L. Roe, “Active Flux Schemes for Systems,” in *Proc. 20th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference, Honolulu, Hawaii, USA, June 27–30, 2011*. doi 10.2514/6.2011-3840
6. A. V. Solovjev A.V. and A. V. Danilin, “A Higher-Order Difference Scheme of the Cabaret Class for Solving the Transport Equation,” *Vychisl. Metody Programm.* **19**, 185–193 (2018).